This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ACL8560
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 04014427
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B22738
035/2: : |a (CaOTULAS)160428138
040: : |c MiU |d MiU
050/1:0 : |a QA259 |b .G76
100:1 : |a Grassmann, Hermann, |d 1809-1877.
245:04: |a Die Ausdehnungslehre. |c Vollständig und in strenger form bearbietet von Hermann Grassmann.
260: : |a Berlin, |b T. C. F. Enslin, |c 1862.
300/1: : |a xii, 388 p. |c 22 cm.
650/1: 0: |a Ausdenungslehre.
998: : |c HLM |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

Die Alexandra Linie

Ausdehnungslehre.

Vollständig und in strenger Form

bearbeitet

von

Hermann Grassmann,

Professor am Gymnasium zu Stettin.

BERLIN, 1862.

VERLAG VON TH. CHR. FR. ENSLIN.

(ADOLPH ENSLIN.)

Hosted by Google

Hosted by Google

Vorrede.

Das vorliegende Werk umfasst die gesammte Ausdehnungslehre, eine mathematische Wissenschaft, von welcher ich schon vor 17 Jahren den ersten Theil unter dem besonderen Titel: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik — Leipzig 1844, Verlag von Otto Wigand“ herausgegeben habe. Ausserdem habe ich in der Vorrede des genannten Werkes die wesentlichsten Gegenstände angedeutet, welche nach meinem Plane den Inhalt des zweiten Theiles ausmachen sollten. Statt nun diesen zweiten Theil als Fortsetzung jenes ersteren zu veröffentlichen, und dadurch jenem Plane gemäss das begonnene Werk abzuschliessen, habe ich es vorgezogen, den in jenem behandelten Stoff auch in dies neue Werk mit aufzunehmen, und so ein zusammenhängendes Ganze zu liefern. Der Hauptgrund, der mich dazu bewogen hat, ist die Schwierigkeit, welche nach dem Urtheile aller Mathematiker, deren Urtheil ich zu hören Gelegenheit fand, das Studium jenes Werkes wegen seiner, wie sie meinen, mehr philosophischen als mathematischen Form dem Leser bereitet. Und in der That muss diese Schwierigkeit sehr bedeutend gewesen sein, da zwar wohl die geometrischen Abhandlungen, welche ich zur Erläuterung jenes Werkes geschrieben habe (Crelle B. 36, 42, 44, 49, 52; Geometrische Analyse Leipzig 1847) mehrfach von andern Mathematikern erwähnt und benutzt sind, aber das in jenem Werk selbst verarbeitete Gebiet nirgends, wenn ich eine interessante kleine Abhandlung von Kysaeus (Bedeutung und Anwendung der Zahlen in der Geometrie, Siegen 1850) ausnehme, berührt oder zu weiteren Forschungen verwandt ist. Damit hängt auch zusammen, dass nie eine Beurtheilung des Werkes, ja nicht einmal eine Anzeige desselben, ausser im Messkatalog, oder eine Inhaltsangabe, ausser einer von mir selbst verfassten (in Grunert's Archiv B. VI.) erschienen ist. Jene Schwierigkeit nun zu heben, war daher eine wesentliche Aufgabe für mich, wenn ich wollte, dass das Buch nicht nur von mir, sondern auch von andern gelesen und verstanden werde. Es konnte aber diese

Hosted by Google

Schwierigkeit nicht gehoben werden, ohne den Plan des Ganzen wesentlich zu ändern. Denn sie liegt nicht in einer willkürlich gewählten Form, sondern in dem Plane, den ich vor Augen hatte: die Wissenschaft unabhängig von andern Zweigen der Mathematik von Grund aus aufzubauen. Die Ausführung gerade dieses Planes, wenn gleich sie für die Wissenschaft an sich die förderndste sein musste, wie sie es denn auch subjectiv gewesen ist, musste bei jeder Form der Darstellung bedeutende Schwierigkeiten bieten, zumal in einer Wissenschaft, wie die Ausdehnungslehre ist, welche die sinnlichen Anschauungen der Geometrie zu allgemeinen, logischen Begriffen erweitert und vergeistigt, und welche an abstrakter Allgemeinheit es nicht nur mit jedem andern Zweige, wie der Algebra, Kombinationslehre, Funktionenlehre, aufnimmt, sondern sie durch Vereinigung aller in diesen Zweigen zu Grunde liegenden Elemente noch weit überbietet, und so gewissermassen den Schlussstein des gesammten Gebäudes der Mathematik bildet.

Ich musste daher diesen ganzen Plan aufgeben, und habe nun für das vorliegende Werk die übrigen Zweige der Mathematik, wenigstens in ihrer elementaren Entwickelung vorausgesetzt. Ebenso habe ich in der Form der Darstellung gerade den entgegengesetzten Weg eingeschlagen, wie dort, indem ich die strengste mathematische Form, die wir überhaupt kennen, die Euklidische, für das vorliegende Werk angewandt, und alles, was zur Erläuterung oder zur Begründung des gewählten Ganges diente, in Anmerkungen verwiesen habe. Eine nothwendige Folge des so veränderten Planes war es, dass die sämmtlichen Resultate des ersten Theiles, so weit sie nicht Anwendungen auf die Physik enthielten, mit in die neue Bearbeitung aufgenommen und nach dem veränderten Plane neu abgeleitet werden mussten (wie dies in No. 1—136, 216—329 geschehen ist). Dennoch sind durch die Verschiedenheit der Methoden die beiden Bearbeitungen desselben Stoffes einander so unähnlich geworden, dass man, mit Ausnahme der abgeleiteten Resultate selbst, welche der Natur der Sache nach keine Abweichung zeigen, kaum eine Uebereinstimmung herausfinden wird. Es ist daher auch die alte Bearbeitung durch die neue durchaus nicht überflüssig gemacht. Denn auch die neue Methode ist an sich keineswegs der älteren vorzuziehen, da vielmehr die bis auf die ersten Ideen hinabsteigende und von hier aus ganz unabhängig fortschreitende Methode der ersten Bearbeitung tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, und daher in rein wissenschaftlicher Beziehung entschiedene Vorzüge vor der letzteren hat. Diese dagegen wird auf der andern Seite für den Mathematiker, der die anderweitig gewonnenen Schätze mathematischen Wissens bei seinen Studien nicht gerne müssig liegen sieht, annehmlicher und jedenfalls leichter verständlich sein. So ergänzen und erläutern sich beide Darstellungen gegenseitig. Die hier gewählte schliesst sich am engsten an die Arithmetik an, doch

Hosted by Google

in der Weiſe, dass ſie die Zahlgrösse schon als eine stetige vorausſetzt. Wie nun die Arithmetik alle übrigen Grössen aus einer einzigen, im Uebrigen willkürlichen Grösse, die als Einheit geſetzt wird, und mit e bezeichnet ſein mag, entwickelt (vergleiche mein Lehrbuch der Arithmetik, 1860 Berlin bei Enslin), ſo ſetzt die Ausdehnungslehre in der hier gegebenen Fassung mehrere ſolche Grössen, e_1, e_2, ···, von denen keine aus den übrigen ableitbar ist, z. B. e_2 ſich nicht aus e_1 dadurch entwickeln lässt, dass e_1 mit irgend einer Zahlgrösse multiplicirt wird, voraus, und betrachtet zunächst die aus jenen Einheiten durch Multiplikation mit Zahlgrössen und Addition dieſer Produkte entstandenen Grössen, welche ich extenſive Grössen (oder Ausdehnungsgrössen) genannt habe. Hieraus ergeben ſich denn leicht die in Kap. 1 vorgetragenen Geſetze der Addition, Subtraktion, Vielfachung (Multiplikation mit Zahlen) und Theilung (Diviſion durch Zahlen). Es mag auffallend erscheinen, dass dieſe ſo einfache Idee, welche im Grunde genommen in weiter nichts besteht, als dass eine Vielfachenſumme verschiedener Grössen (als welche hiernach die extenſive Grösse erscheint) als selbstständige Grösse behandelt wird, in der That zu einer neuen Wissenschaft ſich entfalten ſoll; und man hat mir denn auch, hieran anknüpfend, den Einwurf gemacht, dass die ganze Ausdehnungslehre nur eine abgekürzte Schreibart ſei, ja dass es fehlerhaft ſei, Ausdrücke als Grössen zu behandeln, welche gar keine Grössen ſeien. Allein dieſer Einwurf beruht auf einem gänzlichen Verkennen des Weſens der Mathematik und der Grössen. Auf dieſe Weiſe würde die ganze Arithmetik, ja, man kann ſagen, die ganze reine Mathematik, bloss eine abgekürzte Schreibart ſein; denn die Zahl ist nur ein abgekürzter Ausdruck für eine Summe von Einheiten, das Produkt für eine Summe gleicher Zahlen, die Potenz für ein Produkt ſolcher u. ſ. w.; dennoch würde ohne dieſe abgekürzte Schreibart, oder, um es richtiger auszudrücken, ohne dieſe Zuſammenfassung zu einer Einheit des Begriffes kein Fortschritt denkbar ſein. Es würde zum Beispiel ohne dieſe Zuſammenfassung nicht möglich ſein, zu dem Begriffe der wegnehmenden Rechnungsarten (Subtrahiren, Dividiren, Radiciren, Logarithmiren), und zu den durch ſie neu ſich entwickelnden Zahlformen: der negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären, zu gelangen. Es kommt überall nur darauf an, dass man auch wirklich dasjenige zuſammenfasse, was ſeinem Weſen nach eine Einheit bildet, und was daher auch zu neuen Reſultaten führen muss, zu denen man ohne jene Zuſammenfassung nicht gelangen würde. Die Ausdehnungslehre führt nun in der That zu einem unerschöpflichen Reichthum ſolcher Beziehungen, welche ohne Bildung jener Begriffseinheit, welche in der extenſiven Grösse erscheint, auf keine Weiſe aufzufassen oder abzuleiten wären. Ob man dieſem Begriffe den Namen einer Grösse zugesteht, ist an und für ſich von ſehr untergeordneter Bedeutung, da es hier auf Namen wenig ankommt. Die Frage

Hosted by Google

ist nur die, ob dieſer neue Begriff mit dem allgemeinen Begriffe der Grösse wirklich ſo zuſammenhänge, dass ſie ihrem Weſen nach zu einem Geſammtbegriffe ſich zuſammenschliessen, und dass eine zwischen beiden Gebieten gezogene Gränzlinie das Zuſammengehörige willkürlich und der Sache widersprechend zertrennen würde. Ist letzteres der Fall, ſo wäre es ſogar fehlerhaft, dieſem neuen Begriffe nicht den Namen der Grösse beizulegen. Nun glaube ich in der That, dass zwischen dem, was ich extenſive Grösse genannt habe, und zwischen allgemeinen Zahlgrössen und namentlich der imaginären Grösse (a + bi) eine ſo innige Beziehung herrſcht, dass es wiederſinnig wäre, die eine als Grösse zu betrachten und die andere nicht, da ja in der That die imaginäre Grösse ebenſo aus 2 Einheiten 1 und $i = \sqrt{-1}$ durch reelle Zahlkoefficienten ableitbar ist, wie die extenſiven Grössen aus 2 oder mehr Einheiten ableitbar ſind (ſ. u. No. 413 Anm.) So scheint es mir alſo vollständig gerechtfertigt, wenn ich die extenſive Grösse als Grösse bezeichne. Aber ich gehe noch weiter, indem ich ſie nicht nur als Grösse überhaupt, ſondern auch als einfache Grösse bezeichne. Ihr treten nämlich gegenüber andere Grössen, welche den Charakter zuſammengeſetzter Grössen ebenſo entschieden an ſich tragen, wie jene den der einfachen, und welche erst durch Addition höherer Gebilde und beſonders durch die Betrachtung der Quotienten und der Funktionen hineintreten (vergl. Nr. 77, 377 und 364). Ich fahre nun fort, den Gang der Entwickelung in dem vorliegenden Werke überſichtlich zu verfolgen. An die Addition, Subtraktion, Vielfachung und Theilung schliesst ſich nun (in Kap. 2) der allgemeine Begriff der Multiplikation extenſiver Grössen an, welcher auf die Beziehung der Multiplikation zur Addition (nämlich darauf, dass man statt der Summe die Summanden multipliciren darf) gegründet ist. Hiernach führt die Multiplikation der genannten Grössen auf die ihrer Einheiten (e_1, e_2, ···) zurück, und aus der Betrachtung der Produkte dieſer Einheiten ergeben ſich dann verschiedene Gattungen der Multiplikation. Es gelingt nun, aus dieſen Gattungen zwei auszuſondern, auf welche ſich alle übrigen zurückführen lassen. Die eine derſelben fällt in ihren Geſetzen ganz zuſammen mit der gewöhnlichen Multiplikation in der Algebra und ist daher von mir die algebraische genannt worden. Aber ſie ist in Bezug auf die durch ſie erzeugten Grössen bei weitem die verwickeltste und kann nur durch Betrachtung der Funktionen zur vollen Klarheit gebracht werden, weshalb ich ſie auf den zweiten Abschnitt dieſes Werkes verwieſen habe. Die Bezeichnung für dieſe algebraische Multiplition muss der Natur der Sache nach mit der gewöhnlichen Bezeichnung der Multiplikation zuſammenfallen, da es widerſinnig wäre, Verknüpfungen, welche in allen Beziehungen denſelben Geſetzen unterliegen, verschieden zu bezeichnen. Die zweite jener Multiplikationen, welche im dritten Kapitel behandelt ist, zeigt ſich als die für die Ausdehnungslehre charakteriſtiſche, und ſie weſentlich weiter fördernde, indem ſie die

Hosted by Google

verschiedenen Stufen einfacher Grössen liefert, welche in der Ausdehnungslehre hervortreten. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass zwei einfache Faktoren des Produktes nur vertauscht werden dürfen, wenn man zugleich das Vorzeichen (+ —) des Produktes umkehrt. Da zwar für diese Multiplikation die Beziehung zur Addition dieselbe ist, wie bei jeder Multiplikation, aber die übrigen Gesetze derselben wesentlich von denen der gewöhnlichen Multiplikation abweichen, so war es nothwendig, sie durch die Bezeichnung zu unterscheiden. Ich habe in diesem Werke dafür die Bezeichnung durch eckige Klammern, die das Produkt umschliessen, gewählt, so dass also $[ab] = -[ba]$ ist, wenn a und b einfache Faktoren dieses Produktes sind. Es entfaltet sich dies Produkt zu einer ausserordentlichen Mannigfaltigkeit von Erscheinungsformen, und lässt in reicher Fülle Beziehungen hervor treten, welche auf alle Zweige der Mathematik ein unerwartet neues Licht werfen, so dass es den eigentlichen Mittelpunkt der neuen Wissenschaft bildet. Nachdem der Begriff der Grössen-Ergänzung hinzugekommen ist, tritt jenes Produkt in einer ganz neuen Eigenthümlichkeit, als inneres Produkt (Kap. 4) hervor, so dass es in dieser Form aus dem Bereiche der in der ersten Bearbeitung dargestellten Gegenstände ganz heraustritt. (Vergleiche jedoch die Vorrede zu jenem Werke p. XI.) Mit Anwendungen auf die Geometrie (Kap. 5) schliesst der erste Abschnitt des Werkes. In dem zweiten Abschnitte treten nun die zusammengesetzten Grössen hervor, welche wir im Ganzen als Funktionen einfacher Grössen charakterisiren können. Das erste Kapitel dieses Abschnittes behandelt die Funktionen im Allgemeinen, woran sich die algebraische Multiplikation und Division anschliesst, das zweite die Lehre von den Reihen, das dritte die Differenzialrechnung und das vierte endlich die Integralrechnung, und zwar alle diese nur in sofern als extensive Grössen in Betracht gezogen werden. Doch glaube ich, dass auch die entsprechenden Zweige der gewöhnlichen (auf Zahlgrössen sich beziehenden) Mathematik und namentlich die Integralrechnung durch diese Darstellung nicht nur wesentlich vereinfacht, sondern auch mannigfach ergänzt und weiter gefördert sind. Da der Stoff seit der ersten Bearbeitung bedeutend angewachsen ist, so habe ich die Anwendungen auf die Physik ganz weglassen müssen; doch hoffe ich, wenn mir Zeit und Kraft dazu gestattet ist, eine mathematische Bearbeitung der wichtigsten Zweige der Physik in selbstständigen Werken folgen zu lassen, in denen ich von der hier vorgetragenen Wissenschaft Anwendung machen werde. Ich habe mich eifrig bemüht, überflüssige Kunstausdrücke zu vermeiden und mich auf das möglichst geringste Maass neuer Kunstausdrücke zu beschränken; aber da man nun einmal ohne Worte nicht reden kann, und daher auch zu neuen Begriffen entweder neue Wortbildungen oder neue Wortverbindungen gebraucht, oder alten Worten ein neues Gepräge verleihen muss, so blieb doch noch eine ziemliche Menge unvermeidlicher Kunst-

Hosted by Google

ausdrücke übrig. Um dass Verständniss zu erleichtern, habe ich zunächst die Kunstausdrücke so gewählt, dass sie, wie ich hoffe, durch ihre Bildung selbst unmittelbar an den durch sie dargestellten Begriff erinnern, und dann habe ich am Schlusse ein alphabetisches Verzeichniss derselben mit Hinweisung auf die Stellen, wo sie erklärt sind, gegeben. Es bleibt mir noch übrig, auf verwandte Bestrebungen anderer Mathematiker hinzuweisen. Es beziehen sich diese fast ohne Ausnahme auf diejenigen Gegenstände, welche ich als Anwendungen der Ausdehnungslehre auf die Geometrie bezeichnet habe (also auf die §§. 24, 28—30, 37—40, 56, 74—79, 91, 92, 101, 102, 114—119, 144—148, 159—170 der Ausdehnungslehre von 1844 und auf die Nrn. 216—347 des vorliegenden Werkes). Bei der ersten Bearbeitung (1844) war mir unter den hier einschlagenden Arbeiten nur das berühmte Werk des Begründers der geometrischen Analyse: der barycentrische Calcul von Moebius, bekannt, welches die Addition der Punkte lehrte. Hingegen waren mir die Arbeiten über die geometrische Addition der Strecken (von gegebener Länge und Richtung), sowie über die Bedeutung der imaginären Grössen unbekannt geblieben. Die letztere wurde in ihrer Vollständigkeit zuerst in einer Abhandlung von Gauss (Göttinger gelehrte Anzeiger 1831) dargestellt, auf welche mich Gauss auf Veranlassung der den gleichen Gegenstand behandelnden Stelle in der Vorrede zur Ausdehnungslehre (pag. XI bis XIV) brieflich aufmerksam machte. Schon in dieser Darstellung des Imaginären lag der Begriff der geometrischen Addition von Strecken in Einer Ebene. Der erste, welcher die geometrische Addition der Strecken in ihrer ganzen Allgemeinheit gelehrt hat, scheint Bellavitis gewesen zu sein, indem er schon 1835 (Annali delle scienze de regno Lombardo-Veneto, 3⁰ volume) den hier gehörigen Calcul aufstellte (vergl. unten p. 149 Anm.) Unabhängig davon entwickelte Möbius (1843) in seiner Mechanik des Himmels die Gesetze der geometrischen Addition der Strecken und wandte sie auf die Probleme der Mechanik des Himmels an. Nach dem Erscheinen meiner Ausdehnungslehre (von 1844) mehrten sich die Arbeiten auf dem Gebiete der geometrischen Analyse. Ins Besondere waren es wieder Moebius und Bellavitis, welche die Wissenschaft wesentlich weiter förderten und auch zum Verständniss und zur weiteren Verbreitung der von mir vorgetragenen geometrischen Rechnungsmethode in bedeutender Weise beitrugen. Dazu kamen nun noch meine eigene Arbeiten über diesen Gegenstand, welche theils in meiner Schrift: „Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibnitz erfundene Charakteristik, gekrönte Preisschrift, Leipzig 1847," welche Moebius durch eine daran angeschlossene lichtvolle Darstellung den Mathematikern zugänglicher zu machen suchte, theils in Crelle's Journal (Band 36, 42, 44, 49, 52) niedergelegt sind. Ferner trat ein Jahr nach dem Erscheinen meiner linealen Ausdehnungslehre Saint-Venant mit der geometrischen Multiplikation der Strecken hervor (Comptes

Hosted by Google

rendus, Tome XXI p. 620 sq., 15. Septembre 1845), welche identisch ist mit der von mir in jenem Werke dargestellten äusseren Multiplikation der Strecken (pag. 28—40). Offenbar kannte er dies Werk nicht, und ich schickte daher 2 Exemplare desselben an Cauchy mit der Bitte, eins davon an Saint-Venant abzugeben, dessen Adresse mir unbekannt war. Späterhin veröffentlichte Cauchy in mehreren Aufsätzen, welche in den Comptes rendus von 1853 abgedruckt sind, eine Methode, um vermittelst gewisser symbolischer Grössen, welche er clefs algébriques nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in meiner Ausdehnungslehre von 1844 (§. 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Ich bin weit davon entfernt, den berühmten Mathematiker eines Plagiats beschuldigen zu wollen, doch glaubte ich es mir und der Sache schuldig zu sein, dass ich deshalb eine Prioritätsreclamation an die Pariser Akademie richtete. Allein die Commission, welcher diese Reclamation im April 1854 zur Prüfung und Berichterstattung übergeben wurde (Comptes rendus Tome 38 p. 741), hat nie etwas von sich hören lassen, und auch Cauchy hat seitdem über den Gegenstand nichts mehr veröffentlicht. Es sind die erwähnten Abhandlungen Cauchy's die einzigen, welche ausserhalb des Gebietes der Geometrie einen Berührungspunkt mit meiner Ausdehnungslehre (von 1844) darbieten. Und da auch diese Abhandlungen einen selbstständigen Ursprung beanspruchen, so scheint es, als ob der eigentliche Kern meines Werkes, abgesehen von dem geometrischen Beiwerk desselben, nirgends zu verwandten Bestrebungen angeregt habe. Und dennoch bin ich an dies neue Werk, welches das alte in sich aufnehmen und zum Abschlusse bringen sollte, mit frischem Muthe herangegangen. Denn ich bin der festen Zuversicht, dass die Arbeit, welche ich auf die hier vorgetragene Wissenschaft verwandt habe, und welche einen bedeutenden Zeitraum meines Lebens und in demselben die gespannteste Anstrengung meiner Kräfte in Anspruch genommen hat, nicht verloren sein werde. Zwar weiss ich wohl, dass die Form, die ich der Wissenschaft gegeben, eine unvollkommene ist und sein muss. Aber ich weiss auch und muss es aussprechen, auch auf die Gefahr hin, für anmaassend gehalten zu werden, — ich weiss, dass wenn auch dies Werk noch neue 17 Jahre oder länger hinaus müssig liegen bleiben sollte, ohne in die lebendige Entwickelung der Wissenschaft einzugreifen, dennoch eine Zeit kommen wird, wo es aus dem Staube der Vergessenheit hervorgezogen werden wird, und wo die darin niedergelegten Ideen ihre Frucht tragen werden. Ich weiss, dass wenn es mir auch nicht gelingt, in einer bisher vergeblich von mir ersehnten Stellung einen Kreis von Schülern um mich zu sammeln, welche ich mit jenen Ideen befruchten und zur weiteren Entwickelung und Bereicherung derselben anregen könnte, dennoch einst diese Ideen, wenn auch in veränderter Form, neu erstehen und mit der Zeitentwickelung in lebendige Wech-

Hosted by Google

ſelwirkung treten werden. Denn die Wahrheit ist ewig, ist göttlich; und keine Entwickelungsphaſe der Wahrheit, wie geringe auch das Gebiet ſei, was ſie umfasst, kann spurlos vorübergehen; ſie bleibt bestehen, wenn auch das Gewand, in welches schwache Menschen ſie kleiden, in Staub zerfällt.

Stettin, den 29. August 1861.

Hosted by Google

Inhalt.

	No.	pag.
Erster Abschnitt. Die einfachen Verknüpfungen extenſiver Grössen		1
Kap. 1. Addition, Subtraktion, Vielfachung und Theilung extenſiver Grössen		1
§. 1. Begriffe und Rechnungsgeſetze	1	
§. 2. Zuſammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen	14	
§. 3. Erſetzung durch Zahlgleichungen; die Zahl als Quotient	27	
Kap. 2. Die Produktbildung im Allgemeinen		20
§. 1. Produkt zweier Grössen	37	
§. 2. Produkt mehrerer Grössen	43	
§. 3. Die verschiedenen Arten der Produktbildung	48	
Kap. 3. Kombinatorisches Produkt		31
§. 1. Allgemeine Geſetze der kombinatorischen Multiplikation	52	
§. 2. Das kombinatorische Produkt als Grösse	69	
§. 3. Aeussere Multiplikation von Grössen höherer Stufe	78	
§. 4. Ergänzung der Grössen	86	
§. 5. Produkt in Bezug auf ein Hauptgebiet	94	
§. 6. Vertauschung der Faktoren und Auflöſung der Klammern	114	
§. 7. Zurückleitung und Erſetzung	127	
§. 8. Elimination der Unbekannten aus algebraischen Gleichungen	134	
Kap. 4. Inneres Produkt		107
§. 1. Grundgeſetze der inneren Multiplikation	137	
§. 2. Begriff des Normalen und ſeine Correlaten	151	
§. 3. Geſetze der inneren Multiplikation, an den Begriff des Normalen geknüpft	164	
§. 4. Inneres Produkt zweier Grössen erster Stufe	188	
§. 5. Einführung der Winkel	195	

Hosted by Google

	No.	pag.
Kap. 5. Anwendung auf die Geometrie		142
§. 1. Addition u. f. w. von Punkten und Strecken	216	
§. 2. Räumliche Gebiete	228	
§. 3. Kombinatorische Multiplikation der Punkte	239	
§. 4. Addition von Linien und Flächen	272	
§. 5. Planimetrische u. stereometrische Multiplikation	287	
§. 6. Gleich Null gesetztes planimetrisches Produkt, ebene Kurven	306	
§. 7. Innere Multiplikation in der Geometrie	330	
Zweiter Abschnitt. Funktionenlehre		223
Kap. 1. Funktionen im Allgemeinen		223
§. 1. Reduktion auf eine Variable	348	
§. 2. Ganze Funktionen und Darstellung derselben durch lückenhaltige Produkte	353	
§. 3. Algebraische Multiplikation	364	
§. 4. Ganze Funktionen ersten Grades und Darstellung derselben als Quotienten	377	
§. 5. Die Funktionen als extensive Grössen	392	
§. 6. Verwandtschaften von dem Gesichtspunkte der Funktionsverknüpfung aus betrachtet	401	
§. 7. Normale Einheiten und Stetigkeit der Funktionen	410	
Kap. 2. Differenzialrechnung		293
§. 1. Differenzial erster Ordnung	428	
§. 2. Differenzialquotient erster Ordnung	435	
§. 3. Differenziale höherer Ordnung	443	
Kap. 3. Unendliche Reihen		309
§. 1. Unendliche Reihen im Allgemeinen	454	
§. 2. Die Reihen als Funktionen einer Zahlgrösse	460	
§. 3. Entwickelung der Funktion einer extensiven Grösse in Reihen	468	
Kap. 4. Integralrechnung		328
§. 1. Integration von Differenzialausdrücken	471	
§. 2. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine Zahlgrösse ist	491	
§. 3. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine extensive Grösse ist	500	

Hosted by Google

Erster Abschnitt.

Die einfachen Verknüpfungen extensiver Größen.

Kap. 1. Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung extensiver Größen.

§. 1. Begriffe und Rechnungsgesetze.

1. Erklärung. Ich sage, eine Grösse a sei aus den Grössen b, c, $\cdots$ durch die Zahlen $\beta, \gamma, \cdots$ abgeleitet, wenn

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

ist, wo $\beta, \gamma, \cdots$ reelle Zahlen sind, gleichviel ob rational oder irrational, ob gleich null oder verschieden von null. Auch sage ich, a sei in diesem Falle numerisch abgeleitet aus b, c, $\cdots$

2. Erklärung. Ferner sage ich, dass zwei oder mehrere Grössen a, b, c $\cdots$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, oder dass der Verein der Grössen a, b, c, $\cdots$ einer Zahlbeziehung unterliege, wenn irgend eine derselben sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, also wenn sich z. B.

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

setzen lässt, wo $\beta, \gamma, \cdots$ reelle Zahlen sind. Besteht der Verein nur aus Einer Grösse a, so soll nur in dem Falle gesagt werden, der Verein unterliege einer Zahlbeziehung, wenn $a = o$ ist. Wenn zwei Grössen a und b, von denen keine null ist, in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so bezeichne ich dies durch

$$a \equiv b,$$

und sage a sei kongruent b.

Hosted by Google

Anmerkung. Zwei reelle Zahlen stehen also immer, zwei verschieden benannte Grössen stehen nie in einer Zahlbeziehung zu einander. Null ist aus jeder Grössenreihe numerisch ableitbar, nämlich durch die Zahlen o, o,··· Mehrere Grössen also, unter denen eine null ist, stehen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.

Das Zeichen ($\equiv$) ist in ähnlichem Sinne von Möbius (in seinem barycentrischen Calcül) gebraucht. Die Benennung (kongruent) gründet sich auf geometrische Betrachtungen. Zur Bezeichnung abstrakter Beziehungen ist sie von Gauss gebraucht.

3. Erklärung. Einheit nenne ich jede Grösse, welche dazu dienen soll, um aus ihr eine Reihe von Grössen numerisch abzuleiten, und zwar nenne ich die Einheit eine ursprüngliche, wenn sie nicht aus einer anderen Einheit abgeleitet ist. Die Einheit der Zahlen, also die Eins, nenne ich die absolute Einheit, alle übrigen relative. Null soll nie als Einheit gelten.

4. Erklärung. Ein System von Einheiten nenne ich jeden Verein von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche dazu dienen sollen, um aus ihnen durch beliebige Zahlen andere Grössen abzuleiten.

Anmerk. Hierher gehört auch der Fall, wo der Verein nur aus einer Einheit besteht (die jedoch nach Nr. 3 nicht null sein darf).

5. Erklärung. Extensive Grösse nenne ich jeden Ausdruck, welcher aus einem Systeme von Einheiten (welches sich jedoch nicht auf die absolute Einheit beschränkt) durch Zahlen abgeleitet ist, und zwar nenne ich diese Zahlen die zu den Einheiten gehörigen Ableitungszahlen jener Grösse; z. B. ist das Polynom

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots, \text{ oder } \sum \alpha e \text{ oder } \sum \alpha_r e_r$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ reelle Zahlen sind, und $e_1, e_2, \cdots$ ein System von Einheiten bilden, eine extensive Grösse, und zwar ist dieselbe aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die zugehörigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ abgeleitet. Nur wenn das System blos aus der absoluten Einheit (1) besteht, ist die abgeleitete Grösse keine extensive, sondern eine Zahlgrösse. Den Ausdruck Grösse überhaupt werde ich nur für diese beiden Gattungen derselben festhalten. Wenn die extensive Grösse aus den ursprünglichen Einheiten abgeleitet werden kann, so nenne ich jene Grösse eine extensive Grösse erster Stufe.

Hosted by Google

Anmerk. Aus der Elementarmathematik setzen wir die Rechnungsgesetze für Zahlen, und auch für die sogenannten „benannten Zahlen“, d. h. für die aus Einer Einheit abgeleiteten extensiven Grössen voraus; jedoch nur für den Fall, dass jene Einheit eine ursprüngliche ist.

6. Erklärung. Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha + \beta)\, e}$$

7. Erklärung. Eine extensive Grösse von einer andern, aus demselben Systeme von Einheiten abgeleiteten subtrahiren, heisst die Ableitungszahlen der ersteren von den zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen der letzteren subtrahiren, d. h.

$$\sum \overline{\alpha e} - \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha - \beta) e}$$

Anmerk. In Bezug auf die Klammerbezeichnung halte ich die Bestimmung fest, dass ein ohne Klammern geschriebenes Polynom oder Produkt aus mehreren Faktoren gleichbedeutend ist dem mit Klammern geschriebenen Ausdruck, in welchem alle Klammern gleich zu Anfang eintreten, also $a + b + c = (a + b) + c$, $abc = (ab)\, c$ u. s. w.

8. Erklärung. Für extensive Grössen a, b, c gelten die Fundamentalformeln:

1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = a + b + c$,
3) $a + b - b = a$,
4) $a - b + b = a$.

Beweis. Es sei $a = \sum \overline{\alpha e}$, $b = \sum \overline{\beta e}$, $c = \sum \overline{\gamma e}$, so ist

1) $a + b = \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} = \sum \overline{(\alpha + \beta) e}$ [nach 6].
$= \sum \overline{(\beta + \alpha) e} = \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\alpha e}$ [6].
$= b + a.$

2) $a + (b + c) = \sum \overline{\alpha e} + (\sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\gamma e})$
$= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{(\beta + \gamma) e}$ [6].
$= \sum \overline{(\alpha + (\beta + \gamma))\, e}$ [6].
$= \sum \overline{(a + \beta + \gamma)\, e}$
$= \sum \overline{(\alpha + \beta) e} + \sum \overline{\gamma e}$ [6].
$= \sum \overline{\alpha e} + \sum \overline{\beta e} + \sum \overline{\gamma e}$ [6].
$= a + b + c$

*

Hosted by Google

$$3)\ a + b - b = \sum\overline{\alpha e} + \sum\overline{\beta e} - \sum\overline{\beta e}$$
$$= \sum\overline{(\alpha + \beta)e} - \sum\overline{\beta e} \qquad [6].$$
$$= \sum\overline{(\alpha + \beta - \beta)e} \qquad [7].$$
$$= \sum\overline{\alpha e} = a$$
$$4)\ a - b + b = \sum\overline{\alpha e} - \sum\overline{\beta e} + \sum\overline{\beta e}$$
$$= \sum\overline{(\alpha - \beta)e} + \sum\overline{\beta e} \qquad [7].$$
$$= \sum\overline{(\alpha - \beta + \beta)e} \qquad [6].$$
$$= \sum\overline{\alpha e} = a$$

9. Für extensive Grössen gelten die sämmtlichen Gesetze algebraischer Addition und Subtraktion.

Beweis. Denn diese Gesetze können, wie bekannt, aus den 4 Fundamentalformeln in No. 8 abgeleitet werden.

10. Erklärung. Eine extensive Grösse mit einer Zahl multipliciren heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen mit dieser Zahl multipliciren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha e} \cdot \beta = \beta \cdot \sum\overline{\alpha e} = \sum\overline{(\alpha\beta) \cdot e}$$

11. Erklärung. Eine extensive Grösse durch eine Zahl, die nicht gleich null ist, dividiren, heisst ihre sämmtlichen Ableitungszahlen durch diese Zahl dividiren, d. h.

$$\sum\overline{\alpha e} : \beta = \sum\overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$$

12. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:

1) $a\beta = \beta a$,
2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a\,(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a \cdot 1 = a$,
6) $a\beta = 0$ dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, oder $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a\,\frac{1}{\beta}$, wenn $\beta \gtrless 0$ ist *).

Beweis. Es sei $a = \sum\overline{\alpha e}$, $b = \sum\overline{\beta e}$, wo die Summe sich auf das System der Einheiten $e_1 \ldots e_n$ bezieht, so ist

*) Das Zeichen $\gtrless$ zusammengesetzt aus $\triangledown$ und $\angle$ soll ungleich bedeuten.

Hosted by Google

1) $a\beta = \beta a$ nach der Definition [s. Formel in No. 10].

2) $a\beta\gamma = \sum\overline{\alpha e}\ \beta\gamma = \sum\overline{(\alpha\beta)e}\ \gamma$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\beta\gamma)e}$ [10].
$= \sum\overline{\alpha(\beta\gamma)\cdot e} = \sum\overline{\alpha e}\ (\beta\gamma)$ [10].
$= a(\beta\gamma)$

3) $(a+b)\gamma = \left(\sum\overline{\alpha e} + \sum\overline{\beta e}\right)\gamma = \sum\overline{(\alpha+\beta)e}\ \gamma$ [6].
$= \sum\overline{(\alpha+\beta)\gamma\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\gamma+\beta\gamma)\cdot e} = \sum\overline{(\alpha\gamma)e} + \sum\overline{(\beta\gamma)e}$ [6].
$= \sum\overline{\alpha e}\cdot\gamma + \sum\overline{\beta e}\cdot\gamma$ [10].
$= a\gamma + b\gamma$

4) $a(\beta+\gamma) = \sum\overline{\alpha e}(\beta+\gamma) = \sum\overline{\alpha(\beta+\gamma)\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{(\alpha\beta+\alpha\gamma)e} = \sum\overline{\alpha\beta\cdot e} + \sum\overline{\alpha\gamma\cdot e}$ [6].
$= \sum\overline{\alpha e}\cdot\beta + \sum\overline{\alpha e}\cdot\gamma$ [10].
$= a\beta + a\gamma$

5) $a\cdot 1 = \sum\overline{\alpha e}\cdot 1 = \sum\overline{\alpha e}$ [10].
$= a$

6) a) wenn $a = 0$ ist, so ist
$a\beta = 0\cdot\beta = 0$

b) wenn $\beta = 0$ ist, so ist
$a\beta = a\cdot 0 = \sum\overline{\alpha e}\cdot 0 = \sum\overline{0\cdot e}$ [10].
$= \sum\overline{0}$ [5. Anm.]
$= 0$

c) wenn $a\beta = 0$, so hat man
$0 = a\beta = \sum\overline{\alpha e}\ \beta = \sum\overline{\alpha\beta\cdot e}$ [10].

Hieraus folgt nun, dass alle Podukte $\alpha\beta$ d. h. $\alpha_1\beta$, $\alpha_2\beta$, $\cdots\ \alpha_n\beta$ null sein müssen. Denn gesetzt, es wäre eins derselben, z. B. $\alpha_1\beta$ nicht null, so hätte man aus der Gleichung

$$0 = \alpha_1\beta\ e_1 + \alpha_2\beta e_2 + \cdots\cdots\alpha_n\beta\ e_n$$

durch Mult. mit $\frac{1}{\alpha_1\beta}$ die Gleichung

$$0 = e_1 + \frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}e_2 + \cdots\frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}\ e_n \text{ oder}$$

$$e_1 = \left(-\frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n\beta}{\alpha_1\beta}\right)e_n$$

d. h. e_1 wäre aus $e_2\cdots e_n$ numerisch ableitbar, oder zwischen den Einheiten $e_1\cdots e_n$ bestände eine Zahlbeziehung,

Hosted by Google

was gegen die Annahme ist, da $e_1, e_2, \cdots e_n$ ein System von Einheiten bilden sollen. Somit ist

$$0 = \alpha_1\beta = \alpha_2\beta = \cdots \alpha_n\beta,$$

also entweder $\beta = 0$, oder wenn $\beta \gtrless 0$ ist,

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n$$

also $a = \sum \overline{\alpha e} = \sum \overline{0e} = \sum \overline{0}$ [5. Anm.]
$= 0$

d. h. wenn $a\beta = 0$ ist, so muss entweder β oder a gleich null sein.

7) $a : \beta = \sum \overline{\alpha e} : \beta = \sum \overline{\frac{\alpha}{\beta} e}$ [11], da β nicht null ist.

$= \sum \overline{\left(\alpha \frac{1}{\beta}\right) \cdot e} = \sum \overline{\alpha e} \frac{1}{\beta}$ [10].

$= a \frac{1}{\beta}$

13. Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen durch Zahlen gelten die algebraischen Gesetze der Multiplikation und Division.

Beweis. Denn aus den Fundamentalformeln (1 bis 6) des vorhergehenden Satzes folgen in bekannter Weise die sämmtlichen algebraischen Gesetze der Multiplikation, und durch Formel (7) desselben Satzes wird die Division, ebenso wie in der Algebra, auf die Multiplikation zurückgeführt. Also gelten auch die algebraischen Gesetze der Division für die Division extensiver Grössen durch Zahlen.

§. 2. Zusammenhang zwischen den aus einem System von Einheiten ableitbaren Grössen.

14. Erklärung. Die Gesammtheit der Grössen, welche aus einer Reihe von Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ numerisch ableitbar sind, nenne ich das aus jenen Grössen ableitbare Gebiet (das Gebiet der Grössen $a_1, \cdots a_n$), und zwar nenne ich es ein Gebiet n-ter Stufe, wenn jene Grössen von erster Stufe (d. h. aus n ursprünglichen Einheiten numerisch ableitbar) sind, und sich das Gebiet nicht aus weniger als n solchen Grössen ableiten lässt. Ein Gebiet, welches ausser der Null keine Grösse enthält, heisst ein Gebiet nullter Stufe.

Hosted by Google

Anmerk. Das Gebiet erster Stufe ist also die Gesammtheit der Vielfachen einer Grösse erster Stufe, wenn man nämlich unter Vielfachem einer Grösse jedes Produkt der Grösse mit einer reellen Zahlgrösse versteht.

15. Erklärung. Zwei Gebiete heissen identisch, wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten ist und umgekehrt. Wenn jede Grösse eines Gebietes (A) zugleich Grösse eines andern (B) ist (ohne dass das Umgekehrte nothwendig stattfindet), so nenne ich beide Gebiete einander incident, und sage dann, das erste Gebiet (A) sei dem zweiten untergeordnet, das zweite dem ersten übergeordnet. Die Gesammtheit der Grössen, welche zweien oder mehreren Gebieten zugleich angehören, heisst ihr gemeinschaftliches Gebiet, und die Gesammtheit der Grössen, welche sich aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete numerisch ableiten lassen, ihr verbindendes Gebiet.

Anmerk. Ist z. B. das Gebiet A aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 abgeleitet und das Gebiet B aus den Einheiten e_2, e_3, e_4, so ist das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet das aus den Einheiten e_2, e_3 abgeleitete, und das A und B verbindende Gebiet das aus den Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4 abgeleitete.

16. Erklärung. Zwischen n Grössen $a_1, \cdots a_n$ herrscht dann und nur dann eine Zahlbeziehung, wenn sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind.

Beweis. Denn wenn in der Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

auch nur Eine der Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ von null verschieden ist, z. B. α_1, so ist die mit dieser Zahl verbundene Grösse a_1 aus den übrigen numerisch ableitbar; denn dann ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{a_1} a_n.$$

Umgekehrt, wenn irgend eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_n$ herrscht, z. B.

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots \beta_n a_n$$

so wird

$$-a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \cdots + \beta_n a_n = 0,$$

Hosted by Google

eine Gleichung, in welcher wenigstens der Koefficient von a_1 ungleich null ist.

17. Wenn n Grössen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und sie nicht alle null sind, so muss sich aus ihnen ein Verein von weniger als n Grössen aussondern lassen, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus dem die übrigen Grössen numerisch ableitbar sind.

Beweis. Es seien $a_1 \cdots a_n$ die in einer Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, so muss [nach No. 2] sich eine derselben aus den übrigen numerisch ableiten lassen; dies sei a_n und sei etwa

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{n-1}$ abermals eine Zahlbeziehung, so wird wieder eine derselben etwa a_{n-1} aus den übrigen $a_1, \cdots a_{n-2}$ numerisch ableitbar sein müssen. Es sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \cdots \beta_{n-2} a_{n-2}.$$

Führt man diesen Ausdruck für a_{n-1} in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1}\beta_1) a_1 + \cdots + (a_{n-2} + \alpha_{n-1}\beta_{n-2}) a_{n-2},$$

also ist dann auch a_n aus $a_1, \cdots a_{n-2}$ numerisch ableitbar.

Dies Verfahren wird man fortsetzen können, so lange als noch zwischen den jedesmal übrig bleibenden Grössen eine Zahlbeziehung stattfindet. Man wird also zuletzt entweder zu einer Schaar von mehreren Grössen kommen, die in keiner Zahlbeziehung mehr zu einander stehen, und aus denen die übrigen numerisch ableitbar sind, oder es bleibt zuletzt nur Eine Grösse, etwa a_1, übrig, aus der alle übrigen numerisch ableitbar sind. Im letztern Falle darf diese Eine Grösse a_1 nicht null sein, weil sonst alle übrigen Grössen, als numerisch daraus ableitbar, auch null sein würden, was der Annahme widerstreitet. In beiden Fällen gelangt man also (No. 2) zu einem Vereine, der keiner Zahlbeziehung mehr unterliegt und aus dem alle übrigen der n Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar sind.

18. Erklärung. Wenn in einem Verein von Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ die erste a_1 nicht null ist, und keine der fol-

Hosted by Google

genden ſich aus den vorhergehenden numerisch ableiten lässt, ſo unterliegt der Verein keiner Zahlbeziehung.

Beweis. Denn geſetzt, er unterliege einer Zahlbeziehung, ſo müsste (nach 16) zwischen den Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_n a_n = 0$$

aufgestellt werden können, in welcher nicht alle Koefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ zugleich null ſind. Es ſei α_r der letzte unter dieſen Koefficienten, welcher von null verschieden ist, ſo erhält man

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_r a_r = 0,$$

alſo, wenn r grösser als 1 ist,

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1},$$

d. h. a_r ist aus den vorhergehenden Grössen $a_1 \cdots a_{n-1}$ numerisch ableitbar, gegen die Vorausſetzung. Ist aber $r = 1$, ſo hat man

$$\alpha_1 a_1 = 0;$$

alſo, da dann α_1 ungleich null angenommen ist,

$$a_1 = 0,$$

was gleichfalls der Vorausſetzung widerstreitet. Alſo kann keine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_n$ herrschen.

19. Wenn eine Grösse a_1 aus n Grössen $b_1, b_2 \cdots b_n$ numerisch ableitbar ist, und dabei die zu b_1 gehörige Ableitungszahl ungleich null ist, ſo ist das aus den n Grössen $b_1, b_2 \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch mit dem aus den n Grössen $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren.

Beweis. Es ſei $a_1 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots \beta_n b_n$, wo β_1 ungleich null ist, ſo ist

$$b_1 = \frac{1}{\beta_1} a_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} b_2 \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_1} b_n.$$

Ist nun c numerisch ableitbar aus $b_1, b_2, \cdots b_n$, etwa

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_n b_n,$$

ſo erhält man c als aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ abgeleitet, indem man hier statt b_1 den gefundenen Werth ſetzt, nämlich

$$c = \frac{\gamma_1}{\beta_1} a_1 + \left(\gamma_2 - \frac{\gamma_1 \beta_2}{\beta_1}\right) b_2 + \cdots + \left(\gamma_n - \frac{\gamma_1 \beta_n}{\beta_1}\right) b_n.$$

Hosted by Google

Umgekehrt ist c numerisch ableitbar aus $a_1, b_2, \cdots b_n$, etwa

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

so erhält man c als aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ abgeleitet, indem man statt a_1 seinen Werth $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots \beta_n b_n$ setzt, nämlich

$$c = \alpha_1\beta_1 b_1 + (\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) b_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_1\beta_n) b_n.$$

Also, jede Grösse, die einem der beiden Gebiete angehört, gehört auch dem andern an, d. h. beide Gebiete sind identisch.

20. Wenn m Grössen $a_1, \cdots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n Grössen $b_1, \cdots b_n$, numerisch ableitbar sind, so kann man stets zu den m Grössen $a_1, \cdots a_m$ noch (n-m) Grössen $a_{m+1}, \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass sich die Grössen $b_1, \cdots b_n$ auch aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen, und also das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch ist dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$; auch kann man jene (n-m) Grössen aus den Grössen $b_1 \cdots b_n$ selbst entnehmen.

Beweis. Nach der Annahme ist a_1 aus $b_1 \cdots b_n$ ableitbar. Von den Zahlen, durch welche diese Ableitung erfolgt, muss mindestens Eine von null verschieden sein, weil sonst a_1 selbst null wäre, also der Verein der m Grössen (nach 2) einer Zahlbeziehung unterläge.

Es sei die zu b_1 gehörige Zahl von null verschieden, und dies wird man immer annehmen können, da man ja die Indices beliebig wählen kann. Dann ist nach 19 das aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren. Man habe nun für irgend ein r, welches $< m$ ist, gefunden, dass das Gebiet der Grössen $b_1, b_2, \cdots b_n$ identisch sei dem Gebiete der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1}, \cdots b_n$, so wird nun, da nach der Hypothesis a_{r+1} aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbar ist, es auch (vermöge der Gebiets-Identität) aus $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableitbar sein. In dem Ausdrucke dieser Ableitung $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots \beta_n b_n$ muss nothwendig einer der Koefficienten, die zu $b_{r+1}, \cdots b_n$ gehören, von null verschieden sein, weil sonst zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{r+1}$ eine Zahlbeziehung stattfände, gegen die Hypothesis; es sei dies etwa β_{r+1}, so ist, nach 19, das aus $a_1, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableit-

Hosted by Google

bare Gebiet identisch dem aus $a_1, \cdots a_{r+1}, b_{r+2} \cdots b_n$ ableitbaren; alſo auch dies letztere Gebiet identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$. Dieſen Schluss kann man alſo von $r = 1$ an verfolgen, bis $r = m$ wird; d. h. es wird dann das Gebiet $a_1 \cdots a_m b_{m+1} \cdots b_n$ identisch dem Gebiete $b_1 \cdots b_n$; und bezeichnet man dann die ſo übrig gebliebenen Grössen $b_{m+1}, \cdots b_n$ beziehlich mit $a_{m+1}, \cdots a_n$, ſo wird das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$.

21. Wenn n Grössen $(a_1, \cdots a_n)$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n andern Grössen $(b_1, \cdots b_n)$ numerisch ableitbar ſind, ſo ist das Gebiet der ersten Grössenreihe identisch dem der letzteren.

Beweis. Man hat nur in dem vorhergehenden Satze $m = n$ zu ſetzen, ſo erfolgt der zu erweiſende Satz.

22. Wenn n Grössen $(a_1, \cdots a_n)$ aus weniger als n Grössen $(b_1, \cdots b_m)$ numerisch ableitbar ſind, ſo stehen jene n Grössen stets in einer Zahlbeziehung zu einander.

Beweis. Es ſeien $a_1, \cdots a_n$ aus $b_1 \cdots b_m$ ableitbar, wo $m < n$ ist. Nun können $a_1 \cdots a_m$ entweder in einer Zahlbeziehung zu einander stehen oder nicht. Im ersteren Falle stehen auch $a_1, \cdots a_n$, da unter ihnen die Grössen $a_1, \cdots a_m$ vorkommen, in einer Zahlbeziehung zu einander. Im zweiten Falle ist das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_m$ (nach 21) identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_m$, alſo ist jede aus $b_1, \cdots b_m$ numerisch ableitbare Grösse auch aus $a_1, \cdots a_m$ numerisch ableitbar, alſo ſind namentlich die Grössen $a_{m+1}, \cdots a_n$, welche nach der Hypotheſis aus $b_1, \cdots b_m$ ableitbar ſind, auch aus $a_1, \cdots a_m$ ableitbar, d. h. auch im zweiten Falle besteht zwischen $a_1 \cdots a_n$ eine Zahlbeziehung.

23. Wenn ein Gebiet n-ter Stufe aus n Grössen erster Stufe ableitbar ist, ſo stehen dieſe in keiner Zahlbeziehung zu einander, und umgekehrt: Wenn n Grössen erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, ſo ist das aus ihnen ableitbare Gebiet ein Gebiet n-ter Stufe.

Beweis. Es ſei A das aus den n Grössen erster Stufe

Hosted by Google

$a_1 \cdots a_n$ ableitbare Gebiet. Wenn nun zuerst A ein Gebiet n-ter Stufe ist, fo können $a_1 \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen; denn dann würde ſich eine dieſer Grössen aus den übrigen $n-1$ numerisch ableiten lassen, alſo auch das Gebiet aus dieſen $n-1$ Grössen ableitbar ſein, was dem Begriffe des Gebietes n-ter Stufe [nach 14] widerſtreitet. Zweitens umgekehrt, wenn $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, ſo können ſie [nach 22] nicht aus weniger als n Grössen numerisch abgeleitet werden, alſo auch das aus $a_1, \cdots a_n$ ableitbare Gebiet nicht, alſo iſt dies Gebiet [nach 14] von n-ter Stufe.

24. Jedes Gebiet n-ter Stufe kann aus n Grössen erſter Stufe, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, abgeleitet werden, und zwar aus beliebigen n ſolcher Grössen des Gebietes.

Beweis. Denn es ſeien $a_1, \cdots a_n$ die Grössen, aus denen urſprünglich das betrachtete Gebiet hervorgegangen iſt, und ſeien $b_1, \cdots b_n$ n Grössen dieſes Gebietes, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen. Da $b_1, \cdots b_n$ dem aus $a_1, \cdots a_n$ abgeleiteten Gebiete angehören, ſo werden ſich [nach 14] die Grössen $b_1 \cdots b_n$ aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen, und da zugleich jene Grössen $b_1 \cdots b_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen [Vorausſetzung], ſo wird [nach 21] das aus $b_1 \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1 \cdots a_n$ ableitbaren.

Anmerk. Durch dieſen Satz iſt jeder ſpecifiſche Unterſchied zwiſchen den urſprünglichen Einheiten und den daraus numerisch abgeleiteten Grössen aufgehoben, indem man jedes Gebiet, ſtatt aus den urſprünglich zu Grunde gelegten n Einheiten, auch aus beliebigen n Grössen dieſes Gebietes, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, ableiten, und dieſe Grössen alſo ſtatt jener erſteren als Einheiten ſetzen kann. Es hätte ſich dieſer wichtige Satz auch direkt aus der Theorie der Elimination ableiten lassen. In der That iſt unſer Satz nur eine Transformation des Satzes: Wenn n Grössen $y_1 \cdots y_n$ ganze homogene Funktionen erſten Grades von n anderen $x_1 \cdots x_n$ ſind, und die erſteren in keinem anderen Falle alle zugleich null werden können, als wenn auch die letzteren alle null werden, ſo lassen ſich auch die letzteren $(x_1 \cdots x_n)$ als ganze homogene Funktionen erſten Grades von den erſteren $(y_1 \cdots y_n)$ darſtellen.

Hosted by Google

Doch ist der hier gelieferte Beweis nicht nur elementarer, sondern hat auch den Vorzug, dass dabei die wesentlichsten einfachen Beziehungen zwischen den extensiven Grössen klarer hervortreten.

25. Die Stufenzahlen zweier Gebiete sind zusammengenommen ebenso gross als die Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes zusammengenommen, d. h. wenn m und n die Stufenzahlen der gegebenen Gebiete sind, r die ihres gemeinschaftlichen, v die ihres verbindenden Gebietes, so ist

$$m + n = r + v.$$

Beweis. Es seien A und B die beiden gegebenen Gebiete m-ter und n-ter Stufe, und sei A aus den Grössen $a_1 \cdots a_m$, B aus den Grössen $b_1 \cdots b_n$ ableitbar. Dann kann [nach 23] weder zwischen $a_1 \cdots a_m$, noch zwischen $b_1 \cdots b_n$ eine Zahlbeziehung herrschen. Ferner möge sich ein Verein von r, aber auch nicht von mehr, Grössen finden lassen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und welche beiden Gebieten zugleich angehören. Diese Annahme wird immer zulässig sein, da r auch null sein darf. Es seien $c_1 \cdots c_r$ diese Grössen. Dann wird man [nach 20] in die Reihe der Grössen $a_1 \cdots a_m$ statt r derselben, etwa statt $a_1 \cdots a_r$ die Grössen $c_1 \cdots c_r$ in der Art einführen können, dass das aus dieser neuen Grössenreihe ableitbare Gebiet identisch sei dem Gebiete A. Ebenso wird man in die Reihe der Grössen $b_1 \cdots b_n$ statt r derselben, etwa statt $b_1 \cdots b_r$ die Grössen $c_1 \cdots c_r$ in der Art einführen können, dass das aus dieser neuen Grössenreihe ableitbare Gebiet dem Gebiete B identisch sei. Dann ist also A aus den m Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$ ableitbar, und B aus den n Grössen $c_1 \cdots c_r$, $b_{r+1} \cdots b_n$. Keine dieser Grössenreihen unterliegt [nach 23] einer Zahlbeziehung. Dann ist klar, dass alle aus $c_1 \cdots c_r$ ableitbaren Grössen den Gebieten A und B gemeinschaftlich sind; aber auch keine andern, da es sonst, wider die Annahme, mehr als r in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen geben würde, die beiden Gebieten A und B gemeinschaftlich wären. Das den Gebieten A und B gemeinschaftliche Gebiet ist also das aus $c_1 \cdots c_r$ abgeleitete Gebiet, also [nach 23] ein

Hosted by Google

Gebiet r-ter Stufe. Nun bilden ferner alle Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$, $b_{r+1} \cdots b_n$ eine Reihe von Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Denn gesetzt, es herrschte zwischen ihnen eine Zahlbeziehung, so müsste diese von der Form

$$a + b + c = 0$$

sein, wo a aus $a_{r+1} \cdots a_m$, b aus $b_{r+1} \cdots b_n$, c aus $c_1 \cdots c_r$ abgeleitet ist. Hier können weder a noch b null sein. Denn wäre a null, so wäre $b + c = 0$, und es bestände also eine Zahlbeziehung zwischen den Grössen $b_{r+1} \cdots b_n$, $c_1 \cdots c_r$, was, wie bewiesen, unmöglich ist; und wäre b null, so bestände eine Zahlbeziehung zwischen $a_{r+1} \cdots a_m$, $c_1 \cdots c_r$, was gleichfalls als unmöglich nachgewiesen ist. Stellen wir die obige Gleichung in der Form dar

$$a = -b - c,$$

so ist die linke Seite aus $a_{r+1} \cdots a_m$ numerisch abgeleitet, gehört also dem Gebiete A an, die rechte Seite ist aus $b_{r+1} \cdots b_n$, $c_1 \cdots c_r$ numerisch abgeleitet, gehört also dem Gebiete B an, folglich gehört a dann beiden Gebieten zugleich an. Da aber a aus $a_{r+1} \cdots a_m$ numerisch abgeleitet ist, und zwischen $a_{r+1} \cdots a_m$, $c_1 \cdots c_r$ keine Zahlbeziehung herrscht (wie oben gezeigt wurde), so ist a nicht aus $c_1 \cdots c_r$ ableitbar. Also würden dann die Gebiete A und B mehr als r in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen gemeinschaftlich haben, was gegen die Voraussetzung ist. Somit folgt, dass der ganze Verein der Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$, $b_{r+1} \cdots b_n$ keiner Zahlbeziehung unterliegt. Das aus diesen Grössen ableitbare Gebiet besteht aber aus den sämmtlichen Grössen, welche sich aus den Grössen der Gebiete A und B ableiten lassen, d. h. ist ihr verbindendes Gebiet. Die Stufenzahl desselben sei v, so ist [nach 22] v gleich der Anzahl der Grössen $c_1 \cdots c_r$, $a_{r+1} \cdots a_m$, $b_{r+1} \cdots b_n$, d. h.

$$v = m + n - r, \text{ oder}$$
$$m + n = r + v.$$

26. Zwei Gebiete (A und B), welche beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind und in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, haben, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, mindestens ein Gebiet von $(\alpha + \beta - n)$-ter Stufe gemein.

Hosted by Google

Beweis. Das A und B verbindende Gebiet sei von v-ter Stufe, das ihnen gemeinschaftliche von r-ter Stufe, so ist [nach 25]

$$\alpha + \beta = r + v, \text{ oder } r = \alpha + \beta - v,$$

d. h. Da A und B in einem Gebiete n-ter Stufe liegen, so liegt auch ihr verbindendes Gebiet in diesem Gebiete n-ter Stufe, also ist v entweder ebenso gross oder kleiner als n, also $r = \alpha + \beta - v$ entweder ebenso gross als $\alpha + \beta - n$ oder grösser.

Anmerk. Die bisher entwickelten Sätze finden sich schon, wenn gleich meist in anderen Formen, in meiner ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre vom Jahre 1844, und zwar Satz 18 und 23 sind genau in der entsprechenden Form in §. 20 jenes Werkes, Satz 24 in §. 126 enthalten, und auch die Idee des Beweises für diese Sätze ist hier und dort dieselbe.

§. 3. Die Zahl als Quotient extensiver Grössen und Ersetzung der Gleichungen zwischen extensiven Grössen durch Zahlgleichungen.

27. Erklärung. Ich nenne zwei Vereine von Gleichungen einander ersetzend, wenn sich jeder von beiden Vereinen aus dem andern ableiten lässt.

Anmerk. Hierbei ist auch der Fall eingeschlossen, in welchem einer der beiden Vereine oder jeder von beiden nur aus einer Gleichung besteht.

28. Eine Grösse x, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1 \cdots a_n$ abgeleitet ist, ist dann und nur dann null, wenn ihre n Ableitungszahlen null sind, d. h. die Gleichung

$$(a) \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = 0$$

wird ersetzt durch die n Gleichungen:

$$(b) \quad 0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Beweis. Denn wäre irgend eine der Ableitungszahlen von null verschieden, so würde vermöge der Gleichung (a) nach 16 zwischen $a_1 \cdots a_n$ eine Zahlbeziehung herrschen, gegen die Annahme. Gilt also die Gleichung (a), so gilt auch der Gleichungsverein (b). Umgekehrt, gilt der letzte Verein, so folgt daraus die Gleichung (a). Also wird diese Gleichung durch jenen Verein ersetzt.

Hosted by Google

29. Zwei Grössen eines Gebietes n-ter Stufe sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre n zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen einander gleich sind, d. h. die Gleichung

(a) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots \beta_n e_n$

wird ersetzt durch die n Gleichungen

(b) $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n = \beta_n.$

Beweis. Denn die Gleichung (a) wird ersetzt durch die Gleichungen

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0,$$

und diese (nach 26) durch die n Gleichungen

$$0 = \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n,$$

d. h. durch die n Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n = \beta_n.$$

30. Erklärung. Wenn eine extensive Grösse a aus einer andern b, die nicht null ist, sich numerisch ableiten lässt, so verstehe ich unter $\frac{b}{a}$ die Zahl, durch welche b aus a abgeleitet werden kann, d. h.

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha, \text{ wenn } a \gtrless 0.$$

31. Wenn 2 Grössen (a und b) aus derselben Grösse (c) numerisch abgeleitet sind, und die zweite nicht null ist, so kann man, statt die erste durch die zweite zu dividiren, die Ableitungszahlen entsprechend dividiren, d. h.

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ wenn } \beta c \gtrless 0.$$

Beweis. Wenn $\beta c \gtrless 0$ ist, so ist (nach 12, 6) auch $\beta \gtrless 0$ und $c \gtrless 0$. Dann ist $\alpha c = \frac{\alpha}{\beta}(\beta c)$ nach 13, also

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}(\beta c)}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad [30].$$

32. Eine Gleichung, deren Glieder alle aus derselben Grösse (a) numerisch ableitbar sind, wird durch eine Gleichung ersetzt, die man erhält, indem man alle Glieder der ersteren durch eine beliebige aus jener Grösse (a) numerisch ableit-

Hosted by Google

bare, aber von null verschiedene Grösse dividirt, d. h. die Gleichung

(a) $\alpha a + \beta a + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \cdots$

wird erfetzt durch die Gleichung

(b) $\frac{\alpha a}{\varrho a} + \frac{\beta a}{\varrho a} + \cdots = \frac{\alpha_1 a}{\varrho a} + \frac{\beta_1 a}{\varrho a} + \cdots$, wenn $\varrho a \gtrless 0$.

Beweis. Wenn $\varrho a \gtrless 0$, fo muss [nach 12, 6] fowohl $\varrho \gtrless 0$ als $a \gtrless 0$ fein. Somit kann man a auch, da es von null verschieden ist, als Einheit betrachten. Dann wird, nach 29, die Gleichung (a) erfetzt durch

$$\alpha + \beta + \cdots = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots,$$

oder, wenn man durch $\varrho \gtrless 0$ dividirt, durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\beta}{\varrho} + \cdots = \frac{\alpha_1}{\varrho_1} + \frac{\beta_1}{\varrho_1} + \cdots,$$

d. h. (nach 31) durch die Gleichung

$$\frac{\alpha a}{\varrho a} + \frac{\beta a}{\varrho a} + \cdots = \frac{\alpha_1 a}{\varrho_1 a} + \frac{\beta_1 a}{\varrho_1 a} + \cdots.$$

33. Erklärung. Wenn die Grössen $a_1 \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und die Grösse

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

ist, fo nennen wir, wenn m kleiner als n ist, die Grösse

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_m a_m$$

„die Zurückleitung der Grösse a auf das Gebiet $a_1 a_2 \cdots a_m$, unter Ausschliessung des Gebietes $a_{m+1} a_{m+2} \cdots a_n$.“ Wir fagen, die Zurückleitungen mehrerer Grössen feien in demfelben Sinne genommen, wenn die Grössen auf dasselbe Gebiet und unter Ausschliessung desselben Gebietes zurückgeleitet sind.

Anmerk. Wenn ins Befondere $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_n a_n$ ist, fo ist z. B. $\alpha_1 a_1$ die Zurückleitung von a auf das Gebiet a_1, unter Ausschliessung des Gebietes $a_2 \cdots a_n$, ferner: wenn $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ ist, fo ist $\alpha_1 a_1$ die Zurückleitung auf das Gebiet a_1, unter Ausschliessung des Gebietes a_2.

34. Jede Gleichung, deren Glieder Produkte je einer extenfiven Grösse mit einer Zahl find, wird, wenn die extenfiven Grössen einem Gebiet n-ter Stufe angehören, erfetzt durch n Zahlengleichungen, die man erhält, indem man in der gegebenen Gleichung statt aller extenfiven Grössen ihre

Hosted by Google

zu derfelben Einheit gehörigen Ableitungszahlen fetzt; und zwar gilt dies, welche n in keiner Zahlbeziehung ſtehende Grössen des Gebietes man auch als System von Einheiten annehmen mag, d. h. die Gleichung

$$(a)\quad \alpha a' + \beta b + \cdots = \varkappa k + \lambda l + \cdots$$

in welcher

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n,\quad k = \varkappa_1 e_1 + \cdots \varkappa_n e_n$$
$$b = \beta_1 e_1 + \cdots \beta_n e_n,\quad l = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ist, wird erſetzt durch die n Gleichungen

$$(b)\begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots \end{cases}$$

vorausgeſetzt, dass $e_1 \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen.

Beweis. Setzt man in die Gleichung (a) die Ausdrücke für a, b, ···· k, l, ·· ein, ſo erhält man

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots)e_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots)e_2 + \cdots (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots)e_n = (\varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots)e_1 + \cdots (\varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots)e_n.$$

Dieſe Gleichung wird (nach 29) erſetzt durch die n Gleichungen

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \cdots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \cdots$$
$$\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \cdots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \cdots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \cdots.$$

35. Jede Gleichung, deren Glieder Produkte je einer extenſiven Grösse mit einer Zahl ſind, bleibt bestehen, wenn man ſtatt aller extenſiven Grössen ihre in demſelben Sinne genommenen Zurückleitungen ſetzt.

Beweis. Man nehme an, die gegebene Gleichung ſei die Gleichung (a) des vorhergehenden Satzes, in welcher a, b, ···· k, l ·· dieſelbe Bedeutung haben wie vorher, ſo ist zu zeigen, dass dieſe Gleichung auch fortbesteht, wenn man ſtatt der Grössen a, b, ··· k, l ihre Zurückleitungen auf das Gebiet $e_1 \cdots e_m$, unter Ausſchliessung des Gebietes $e_{m+1} \cdots e_n$, ſetzt, d. h. dass auch

$$(c)\quad \alpha a' + \beta b' + \cdots = \varkappa k' + \lambda l' + \cdots$$

Hosted by Google

sei, wo $a' = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_m e_m$, $k = \varkappa_1 e_1 + \cdots \varkappa_m e_m$,
$b' = \beta_1 e_1 + \cdots \beta_m e_m$, $l = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_m e_m$
$\vdots$ $\vdots$

ist. In der That wird die Gleichung (a) erfetzt durch die n Gleichungen (b) der vorigen Nummer. Multiplicirt man nun die ersten m dieser n Gleichungen beziehlich mit e_1, e_2, $\cdots e_m$ und addirt die fo erhaltenen Gleichungen, fo erhält man die zu erweifende Gleichung (c).

Anmerk. Es liegt hierin zugleich der speciellere Satz, dass gleiche Grössen, in gleichem Sinne zurückgeleitet, auch gleiche Zurückleitungen geben, oder anders ausgedrückt, dass die Zurückleitung einer gegebenen Grösse bestimmt ist, wenn das Gebiet, auf welches, und das Gebiet, unter deffen Ausschliessung zurückgeleitet werden foll, gegeben ist.

36. Wenn die Zahlen $x_1 \cdots x_n$, durch welche eine extenfive Grösse x aus einem System von n Einheiten e_1, e_2, $\cdots e_n$ abgeleitet wird, einer Gleichung m-ten Grades genügen, fo genügen auch die Zahlen $y_1 \cdots y_n$, durch welche diefelbe Grösse aus einem System von n andern dasselbe Gebiet liefernden Einheiten a_1, $a_2 \cdots a_n$ abgeleitet wird, einer Gleichung m-ten Grades, und zwar ist die letzte homogen, wenn die erste es ist.

Beweis. Es ist nach der Annahme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n,$$

und zwischen diefen Ableitungszahlen bestehe die Gleichung

$$f(x_1, \cdots x_n) = 0,$$

in welcher f das Zeichen einer Funktion m-ten Grades ist. Nun müssen die neuen Einheiten $a_1 \cdots a_n$, da fie dem Gebiete $e_1 \cdots e_n$ angehören, aus diefen Einheiten $e_1, \cdots e_n$ ableitbar fein. Es fei

$$a_1 = \sum \alpha_{1,r} e_r = \alpha_{1,1} e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \cdots \alpha_{1,n} e_n,$$
$$a_2 = \sum \alpha_{2,r} e_r = \alpha_{2,1} e_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \cdots \alpha_{2,n} e_n,$$
$$\vdots$$
$$a_n = \sum \alpha_{n,r} e_r = \alpha_{n,1} e_1 + \alpha_{n,2} e_2 + \cdots \alpha_{n,n} e_n.$$

Ferner, da $y_1 \cdots y_n$ die Ableitungszahlen in Bezug auf diefe neuen Einheiten fein follen, fo hat man auch

$$x = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_n a_n, \text{ also}$$

Hosted by Google

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$$
$$= y_1a_1 + y_2a_2 + \cdots y_na_n,$$
$$= y_1\sum\overline{\alpha_{1,r}e_r} + y_2\sum\overline{\alpha_{2,r}e_r} + \cdots y_n\sum\overline{\alpha_{n,r}e_r},$$
$$= \sum\overline{(y_r\alpha_{r,1})e_1} + \sum\overline{(y_r\alpha_{r,2})\cdot e_2} + \cdots + \sum\overline{(y_r\alpha_{r,n})\cdot e_n}.$$

Alſo nach 29

$$x_1 = \sum\overline{\alpha_{r,1}y_r} = \alpha_{1,1}y_1 + \alpha_{2,1}y_2 + \cdots \alpha_{n,1}y_n,$$
$$x_2 = \sum\overline{\alpha_{r,2}y_r} = \alpha_{1,2}y_1 + \alpha_{2,2}y_2 + \cdots \alpha_{n,2}y_n,$$
$$\vdots$$
$$x_n = \sum\overline{\alpha_{r,n}y_r} = \alpha_{1,n}y_1 + \alpha_{2,n}y_2 + \cdots \alpha_{n,n}y_n,$$

d. h. $x_1, \cdots x_n$ ſind ganze homogene Funktionen ersten Grades von $y_1 \cdots y_n$, folglich, ſetzt man in

$$f(x_1, \cdots x_n) = 0$$

ſtatt $x_1, \cdots x_n$ dieſe Werthe, ſo erhält man eine Funktion m-ten Grades von $y_1 \cdots y_n$ und zwar eine homogene, wenn die erstere eine ſolche war.

Kap. 2. Die Produktbildung im Allgemeinen.

§. 1. Produkt zweier Grössen.

37. Erklärung. Unter dem Produkte [ab] einer extenſiven Grösse a in eine andere b, verſtehe ich diejenige extenſive Grösse (oder auch Zahlgrösse), die man erhält, indem man zuerſt jede der Einheiten, aus denen die erſte Grösse a numeriſch abgeleitet iſt, mit jeder der Einheiten, aus denen die zweite b numeriſch abgeleitet iſt, zu einem Produkte verknüpft, deſſen erſter Faktor die Einheit der erſten Grösse und deſſen zweiter Faktor die Einheit der zweiten Grösse iſt, dann dies Produkt mit dem Produkte derjenigen Ableitungszahlen multiplicirt, mit welchen jene Einheiten verknüpft waren, und die ſämmtlichen ſo gewonnenen Produkte addirt, d. h. es iſt

$$[\sum\overline{\alpha_r e_r}\ \sum\overline{\beta_s e_s}] = \sum\overline{\alpha_r\beta_s\,[e_r e_s]},$$

wo e_r, e_s die Einheiten, aus denen die Grössen numeriſch abgeleitet ſind, α_r, α_s die zugehörigen Ableitungszahlen bezeichnen, und die Summe ſich auf die verſchiedenen Werthe der Indices r und s bezieht.

Anmerk. Da das Produkt extenſiver Grössen nach der Erklärung wieder entweder eine extenſive Grösse oder eine Zahlgrösse iſt,

Hosted by Google

ſo muss dasselbe [nach 5] aus einem System von Einheiten numerisch ableitbar ſein. Welches dies System von Einheiten ſei, und wie aus ihnen die Produkte $e_r e_s$, aus denen jenes Produkt zusammengeſetzt ist, numerisch abzuleiten ſeien, darüber ſagt die Definition nichts aus. Soll alſo der Begriff eines beſonderen Produktes genau festgestellt werden, ſo müssen noch über jenes System von Einheiten und über dieſe Ableitungen die nöthigen Bestimmungen getroffen werden. Sobald dieſe Bestimmungen getroffen ſind, ſo geht aus der allgemeinen Gattung der Produktbildungen, wie ſie oben festgestellt wurde, eine beſondere Art der Produktbildung hervor. Hat man z. B. das Produkt $P = [(x_1 e_1 + x_2 e_2)\ (y_1 e_1 + y_2 e_2)]$, ſo ist dasselbe [nach 37] gleich $x_1 y_1 [e_1 e_1] + x_1 y_2 [e_1 e_2] + x_2 y_1 [e_2 e_1] + x_2 y_2 [e_2 e_2]$. Beſondere Arten der Produktbildung würden nun hervorgehen, wenn noch die Einheiten festgeſetzt würden, aus denen dies Produkt numerisch abgeleitet werden ſoll, und die Art bestimmt würde, wie die vier Produkte $[e_1 e_1]$, $[e_1 e_2]$, $[e_2 e_1]$, $[e_2 e_2]$ aus jenen Einheiten numerisch abzuleiten ſind; ſo z. B. könnte festgeſetzt werden, dass dieſe vier Produkte ſelbst das System der Einheiten bildeten, aus denen P numerisch abzuleiten ist, dann ſind x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2 die Ableitungszahlen von P; und wir hätten eine beſondere Art der Produktbildung, die ſich dadurch auszeichnen würde, dass zu ihrer Feststellung keine Gleichungen erforderlich wären. Oder man könnte drei unter ihnen, etwa $[e_1e_1]$, $[e_1e_2]$, $[e_2e_2]$ als Einheiten feſtſetzen, und die Bestimmung hinzufügen, dass $[e_2e_1] = [e_1e_2]$ ſein ſollte; dann würden die Ableitungszahlen von P ſein x_1y_1, $(x_1y_2 + x_2y_1)$, x_2y_2; eine Art der Produktbildung, die ſich dadurch auszeichnen würde, dass ihre Geſetze mit denen der algebraiſchen Multiplikation identiſch ſein würden. Oder man könnte eine unter ihnen, z. B. $[e_1e_2]$, als Einheit feſtſetzen, aus welcher das Produkt P numerisch abzuleiten ſein ſoll, und für die übrigen etwa die Bestimmungen treffen, dass $[e_1e_1] = 0$, $[e_2e_1] = -[e_1e_2]$, $[e_2e_2] = 0$ ſein ſoll. Dann würde das Produkt P nur eine Ableitungszahl haben, nämlich $x_1y_2 - x_2y_1$; eine Produktbildung, die ich unten kombinatoriſche genannt habe. Ja man könnte auch ein System von anderen Einheiten, unter denen $[e_1e_1]$, $[e_1e_2]$, $[e_2e_1]$, $[e_1e_2]$ nicht vorkämen, zu Grunde legen, und dann bestimmen, wie dieſe vier Produkte aus ihnen abzuleiten ſeien, z. B. könnte man etwa die abſolute Einheit zu Grunde legen, und etwa feſtſetzen, es ſolle $[e_1e_1] = 1$, $[e_1e_2] = 0$, $[e_2e_1] = 0$, $[e_2e_2] = 1$ ſein, in dieſem Falle würde P eine Zahl, nämlich $= x_1y_1 + x_2y_2$ ſein; eine Produktbildung, die ich unten innere genannt habe. Gegenwärtig werde ich nur diejenigen Geſetze behandeln, welche aus der allgemeinen Erklärung des Produktes in 37 hervorgehen, und welche alſo für alle Arten der Produkte gelten. Ich habe das Produkt durch eine Klammer umſchloſſen, um es von dem gewöhnlichen Produkte der Algebra zu unterſcheiden.

Hosted by Google

38. Statt zu einer Grösse a einen Faktor b hinzuzufügen, kann man ihn in dem Ableitungsausdruck der ersteren jeder Einheit auf entsprechende Weife hinzufügen, d. h.

$$[\sum \alpha_r e_r\, b] = \sum \alpha_r [e_r b].$$

Beweis. Es fei $b = \sum \beta_s e$, fo ist

$$\begin{aligned}
[\sum \alpha_r e_r b] &= [\sum \alpha_r e_r \sum \beta_s e_s] = \sum \alpha_r \beta_s [e_r e_s] && [37]\\
&= \sum \alpha_1 \beta_s [e_1 e_s] + \sum \alpha_2 \beta_s [e_2 e_s] + \cdots && [9]\\
&= \alpha_1 [e_1 \sum \beta_s e_s] + \alpha_2 [e_2 \sum \beta_s e_s] + \cdots && [37]\\
&= \alpha_1 [e_1 b] + \alpha_2 [e_2 b] + \cdots = \sum \alpha_r [e_r b].
\end{aligned}$$

39. Ein Produkt zweier Faktoren, deffen einer Faktor eine Summe ist, ist gleich einer Summe von Produkten, die man erhält, indem man in dem urſprünglichen Produkte, ſtatt des zerſtückten Faktor's, nach und nach jedes Stück ſetzt, d. h.

$$[(a + b + \cdots)p] = [ap] + [bp] + \cdots$$
$$[p(a + b + \cdots)] = [pa] + [pb] + \cdots.$$

Insbefondere ist

$$[(a + b)c] = [ac] + [bc]$$
$$[c(a + b)] = [ca] + [cb].$$

Beweis. Es ſei $a = \sum \alpha_r e_r$, $b = \sum \beta_r e_r + \cdots$, ſo ist

$$\begin{aligned}
&[(a + b + \cdots)p]\\
&= [(\sum \alpha_r e_r + \sum \beta_r e_r + \cdots)p] = [\sum (\alpha_r + \beta_r + \cdots) e_r p] && [9]\\
&= \sum (\alpha_r + \beta_r + \cdots)[e_r p] && [38]\\
&= \sum \alpha_r [e_r p] + \sum \beta_r [e_r p] + \cdots && [9]\\
&= [\sum \alpha_r e_r p] + [\sum \beta_r e_r p] + \cdots && [38]\\
&= [ap] + [bp] + \cdots.
\end{aligned}$$

Somit ist die erſte Formel bewieſen. Den Beweis der zweiten Formel erhält man aus dem der erſten, wenn man den Faktor p überall als erſten Faktor einſetzt.

40. Statt den einen Faktor eines Produktes (zweier Faktoren) mit einer Zahl zu multipliciren, kann man das ganze Produkt mit dieſer Zahl multipliciren, d. h.

$$[(\alpha a)b] = \alpha[ab]$$
$$[b(\alpha a)] = \alpha[ba].$$

Beweis. Es ſei $a = \sum \alpha_r e_r$, ſo ist

Hosted by Google

$$[(\alpha a)b] = [(\alpha\overline{\sum \alpha_r e_r})b] = [\overline{\sum \alpha\alpha_r \cdot e_r}\, b] \quad [10]$$
$$= \overline{\sum \alpha\alpha_r [e_r b]} \quad [38]$$
$$= \alpha\overline{\sum \alpha_r [e_r b]} \quad [13]$$
$$= \alpha[\overline{\sum \alpha_r e_r}\, b] \quad [38]$$
$$= \alpha[ab].$$

Der Beweis der zweiten Formel ergiebt ſich, wenn man b überall als den ersten der beiden Faktoren ſetzt.

41. Statt zu einer Grösse, die aus beliebigen Grössen a, b, ··· numerisch abgeleitet ist, einen Faktor p hinzuzufügen, kann man ihn in dem Ausdruck dieſer Ableitung zu jeder der Grössen a, b, ··· auf entsprechende Weiſe hinzufügen, d. h.

$$[(\alpha a + \beta b + \cdots)p] = \alpha[ap] + \beta[bp] + \cdots \text{ und}$$
$$[p(\alpha a + \beta b + \cdots)] = \alpha[pa] + \beta[pb] + \cdots.$$

Beweis. $[(\alpha a+\beta b+\cdots)p] = [(\alpha a)p]+[(\beta b)p]+\cdots$ [39]
$$= \alpha[ap]+\beta[bp]+\cdots \quad [40].$$

42. Das Produkt zweier Faktoren, welche aus beliebigen Grössen numerisch abgeleitet ſind, erhält man, indem man zuerst statt jedes Faktors eine der Grössen ſetzt, aus denen er abgeleitet ist, das ſo gewonnene Produkt mit dem Produkte der zu den ſubstituirten Grössen gehörigen Ableitungszahlen multiplicirt, und die ſämmtlichen Produkte, welche ſich auf dieſe Weiſe bilden lassen, addirt, d. h.

$$[\overline{\sum \alpha_r a_r}\,\overline{\sum \beta_s b_s}] = \overline{\sum \alpha_r\beta_s [a_r b_s]},$$

wo a_r, b_s beliebige Grössen, α_r, β_s beliebige Zahlen ſind.

Beweis. $[\overline{\sum \alpha_r a_r}\,\overline{\sum \beta_s b_s}] = \overline{\sum \alpha_r [a_r \overline{\sum \beta_s b_s}]}$ [41]
$$= \overline{\sum \alpha_r (\beta_s [a_r b_s])} \quad [41]$$
$$= \overline{\sum \alpha_r\beta_s [a_r b_s]} \quad [13].$$

§. 2. Produkt mehrerer Grössen.

43. Erklärung. Wenn aus einem Produkte ein anderes dadurch abgeleitet werden kann, dass man statt jedes Faktors, der in dem ersten Produkte vorkommt, einen andern (ihm gleichen oder von ihm verſchiedenen) Faktor ſetzt, ſo nenne ich die beiden Produkte einander **entsprechend**, und nenne

Hosted by Google

jeden Faktor des ersten Produktes entsprechend dem für ihn ſubstituirten des andern Produktes. Zweien Grössen oder zweien entsprechenden Produkten beziehungsweiſe zwei Faktoren in entsprechender Weiſe hinzufügen, heisst ſie ſo hinzufügen, dass die entstehenden Produkte wieder einander entsprechend werden, und zwar ſo, dass der in dem einen und der in dem andern Produkte hinzugefügte Faktor entsprechende Faktoren werden, und die bisher einander entsprechenden Faktoren auch entsprechend bleiben. Ein Produkt, in welchem die Faktoren a, b, ··· irgend wie enthalten ſind, werde ich, wo es angemessen scheint, mit $P_{a, b, \ldots}$ bezeichnen; dann drückt innerhalb derſelben Entwickelung $P_{h, i, \ldots}$ das entsprechende Produkt aus, in welchem die Faktoren h, i, ··· der Reihe nach den Faktoren a, b, ··· entsprechen.

Anmerk. Dieſe Bestimmungen ſind unentbehrlich, wenn man allen Zweideutigkeiten entgehen will. Denn da die Faktoren eines Produktes extenſiver Grössen weder unter allen Umständen vertauscht, noch zu beſonderen Produkten vereinigt werden dürfen, ſo ist die Art, wie ein Faktor in das Produkt eingeht, bestimmt zu fixiren. Als Beispiel zweier entsprechender Produkte ſeien die Produkte a(bc) und d(ef) gewählt, wo die Faktoren ſich der Reihe nach entsprechen. Sollen zu ihnen noch beziehlich die Faktoren g und h in entsprechender Weiſe hinzugefügt werden, ſo kann dies auf verschiedene Arten geschehen, z. B. ſo, dass die Produkte a(bc)g und d(ef)h hervorgehen, oder a(bgc) und d(ehf) u. ſ. w. Was die Bedeutung ausgelassener Klammern betrifft, ſo verweiſe ich auf No. 7 Anmerkung.

44. Wenn ein gegebenes Produkt einen Faktor p enthält, der aus beliebigen Grössen a, b, c, ··· durch die Zahlen q, r, s abgeleitet ist, und man ſetzt in jenem Produkte statt des Faktors p nach und nach die Grössen a, b, c, ···, multiplicirt die ſo erhaltenen Produkte beziehlich mit q, r, s, ··· und addirt dieſe Ausdrücke, ſo ist ihre Summe gleich dem gegebenen Produkte, d. h.

$$P_{qa+rb+\ldots} = qP_a + rP_b + \cdots.$$

Beweis. Wie das Produkt auch beſchaffen ſei, immer kann man es ſo entstanden denken, dass zu dem Faktor p die übrigen Faktoren fortschreitend in bestimmter Weiſe hinzugetreten ſeien, nämlich ſo, dass zu p zuerst ein anderer Faktor (ſei es als erster oder als zweiter Faktor des Produkts)

Hosted by Google

hinzugetreten ſei, zu dieſem Produkte wieder ein anderer und ſo fort. Statt nun aber einen Faktor zu einer numerisch abgeleiteten Grösse hinzuzufügen, kann man ihn, nach 41, in dem Ausdruck jener Ableitung zu jeder der Grössen, aus denen jene erstere abgeleitet war, auf entsprechende Weiſe hinzufügen. Folglich statt zu $p = qa + rb + \cdots$ die übrigen Faktoren in der genannten Weiſe fortschreitend hinzuzufügen, kann man ſie in dem Ableitungsausdruck in entsprechender Weiſe zu jeder der Grössen a, b, ·· hinzufügen, d. h.

$$P_p = qP_a + rP_b + \cdots, \text{ wenn } p = qa + rb + \cdots.$$

45. Der Satz 42 gilt auch für mehr als zwei Faktoren, d. h.

$$[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots] = \sum q_r r_s \cdots [a_r b_s \cdots].$$

Beweis. Gilt der Satz für irgend eine Anzahl von Faktoren, z. B. für $[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots \sum \varkappa_m k_m]$, ſo dass alſo

(a) $[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots \sum \varkappa_m k_m] = \sum q_r b_s \cdots \varkappa_m [a_r b_s \cdots k_m]$.

ist, ſo gilt er auch, wenn noch ein Faktor, z. B. $\lambda_n l_n$, hinzutritt; denn es ist

$$\begin{aligned}
&[\sum q_r a_r \sum r_s b_s \cdots \sum \varkappa_m k_m \sum \lambda_n l_n] \\
&= \sum q_r r_s \cdots \varkappa_m [a_r b_s \cdots k_m] \sum \lambda_n l_n && \text{(nach a)} \\
&= \sum q_r r_s \cdots \varkappa_m \lambda_n [a_r b_s \cdots k_m l_n] && [42].
\end{aligned}$$

Alſo wenn die Formel 45 für irgend eine Anzahl von Faktoren gilt, ſo gilt ſie auch, wenn noch ein Faktor hinzutritt. Nun gilt ſie aber, nach 42, für zwei Faktoren, alſo auch für drei, vier u. ſ. w., alſo für beliebig viele.

46. Statt die Faktoren eines Produktes mit einer Reihe von Zahlen zu multipliciren, kann man das ganze Produkt mit dem Produkte dieſer Zahlen multipliciren, d. h.

$$P_{qa, rb, \ldots} = qr \cdots P_{a, b, \ldots}.$$

Beweis. Nach 44 ist $P_{qa} = qP_a$, alſo auch

$$\begin{aligned}
P_{qa, rb, sc \ldots} &= qP_{a, rb, sc, \ldots} && [44] \\
&= qrP_{a, b, sc, \ldots} && [44] \\
&\quad \text{u. ſ. w., endlich} \\
&= qrs \cdots P_{a, b, c, \ldots} && [44].
\end{aligned}$$

47. Zwei in einem Produkte vorkommende Faktoren, welche in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, kann man ohne Werthänderung des Produktes vertauschen, d. h.

$$P_{qa, ra} = P_{ra, qa}.$$

Hosted by Google

Beweis. Es ist

$$P_{qa,\,ra} = qrP_{a,\,a} \qquad [46]$$
$$= rqP_{a,\,a} = P_{ra,\,qa} \qquad [46].$$

§. 3. Die verschiedenen Arten der Produktbildung.

48. Erklärung. Wenn die Produktbildung dadurch näher bestimmt wird, dass zwischen den Produkten der Einheiten Zahlbeziehungen bestehen, so nenne ich jede Gleichung, welche eine solche Zahlbeziehung ausdrückt, eine zu jener Art der Produktbildung gehörige Bestimmungsgleichung. Einen Verein von p Bestimmungsgleichungen, von denen keine aus den übrigen gefolgert werden kann, nenne ich, wenn zwischen den Produkten keine andere Zahlbeziehung herrscht, als die aus jenen Gleichungen gefolgert werden kann, ein zu jener Produktbildung gehöriges System von Bestimmungsgleichungen.

49. Jedes System von m Bestimmungsgleichungen zwischen den n Einheitsprodukten $E_1, \cdots E_n$ kann auf die Form gebracht werden, dass jede der Gleichungen ausdrückt, wie aus $n - m$ jener Einheitsprodukte, z. B. aus $E_1 \cdots E_{n-m}$ die übrigen m numerisch ableitbar sind. Dann bilden $E_1 \cdots E_{n-m}$ ein System von Einheiten, aus denen alle Produkte, die zu dieser Produktbildung gehören, ableitbar sind.

Beweis. Nach 48 soll jede Gleichung des Systems der m Bestimmungsgleichungen eine Zahlbeziehung zwischen $E_1, \cdots E_n$ ausdrücken. Jede solche Zahlbeziehung wird sich, nach 16, auf die Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_n E_n = 0$$

bringen lassen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ nicht alle zugleich null sind. Es sei eine derselben betrachtet, und sei in ihr etwa α_n ungleich null, so kann man E_n durch $E_1, \cdots E_{n-1}$ ausdrücken. Substituirt man diesen Ausdruck in die übrigen $(m - 1)$ Gleichungen, so werden sie von der Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_{n-1} E_{n-1} = 0.$$

In keiner der so erhaltenen Gleichungen dürfen die Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ alle zugleich null werden, weil sonst diese Bestimmungsgleichung aus der ersten gefolgert werden könnte,

Hosted by Google

was dem Begriffe eines Systems von Bestimmungsgleichungen (nach 48) widerspricht. Es sei eine der so erhaltenen Gleichungen betrachtet, und sei in ihr etwa der Koefficient von E_{n-1} ungleich null; so wird E_{n-1} sich durch $E_1 \cdots E_{n-2}$ ausdrücken lassen, und wenn dieser Ausdruck in die übrigen $(m-2)$ Gleichungen eingeführt wird, so erhalten sie die Form

$$\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_{n-2} E_{n-2} = 0.$$

Da auf diese Weise durch die Anwendung jeder neuen Gleichung immer eine neue unter den Grössen $E_1 \cdots E_n$ aus den übrigen Gleichungen verschwindet, wir wollen annehmen, jedesmal die letzte unter den bis dahin vorhandenen, so behält man zuletzt nur noch die Grösse $E_1 \cdots E_{n-m}$, durch welche sich alle übrigen $E_{n-m+1} \cdots E_n$ ausdrücken lassen.

50. Erklärung. Jede Produktbildung, deren Bestimmungsgleichungen geltend bleiben, wenn man statt der darin vorkommenden Einheiten beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen setzt, heisst eine lineale Produktbildung (Multiplikation).

51. Für Produkte aus zwei Faktoren giebt es ausser derjenigen Produktbildung, welche gar keine Bestimmungsgleichung hat, und derjenigen, deren Produkte alle null sind, nur zwei Gattungen linealer Produktbildung, und zwar ist das System der Bedingungsgleichungen für die eine

$$(1) \quad [e_r e_s] + [e_s e_r] = 0,$$

für die andere

$$(2) \quad [e_r e_s] = [e_s e_r],$$

wo für r und s, wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ die Einheiten sind, nach und nach jede 2 der Zahlen $1 \cdots n$ gesetzt werden sollen.

Beweis. Jede Bestimmungsgleichung wird bei zwei Faktoren, die aus den Einheiten $e_1 \cdots e_n$ abgeleitet sind, die Form haben

$$(a) \quad \sum \alpha_{r,s} [e_r e_s] = 0,$$

wo die Koefficienten $\alpha_{r,s}$ beliebige Zahlen sind, die aber nicht alle gleichzeitig null werden dürfen, und wo für r und s nach und nach je zwei der Werthe $1 \cdots n$ in die Summe eingeführt werden sollen. Wir nehmen an, die Produktbildung solle

Hosted by Google

eine lineale ſein; d. h. nach 50, es ſoll jede Bestimmungsgleichung *noch geltend bleiben, wenn man statt der Einheiten* beliebige aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen ſetzt. Man ſetze in (a) $\sum x_{r,u} e_u$ statt e_r und $\sum x_{s,v} e_v$ statt e_s, wo die Summen ſich nur auf die Indices u und v beziehen, und $x_{r,u}$ und $x_{s,v}$ beliebig zu wählende Zahlen bedeuten. Dann erhalten wir

$$0 = \sum \alpha_{r,s} [\sum x_{r,u} e_u \sum x_{s,v} e_v]$$
$$= \sum \alpha_{r,s} \sum x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v] \qquad [45]$$

alſo $0 = \sum \alpha_{r,s} x_{r,u} x_{s,v} [e_u e_v]$ [13],

indem ſich nun die Summe auf alle vier Werthe r, s, u, v bezieht. Vertauscht man hier r mit s und u mit v, was man kann, da r, s, u, v in jedem Gliede ganz beliebige der Zahlen $1 \cdots n$ ſind, ſo erhält man

$$0 = \sum \alpha_{s,r} x_{s,v} x_{r,u} [e_v e_u],$$

und indem man dieſe Gleichung mit der obenſtehenden addirt, erhält man

(b) $0 = \sum x_{r,u} x_{s,v} (\alpha_{r,s} [e_u e_v] + \alpha_{s,r} [e_v e_u])$,

eine Gleichung, welche für die Anwendung bequemer ist, als die beiden vorhergehenden. Sie muss für alle Werthe, die man den Grössen $x_{r,u}$, $x_{s,v}$ geben mag, gelten. Man ſetze nun in (b) irgend eine der Grössen $x_{r,u}$ etwa $x_{a,c}$ zuerſt $= 1$, dann $= -1$, ſubtrahire die ſo erhaltenen zwei Gleichungen von einander, und dividire durch 2, ſo fallen alle Glieder weg, welche $x_{a,c}$ entweder keinmal oder zweimal enthielten, und es bleibt nur

$$\sum x_{s,v} (\alpha_{a,s} [e_c e_v] + \alpha_{s,a} [e_v e_c]) = 0,$$

wobei jedoch unter den Werthpaaren von s und v dasjenige auszulassen ist, für welches zugleich $s = a$ und $v = c$ ist. Setzt man nun hierin wieder irgend eine der Grössen $x_{s,v}$, z. B. $x_{b,d}$ zuerſt gleich 1 und dann gleich -1, ſubtrahirt die ſo erhaltenen zwei Gleichungen und dividirt durch 2, ſo fallen wieder die Glieder weg, welche $x_{b,d}$ keinmal oder zweimal enthalten und es bleibt

(c) $\alpha_{a,b} [e_c e_d] + \alpha_{b,a} [e_d e_c] = 0$

zunächſt nur für je vier Indices a, b, c, d, von denen nicht

Hosted by Google

gleichzeitig der erste dem zweiten, der dritte dem vierten gleich ist. Hierdurch reducirt sich die Gleichung (b) auf

$$0 = \sum \overline{x_{r,u} x_{r,u} \alpha_{r,r} [e_u e_u]}.$$

Setzt man hierin für eine der Grössen $x_{r,u}$, etwa für $x_{a,c}$, nach der Reihe zwei einander nicht entgegengesetzte Werthe, z. B. 1 und 2 ein, subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen von einander und dividirt die Restgleichung in diesem Falle durch 3, so bleibt

$$0 = \alpha_{a,a} [e_c e_c],$$

d. h. die Gleichung (c) gilt auch für den vorher ausgeschlossenen Fall, dass $a = b$, $c = d$ ist.

Somit folgt aus der Gleichung (a), wenn sie eine lineale Bestimmungsgleichung sein, d. h. noch geltend bleiben soll, welche aus den Einheiten abgeleitete Grössen man auch statt derselben einführen mag, nothwendig die Gleichungsgruppe (c), aber auch umgekehrt, wenn die Gleichungsgruppe (c) gilt, so folgt aus ihr die Gleichung (b), welche ausdrückt, dass die Gleichung (a) lineal sei.

Setzen wir in (c) die Indices c und d einander gleich, so geht sie über in

$$(e) \quad (\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a}) [e_c e_c] = 0,$$

und setzen wir in ihr $a = b$, so geht sie über in

$$(f) \quad \alpha_{a,a} ([e_c e_d] + [e_d e_c]) = 0.$$

In diesen gleich null gesetzten Produkten muss (nach 12, 6) jedesmal der eine oder der andere Faktor null sein.

Nehmen wir zuerst an $[e_c e_c]$ sei von null verschieden, so muss nothwendig für je zwei Indices a und b

$$\alpha_{a,b} + \alpha_{b,a} = 0, \text{ d. h. } -\alpha_{a,b} = \alpha_{b,a}$$

sein. Setzen wir dies in (c) ein, so erhalten wir

$$\alpha_{a,b} ([e_c e_d] - [e_d e_c]) = 0.$$

Sollte hier $[e_c e_d] - [e_d e_c]$ von null verschieden sein, so müsste der andere Faktor $\alpha_{a,b}$ für je zwei Indices a und b null sein, d. h. die Gleichung (a) würde identisch null gegen die Annahme. Somit muss in diesem Falle, wo $[e_c e_c]$ von null verschieden ist,

$$[e_c e_d] - [e_d e_c] = 0, \text{ d. h. } [e_c e_d] = [e_d e_c]$$

sein, d. h. es tritt die Gleichungsgruppe (50, 2) ein. Ist nun

Hosted by Google

im zweiten Falle $[e_c e_c] = 0$, oder, indem wir a statt c fetzen $[e_a e_a] = 0$, fo können wir diefe Gleichung als Bestimmungsgleichung an die Stelle der Gleichung (a) fetzen, dann ist $\alpha_{a,a} = 1$, während alle übrigen Koefficienten null find, und es folgt dann, indem wir diefen Werth $\alpha_{a,a} = 1$ in (f) einfetzen,

$$[e_c e_d] + [e_d e_c] = 0,$$

d. h. es tritt die Gruppe (50, 1) ein. Nun wäre noch möglich, dass beide Gruppen (50, 1) und (50, 2) zugleich geltend wären. Allein dann würde folgen, dass $[e_c e_d] = 0$, alfo alle Produkte null wären, ein Fall, den wir oben ausgeschlossen hatten. Es find alfo keine andern linealen Produktbildungen möglich, als die im Satze genannten. Dass diefe nun in der That lineale find, folgt fogleich aus der Gleichung (c), verglichen mit (a). In der That, wenn

$$(g) \quad [e_a e_b] \mp [e_b e_a] = 0$$

die Bedingungsgleichungen find und man fetzt irgend eine derfelben als die Gleichung (a), fo ist für fie $\alpha_{a,b} = 1$, $\alpha_{b,a} = \mp 1$, und alle übrigen Koefficienten find null. Dann geht die Gleichungsgruppe (c) über in

$$[e_c e_d] \mp [e_d e_c] = 0,$$

welche schon in der gegebenen Gruppe (g) enthalten waren. Alfo find jene beiden Gattungen der Produktbildung lineal und zwar die einzig möglichen ausser der bestimmungslofen und der verschwindenden.

Anmerk. Soll alfo das bisher fich von felbst darbietende Princip, dass nämlich jedes durch eine Gleichung ausdrückbare Gefetz auch bestehen bleibt, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen abgeleitete Grössen fetzt, auch in der nächsten Entwickelung noch fortbestehen, fo ist kein anderer Fortschritt möglich, als der zu den beiden genannten Produktbildungen. Nehmen wir der Einfachheit wegen nur zwei Einheiten e_1 und e_2 an, fo ist das System der Bestimmungsgleichungen für die erste Gattung gleichzeitig

$$[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0 \text{ und } [e_1 e_2] = -[e_2 e_1],$$

und für die zweite $[e_1 e_2] = [e_2 e_1]$.

In Bezug auf die Operationen ist die letztere Gattung die einfachere. Ja, da die Bestimmungsgleichungen derfelben nichts weiter ausdrücken als die Vertauschbarkeit der Faktoren, fo ist diefe Multiplikationsgattung, was die Operationen anlangt, identisch mit der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra, weshalb ich fie auch die

Hosted by Google

algebraische genannt habe*). Es versteht sich von selbst, dass ihr auch eine algebraische Division, Potenzirung u. s. w. zur Seite geht, und dass man für alle diese Verknüpfungen extensiver Grössen unmittelbar die algebraischen Gesetze als geltend annehmen darf. Hingegen ist diese Multiplikation, was die durch sie erzeugten Grössen betrifft, sehr viel komplicirter als die erstere Gattung, welche ich die kombinatorische genannt habe. In der That, betrachten wir bei zwei Einheiten e_1 und e_2 das Produkt zweier Faktoren $[(q_1 e_1 + q_2 e_2)(r_1 e_1 + r_2 e_2)] = q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + q_1 r_2 [e_1 e_2] + q_2 r_1 [e_2 e_1]$, so reducirt sich dies bei der ersten Gattung, wo $[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0$, $[e_2 e_1] = -[e_1 e_2]$ ist, auf $(q_1 r_2 - q_2 r_1)[e_1 e_2]$, also auf nur eine Einheit, nämlich $[e_1 e_2]$; ja, wenn in einer Entwickelungsreihe nie mehr als jene beiden ursprünglichen Einheiten e_1 und e_2 vorkommen, so wird man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, $[e_1 e_2] = 1$ setzen können, und erhält dann als Resultat der Multiplikation eine Zahl. Ganz anders bei der zweiten Gattung, wo sich jenes Produkt auf $q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + (q_1 r_2 + q_2 r_1)[e_1 e_2]$ reducirt, also auf nicht weniger als drei Einheiten. Da es in der Entwickelung der Wissenschaft vor allen Dingen darauf ankommt, die nach und nach hervortretenden Grössen in ihrem einfachsten Begriffe zu erfassen, so ist hier der Uebergang zu der ersten Gattung der Multiplikation mit Nothwendigkeit geboten. Ja, da die durch algebraische Multiplikation extensiver Grössen erzeugten Gebilde nicht mehr als einfache Grössen sich darstellen, sondern vielmehr den Funktionen der Algebra sich parallel stellen, so werden wir dieser Multiplikation erst im zweiten Theile dieses Werkes wieder begegnen, welcher die Funktionen behandeln wird.

Ich verweise in Bezug auf die Entwickelung der verschiedenen Multiplikationsgattungen auf die vorher angeführte Abhandlung in Crelle's Journal. Dort habe ich für den obigen Satz einen zwar weitläuftigeren, aber elementareren Beweis gegeben. Die allgemeine Idee der Multiplikation, wie sie im ersten §. dieses Kapitels entwickelt ist, habe ich schon in der ersten Ausgabe meiner Ausdehnungslehre (§. 10–12) zu Grunde gelegt.

Kap. 3. Kombinatorisches Produkt.

§. 1. Allgemeine Gesetze der kombinatorischen Multiplikation.

52. Erklärung. **Wenn die Faktoren eines Produktes P aus einem Systeme von Einheiten abgeleitet sind, und je zwei Produkte der Einheiten, welche durch Vertauschung der**

*) Crelle Journal B. 49, S. 139.

Hosted by Google

beiden letzten Faktoren auseinander hervorgehen, zur Summe null geben, jedes Produkt aber, was lauter verschiedene Einheiten als Faktoren enthält, von null verschieden ist, so nenne ich jenes Produkt P ein kombinatorisches, und jene Faktoren desselben seine einfachen Faktoren; d. h. sind b und c Einheiten, A aber eine beliebige Reihe von Einheiten, so wird die angegebene Bestimmung ausgedrückt durch die Formel

$$[Abc] + [Acb] = 0.$$

Anm. Warum hier gerade mit dieser besonderen Multiplikationsgattung der Anfang gemacht wird, ist No. 50 Anmerk. entwickelt.

53. Man kann in jedem kombinatorischen Produkt die beiden letzten (einfachen) Faktoren vertauschen, wenn man nur zugleich das Vorzeichen ($\mp$) in das entgegengesetzte verwandelt, d. h.

$$[Abc] + [Acb] = 0;$$

auch wenn A eine beliebige Reihe von Faktoren ist und b und c einfache Faktoren sind.

Beweis 1. Es seien zuerst b und c Einheiten. Da nun A eine beliebige Reihe von Faktoren ist, und die Faktoren aus den Einheiten numerisch ableitbar sind, so erhält man, indem man statt der Faktoren von A ihre Ableitungsausdrücke setzt, und die Klammern löst, (nach 45) einen Ausdruck, der aus den Produkten der Einheiten numerisch ableitbar ist, also die Form hat

$$A = \sum \overline{\alpha_r E_r},$$

wo E_r Produkte der Einheiten sind. Setzt man dies ein, so wird

$$\begin{aligned}
[Abc] + [Acb] &= [\sum \overline{\alpha_r E_r} bc] + [\sum \overline{\alpha_r E_r} cb] \\
&= \sum \overline{\alpha_r [E_r bc]} + \sum \overline{\alpha_r [E_r cb]} && [44] \\
&= \sum \overline{\alpha_r ([E_r bc] + [E_r cb])} && [12, 4] \\
&= \sum \overline{\alpha_r 0} && [52] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Es seien b und c aus den Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ numerisch abgeleitet, und sei

$$b = \sum \overline{\beta_r e_r}, \quad c = \sum \overline{\gamma_r e_r},$$

so ist

Hosted by Google

$$\begin{aligned}[Abc] + [Acb] &= [A\overline{\sum \beta_r e_r}\,\overline{\sum \gamma_r e_r}] + [A\overline{\sum \gamma_r e_r}\,\overline{\sum \beta_r e_r}] \\ &= \overline{\sum \beta_r \gamma_s [A e_r e_s]} + \overline{\sum \gamma_s \beta_r [A e_s e_r]} && [46] \\ &= \overline{\sum \beta_r \gamma_s ([A e_r e_s] + [A e_s e_r])} && [12] \\ &= \overline{\sum \beta_r \gamma_s \cdot 0} && [\text{Beweis } 1] \\ &= 0.\end{aligned}$$

54. In einem kombinatorischen Produkte kann man beliebige zwei aufeinander folgende einfache Faktoren vertauschen, wenn man zugleich das Zeichen $(\overline{+})$ umkehrt, d. h.

$$[AbcD] + [AcbD] = 0,$$

wenn A und D beliebige Faktorenreihen, b und c einfache Faktoren sind.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}[AbcD] + [AcbD] &= [[Abc]D] + [[Acb]D] && [38] \\ &= [([Abc] + [Acb])D] && [40] \\ &= 0 \cdot D && [53] \\ &= 0.\end{aligned}$$

55. In einem kombinatorischen Produkte kann man beliebige zwei einfache Faktoren vertauschen, wenn man zugleich das Zeichen $(\overline{+})$ umkehrt, d. h.

$$P_{a,b} = -P_{b,a}, \text{ oder } P_{a,b} + P_{b,a} = 0.$$

Beweis. Angenommen, zwischen a und b stehen in $P_{a,b}$ noch n einfache Faktoren. Vertauscht man jetzt b mit dem nächst vorhergehenden Faktor, d. h. rückt man b um eine Stelle nach links, so ändert sich (nach 54) das Zeichen; rückt man also b nach und nach über die n Faktoren hinweg, welche ursprünglich zwischen a und b standen, so ändert sich das Zeichen n-mal, jetzt folgt b unmittelbar auf a, vertauscht man jetzt a mit b, so ändert sich das Zeichen noch einmal. Jetzt steht b auf der Stelle, wo ursprünglich a stand; um nun auch a auf die Stelle zu bringen, wo ursprünglich b stand, hat man nun noch a um n Stellen nach rechts zu rücken, wobei sich das Zeichen noch n-mal ändert. Im Ganzen hat es sich $2n + 1$ mal geändert; durch die 2n-malige Aenderung wird das Zeichen aber wieder das ursprüngliche, und da nun noch die einmalige Aenderung hinzukommt, so ist das letzte Zeichen dem ursprünglichen entgegengesetzt, also

$$P_{a,b} = -P_{b,a}, \text{ oder } P_{a,b} + P_{b,a} = 0.$$

Hosted by Google

56. Erklärung. Wenn von zwei Grössenreihen jede die Grössen a und b enthält, und zwar jede derſelben einmal, und in beiden Reihen a früher steht als b, oder in beiden b früher steht als a, ſo ſage ich, dieſe beiden Grössen ſeien in jenen Reihen gleich geordnet, hingegen ſie ſeien in jenen Reihen entgegengeſetzt geordnet, wenn in der einen a früher steht als b, in der andern b früher als a.

57. Zwei kombinatorische Produkte, welche dieſelben einfachen Faktoren (aber in verschiedener Folge) enthalten, ſind einander gleich oder entgegengeſetzt, je nachdem die Anzahl der in beiden Produkten einander entgegengeſetzt geordneten Faktorenpaare gerade oder ungerade ist, d. h.

$$P = (-1)^r Q,$$

wenn P und Q kombinatorische Produkte ſind, welche dieſelben einfachen Faktoren enthalten, und wenn r die Anzahl der Faktorenpaare ist, welche in P entgegengeſetzt geordnet ſind, wie in Q.

Beweis. Wenn zuerst je zwei Faktoren, welche in dem einen Produkte, etwa in Q, unmittelbar aufeinander folgen, in beiden Produkten gleich geordnet ſind, ſo leuchtet ein, dass dann beide Produkte identisch ſind, und ſie alſo kein entgegengeſetzt geordnetes Faktorenpaar enthalten können. So lange es daher in Q noch Faktorenpaare giebt, welche entgegengeſetzt geordnet ſind, wie in P, ſo giebt es auch noch mindestens zwei Faktoren, welche in Q unmittelbar aufeinander folgen, und welche in Q entgegengeſetzt geordnet ſind wie in P. Angenommen, a und b ſeien zwei ſolche Faktoren. Vertauscht man ſie untereinander, ſo erhält man ein Produkt Q_1, welches dem Produkte Q (nach 54) entgegengeſetzt bezeichnet ist, und in welchem alle Faktorenpaare, mit Ausnahme des Faktorenpaares a, b, ebenſo geordnet ſind wie in Q, während dies Faktorenpaar a, b in Q_1 entgegengeſetzt geordnet ist wie in Q, alſo ebenſo geordnet wie in P. Alſo ist die Anzahl der Faktorenpaare, welche in Q_1 und P entgegengeſetzt geordnet ſind, um 1 kleiner, als die Anzahl derer, welche in Q und P entgegengeſetzt geordnet ſind. Ist dieſe letztere Anzahl alſo r, ſo ist die erstere $r - 1$. Ist

Hosted by Google

nun $r-1$ noch nicht null, d. h. giebt es noch Faktorenpaare, welche in Q_1 und P entgegengefetzt geordnet find, fo kann man mit Q_1 wieder fo verfahren wie vorher mit Q; man erhalte dadurch aus Q_1 das Produkt Q_2, fo ist $Q_2 = -Q_1$, alfo $= (-1)^2 Q$, und die Anzahl der Faktorenpaare, welche in Q_2 und P entgegengefetzt geordnet find, ist $r-2$. Fährt man in diefer Weife fort, bis man zu Q_r gelangt, fo wird $Q_r = (-1)^r Q$, und die Anzahl der Faktorenpaare, die in Q_r und P entgegengefetzt geordnet find, beträgt $r-r$, alfo null, d. h. die Faktorenpaare in Q_r und P find fämmtlich gleich geordnet, alfo $Q_r = P$, fomit $P = Q_r = (-1)^r Q$.

58. Wenn man in einem kombinatorischen Produkte eine Reihe von r einfachen Faktoren mit einer unmittelbar darauf folgenden Reihe von s einfachen Faktoren vertauscht (ohne im Uebrigen die Ordnung der Faktoren zu ändern), fo ist das fo hervorgehende Produkt dem urfprünglichen gleich oder entgegengefetzt, je nachdem rs gerade oder ungerade ist, d. h.

$$[BC] = (-1)^{rs}[CB], \quad [ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

wo B eine Reihe von r, C von s einfachen Faktoren darstellt.

Beweis. Es fei $C = c_1 c_2 \cdots c_s$, alfo

$$[ABC] = [ABc_1 c_2 \cdots c_s].$$

Vertauscht man nun c_1 mit dem letzten einfachen Faktor von B, d. h. rückt man c_1 um Eine Stelle vor, fo ändert fich (nach 55) das Vorzeichen des ganzen Produktes; rückt c_1 alfo um s einfache Faktoren vor, d. h. rückt man ihn vor die Faktoren von B, fo ändert fich das Zeichen r mal, alfo wird

$$\begin{aligned}
[ABc_1 c_2 \cdots c_s] &= (-1)^r [Ac_1 Bc_2 c_3 \cdots c_s], \text{ alfo dies} \\
&= (-1)^r (-1)^r [Ac_1 c_2 Bc_3 \cdots c_s] \\
&= (-1)^{2r} [Ac_1 c_2 Bc_3 \cdots c_s] \\
&= (-1)^{3r} [Ac_1 c_2 c_3 Bc_4 \cdots c_s] \text{ u. f. w.} \\
&= (-1)^{sr} [Ac_1 c_2 \cdots c_s B] \text{ oder}
\end{aligned}$$

$$[ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

und wenn man hierin $A = 1$ fetzt

$$[BC] = (-1)^{rs}[CB].$$

59. Wenn man in einem kombinatorischen Produkte eine Reihe von q einfachen Faktoren mit einer durch r ein-

Hosted by Google

fache Faktoren getrennten Reihe von s einfachen Faktoren vertauscht, so ist das so hervorgehende Produkt dem ursprünglichen gleich oder entgegengesetzt, je nachdem $rs + sq + qr$ gerade oder ungerade ist, d. h.

$$[ABC] = (-1)^{rs+sq+qr}[CBA],$$

wo A, B, C Reihen von beziehlich q, r, s einfachen Faktoren darstellen.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}[ABC] &= (-1)^{(q+r)s}[CAB] && [57]\\ &= (-1)^{qs+rs}(-1)^{qr}[CBA] && [57]\\ &= (-1)^{rs+sq+qr}[CBA].\end{aligned}$$

60. Wenn zwei einfache Faktoren eines kombinatorischen Produktes einander gleich sind, so ist das Produkt null, d. h.

$$P_{a,a} = 0.$$

Beweis. Es sei $P_{a,b}$ irgend ein kombinatorisches Produkt, welches die Faktoren a und b enthält, und $P_{b,a}$ das durch Vertauschung von a und b aus ihm hervorgehende, so ist (nach 55)

$$P_{a,b} + P_{b,a} = 0,$$

also, wenn a gleich b ist,

$$P_{a,a} + P_{a,a} = 0, \text{ d. h. } 2P_{a,a} = 0,$$

somit auch $P_{a,a} = 0$.

61. Ein kombinatorisches Produkt ist null, wenn zwischen seinen einfachen Faktoren eine Zahlbeziehung herrscht, d. h.

$$[a_1 a_2 a_3 \cdots a_m] = 0,$$

wenn eine der Grössen $a_1 \cdots a_m$ sich aus den übrigen numerisch ableiten lässt, z. B.

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots \alpha_m a_m$$

ist.

Beweis. Man erhält, indem man den Werth von a_1 in das Produkt einsetzt

$$\begin{aligned}[a_1 a_2 a_3 \cdots a_m] &= [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots \alpha_m a_m) a_2 a_3 \cdots a_m], \text{ also}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(nach 44)}\\ &= \alpha_2[a_2 a_2 a_3 \cdots a_m] + \alpha_3[a_3 a_2 a_3 \cdots a_m] + \cdots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_m[a_m a_2 a_3 \cdots a_m]\\ &= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots \alpha_m \cdot 0 && [59]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Hosted by Google

62. Erklärung. Unter der Determinante aus n Reihen von je n Zahlen versteht man, wenn man die r-te Zahl der s-ten Reihe mit $\alpha_r^{(s)}$ bezeichnet, dasjenige Polynom, welches man aus dem Produkte $\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)}$ dadurch erhält, dass man in ihm nach und nach die unteren Indices auf alle möglichen Arten verfetzt, während man die oberen unverändert lässt, dann jedes diefer Produkte mit dem + oder — Zeichen verfieht, je nachdem die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche unten entgegengefetzt geordnet find wie oben, gerade oder ungerade ist und diefe fämmtlichen Glieder addirt. Man bezeichnet diefe Determinante mit $\sum \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{n}$, d. h. man fetzt

$$\sum \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)} = \sum (-1)^u \alpha_r^{(1)}\alpha_s^{(2)}\cdots\alpha_w^{(n)},$$

wo r, s, ···· w die Zahlen 1, 2 ···· n, in irgend einer Ordnung genommen, gleich find, wo die Summe fich auf alle möglichen Ordnungen diefer Art bezieht, und u die Anzahl der Index-Paare bezeichnet, welche unten entgegengefetzt geordnet find, wie oben.

Anmerk. Der Vollständigkeit wegen habe ich diefen Begriff der Determinante hier aufstellen zu müssen geglaubt, zumal da es zweckmässig schien, die Zeichenbestimmung in der einfachen Form, wie fie hier dargestellt ist, festzufetzen, während die fonst gebräuchliche, durch Cauchy eingeführte Form der Zeichenbestimmung ein Zurückgehen auf die Permutations-Gefetze nothwendig machen würde. Dass man übrigens statt der unteren Indices auch die oberen vertauschen kann, leuchtet ein, doch ist es unangemessen, eine folche zwiefache Bestimmung in eine strenge Definition aufzunehmen.

63. Das kombinatorische Produkt von n einfachen Faktoren, welche aus n Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ numerisch abgeleitet find, erhält man, indem man aus den n Reihen von Zahlen, durch welche jene Faktoren aus den n Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ abgeleitet find, die Determinante bildet, und diefe mit dem kombinatorischen Produkte der Grössen $a_1 \cdots a_n$ multiplicirt, wobei nämlich die Zahlen, durch welche der erste jener Faktoren aus $a_1 \cdots a_n$ abgeleitet ist, die erste Reihe bilden, u. f. f., d. h. es ist

$$[\alpha_1^{(1)}a_1 + \cdots \alpha_n^{(1)}a_n)(\alpha_1^{(2)}a_1 + \cdots \alpha_n^{(2)}a_n)\cdots(\alpha_1^{(n)}a_1 + \cdots \alpha_n^{(n)}a_n)]$$
$$= \sum \mp \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)}\cdots\alpha_n^{(n)} \cdot [a_1 a_2 \cdots a_n].$$

Hosted by Google

Beweis. Es ist (nach 65) das Produkt auf der linken Seite

$$= \sum \overline{\alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \cdots \alpha_w^{(n)} [a_r a_s \cdots a^w]},$$

wo jeder der Indices r, s, ··· w nach und nach jeden der Werthe 1 ··· n annehmen foll. Sind von diefen Werthen zwei oder mehrere einander gleich, fo enthält das Produkt $[a_r a_s \cdots a^w]$ gleiche Faktoren, ist alfo (nach 60) null. Lassen wir daher die Glieder, welche diefe Produkte enthalten, weg, fo bleiben nur die übrig, in denen die n Indices r, s, ··w in irgend welcher Ordnung den Werthen 1, 2, ··· n gleich find. Es ist alfo dann (nach 57) das Produkt $[a_r a_s \cdots a^w]$ gleich $(-1)^u [a_1 a_2 \cdots a_n]$, wenn u die Anzahl der Faktorenpaare ist, welche in dem Produkte $[a_r a_s \cdots a^w]$ entgegengefetzt geordnet find wie in $[a_1 a_2 \cdots a_n]$, d. h. die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche in dem Produkte $\alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \cdots \alpha_w^{(n)}$ unten entgegengefetzt geordnet find wie oben, fomit ist das gegebene Produkt

$$= \sum \overline{(-1)^u \alpha_r^{(1)} \alpha_s^{(2)} \cdots \alpha_w^{(n)}} [a_1 a_2 \cdots a_n], \text{ d. h. (nach 62)}$$
$$= \sum \mp \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \cdots \alpha_n^n \cdot [a_1 a_2 \cdots a_n].$$

64. Erklärung. Unter multiplikativen Kombinationen aus einer Reihe von Grössen verstehe ich die Kombinationen ohne Wiederholung aus diefen Grössen, und zwar jede Kombination aufgefasst als kombinatorisches Produkt, dessen einfache Faktoren die Elemente der Kombination find; fo z. B. find [ab], [ac], [bc] die multiplikativen Kombinationen aus den Grössen a, b, c zur zweiten Klasse.

65. Jedes kombinatorische Produkt von m einfachen Faktoren, welche aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitet find, ist aus den multiplikativen Kombinationen diefer Grössen zur m-ten Klasse numerisch ableitbar, und zwar ist die zu irgend einer diefer Kombinationen gehörige Ableitungszahl die Determinante aus denjenigen m Ableitungszahlen jener m Faktoren, welche zu den m Elementen diefer Kombination gehören, d. h.

$$[\sum \overline{\alpha_a a_a} \sum \overline{\beta_b a_b} \cdots] = \sum \overline{\sum \mp \alpha_r \beta_s \cdots [a_r a_s \cdots]},$$

wo $r < s < \cdots$.

Hosted by Google

Beweis. Es ist

$$[\sum \alpha_a a_a \sum \beta_b a_b \cdots] = \sum (\alpha_a \beta_b \cdots)[a_a a_b \cdots] \quad [45].$$

Da (nach 60) $[a_a a_b \cdots]$ null ist, ſobald zwei der Faktoren, alſo hier zwei der Indices $a, b, \cdots$ gleich ſind, ſo können wir die Bedingung hinzufügen, dass $a, b, \cdots$ alle von einander verſchieden ſeien. Nun ſeien $a, b, \cdots$, nachdem ſie ſteigend geordnet ſind, $= r, s, t \cdots$, alſo $r < s < t \cdots$, und ſei u die Anzahl der Grössenpaare, welche in der Reihe $a, b, c, \cdots$ entgegengeſetzt geordnet ſind, wie in r, s, t, $\cdots$, ſo iſt $[a_a a_b \cdots] = (-1)^u [a_r a_s \cdots]$, ſomit iſt das gegebene Produkt

$$= \sum \alpha_a \beta_b \cdots (-1)^u [a_r a_s \cdots].$$

Aber nach der Definition (60) iſt $\sum (-1)^u \alpha_a \beta_b \cdots$, wenn $a, b, \cdots$ in irgend einer Ordnung genommen, gleich r, s, $\cdots$ ſind, gleich der Determinante $\sum \mp \alpha_r \beta_s \cdots$, alſo

$$[\sum \alpha_a a_a \sum \beta_b a_b \cdots] = \sum \sum \mp \alpha_r \beta_s \cdots [a_r a_s \cdots],$$

wo $r < s < \cdots$.

66. Umkehrung von 61. Wenn ein kombinatoriſches Produkt null iſt, ſo ſtehen ſeine einfachen Faktoren in einer Zahlbeziehung zu einander, d. h. wenn

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0$$

iſt, ſo muss ſich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_m a_m = 0$$

aufſtellen laſſen, in welcher die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ nicht alle zugleich null ſind.

Beweis. Es ſei das kombinatoriſche Produkt

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0.$$

Zu zeigen iſt, dass $a_1, a_2, \cdots a_m$ in einer Zahlbeziehung ſtehen müſſen.

Angenommen, ſie ſtänden in keiner Zahlbeziehung zu einander. Bilden dann $e_1 \cdots e_n$ das System der Einheiten, aus denen $a_1 \cdots a_n$ numeriſch abgeleitet ſind, ſo kann man (nach 20) zu den m Grössen $a_1 \cdots a_m$ noch n — m Grössen $a_{m+1} \cdots a_n$ annehmen, ſo ſich aus $a_1 \cdots a_n$ die Einheiten $e_1 \cdots e_n$ numeriſch ableiten laſſen. Führt man die Ausdrücke dieſer Ableitungen in das kombinatoriſche Produkt $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ ein,

Hosted by Google

und löst die Klammern auf, so erhält man (nach 63) eine Gleichung der Form

$$[e_1e_2\cdots e_n] = \alpha[a_1a_2\cdots a_n],$$

wo α eine Zahl ist. Nun ist aber $[a_1a_2\cdots a_m] = 0$, also auch $[a_1a_2\cdots a_ma_{m+1}\cdots a_n] = 0$, also

$$[e_1e_2\cdots e_n] = \alpha\cdot 0 = 0.$$

Dies widerstreitet aber der Erklärung in 52, nach welcher $[e_1e_2\cdots e_n]$ von null verschieden ist. Also ist die Annahme, dass $a_1\cdots a_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, unmöglich. Sie stehen also in einer Zahlbeziehung zu einander.

67. Ein kombinatorisches Produkt ändert seinen Werth nicht, wenn man zu einem einfachen Faktor desselben ein beliebiges Vielfaches eines andern einfachen Faktors desselben Produktes addirt, d. h.

$$P_{a,\,b+qa} = P_{a,\,b},$$

wenn q eine Zahl ist und P ein kombinatorisches Produkt bezeichnet.

Beweis. Es ist

$$P_{a,\,b+qa} = P_{a,\,b} + qP_{a,\,a} \qquad [44]$$
$$= P_{a,\,b} \qquad [60].$$

68. Die sämmtlichen Sätze kombinatorischer Multiplikation bleiben noch bestehen, wenn man statt der n ursprünglichen Einheiten, beliebige n aus ihnen abgeleitete Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, einführt.

Beweis. Erstens gelten alle in der Definition des kombinatorischen Produktes gegebenen Bestimmungen, auch wenn man statt des Systems der n ursprünglichen Einheiten n solche Grössen setzt, wie sie der Lehrsatz bestimmt. Nämlich, es ist auch für diesen Fall (nach 53)

$$[Abc] + [Acb] = 0,$$

und das Produkt der sämmtlichen n Grössen ist von null verschieden, denn wäre es gleich null, so müsste (nach 66) zwischen den n Faktoren eine Zahlbeziehung herrschen, gegen die Voraussetzung. Diese beiden Bestimmungen waren nun die einzigen in der Definition enthaltenen. Ferner gelten aber auch alle in den ersten beiden Kapiteln entwickelten Gesetze für den Fall jener Substitution. Aus jener Definition und

Hosted by Google

diefen Gefetzen waren aber die fämmtlichen Gefetze der kombinatorischen Multiplikation abgeleitet. Alfo gelten diefe Gefetze auch nach jener Substitution.

§. 2. Das kombinatorische Produkt als Grösse.

Vorbemerkung. Wenn eine Verknüpfung von Grössen wieder als Eine Grösse erkannt werden foll, fo müssen die folgenden Fragen beantwortet werden: Wann find zwei folche Verknüpfungen einander gleich oder von einander verschieden? wann stehen fie in einer Zahlbeziehung zu einander, und in welcher? Für die Vollendung des Begriffs wird es dann noch wichtig fein, die fämmtlichen verschiedenen Grössenreihen ableiten zu können, deren jede, wenn fie der fraglichen Verknüpfung unterworfen wird, diefelbe Grösse liefert, wie die andern. Diefe Fragen follen hier für das kombinatorische Produkt beantwortet werden, wobei wir den Begriff der multiplikativen Kombinationen zu Grunde legen.

69. Wenn die Grössen $a_1, a_2, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo stehen auch ihre multiplikativen Kombinationen zu einer beliebigen Klasse in keiner Zahlbeziehung zu einander, d. h. die Gleichung

$$\text{a)} \quad \alpha A + \beta B + \cdots = 0,$$

in welcher A, B, $\cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$ zu irgend einer Klasse find, und $\alpha, \beta, \cdots$ Zahlen bedeuten, wird erfetzt durch die Gleichungsgruppe

$$\text{b)} \quad \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \cdots.$$

Beweis. Es fei die Gleichung (a) als geltend angenommen. Man multiplicire die ganze Gleichung kombinatorisch mit denjenigen unter den Grössen $a_1 \cdots a_n$, welche in dem Produkte A nicht vorkommen; es fei A_1 diefe Faktorenreihe, fo dass alfo das kombinatorische Produkt $[AA_1]$ die fämmtlichen Grössen $a_1 \cdots a_n$ als Faktoren enthält. Dann erhält man

$$\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \cdots = 0.$$

Da nun A und B verschiedene Kombinationen find, fo muss B wenigstens einen Faktor enthalten, der nicht in A enthalten ist. Es fei a_r ein folcher; fo muss a_r in A_1 enthalten fein, da A_1 von den Faktoren $a_1 \cdots a_n$ alle diejenigen

Hosted by Google

enthält, die in A nicht vorkommen. Somit kommt a_r fowohl in B als in A_1 vor, folglich ist das kombinatorische Produkt $[BA_1]$ (nach 60) null. Aus demfelben Grunde auch CA_1 u. f. w. Somit reducirt fich die Gleichung auf

$$\alpha[AA_1] = 0.$$

Alfo muss (nach 12, 6) entweder α oder $[AA_1]$ null fein. Da nun $[AA_1]$ ein kombinatorisches Produkt von n Grössen $a_1 \cdots a_n$ ist, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo ist dasfelbe ungleich null (nach 66). Somit muss der andere Faktor, alfo α, null fein. Aus demfelben Grunde find $\beta, \cdots$ null, d. h. zwischen den Kombinationen A, B, $\cdots$ herrscht keine Zahlbeziehung.

70. Zwei kombinatorische Produkte (A und B), die nicht null find, stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete identisch find; d. h.

a) $A \equiv B$

dann und nur dann, wenn die einfachen Faktoren von A dasfelbe Gebiet liefern wie die von B; oder:

b) $[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m]$

dann und nur dann, wenn fich jede aus $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbare Grösse auch aus $b_1 \cdots b_m$ ableiten lässt, alfo wenn stets

c) $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots y_m b_m$

gefetzt werden kann, welche Werthe auch entweder $x_1 \cdots x_m$, oder $y_1 \cdots y_m$ haben mögen.

Beweis 1. Angenommen zuerst, das Gebiet $a_1 \cdots a_m$ fei identisch dem Gebiete $b_1 \cdots b_m$, fo find die Grössen $a_1 \cdots a_m$ aus $b_1 \cdots b_m$ numerisch ableitbar. Dann ist (nach 63)

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m],$$

wo α eine Zahl ist (nämlich die dort beschriebene Determinante). Diefe Gleichung drückt aus, dass die beiden kombinatorischen Produkte in Zahlbeziehung stehen und da auch keins von beiden null ist, fo gilt (nach 2) die Kongruenz:

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m].$$

2. Umgekehrt fei angenommen, diefe Kongruenz gelte, alfo die beiden kombinatorischen Produkte stehen in einer Zahlbeziehung zu einander ohne null zu fein, und fei

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha[b_1 b_2 \cdots b_m].$$

Hosted by Google

Man füge auf beiden Seiten den kombinatorischen Faktor b_1 hinzu, so erhält man

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = \alpha [b_1 b_2 \cdots b_m b_1].$$

Aber $[b_1 b_2 \cdots b_m b_1]$ ist, da es zwei gleiche Faktoren (b_1) enthält, (nach 60) null; also ist auch

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = 0.$$

Folglich stehen (nach 66) die einfachen Faktoren dieses Produktes, d. h. a_1, $a_2, \cdots a_m$, b_1 in einer Zahlbeziehung zu einander. Also muss sich (nach 16) eine Gleichung der Form

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 = 0$$

aufstellen lassen, in welcher die Zahlen α_1, $\alpha_2, \cdots \alpha_m$, β_1 nicht alle zugleich null sind. In dieser Gleichung kann auch β_1 nicht null sein, weil sonst zwischen den Grössen $a_1, a_2, \cdots a_m$ (nach 16) eine Zahlbeziehung herrschen, also das kombinatorische Produkt $[a_1 a_2 \cdots a_m]$ (nach 61) null sein müsste, was der Voraussetzung widerstreitet. Wenn nun aber β_1 ungleich null ist, so kann man die obige Gleichung durch β_1 dividiren, und erhält

$$b_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\beta_2} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_m} a_m,$$

d. h. b_1 ist aus $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbar. Aus demselben Grunde sind auch $b_2, b_3, \cdots b_m$ aus $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbar. Nun stehen aber auch $b_1, \cdots b_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, weil sonst das kombinatorische Produkt $[b_1 b_2 \cdots b_m]$ (nach 61) null sein müsste, was der Voraussetzung widerstreitet; also sind m Grössen $b_1 \cdots b_m$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus m Grössen $a_1 \cdots a_m$ numerisch ableitbar, folglich ist (nach 21) das aus der ersten Grössenreihe ableitbare Gebiet dem aus der zweiten ableitbaren identisch.

Anm. Da zwei gleiche Grössen immer in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so folgt aus dem vorhergehenden Satze unmittelbar, dass zwei gleiche kombinatorische Produkte immer ein und dasselbe Gebiet haben, dem seine einfachen Faktoren angehören, und dass daher ausser diesem Gebiete nur noch der durch eine Zahl darstellbare metrische Werth gegeben zu sein braucht, damit der ganze Werth des kombinatorischen Produktes genau bestimmt sei. Ist nämlich dann in dem Gebiete irgend ein kombinatorisches Produkt gegeben, aus dessen einfachen Faktoren dasselbe ableitbar ist, so wird

Hosted by Google

jedes andere kombinatorische Produkt, aus deſſen einfachen Faktoren dasſelbe Gebiet ableitbar iſt, durch eine einfache Zahl beſtimmt ſein, welche das Verhältniss dieſes Produktes zu jenem darſtellt.

71. Erklärung. Wenn man aus einer Reihe von Grössen eine zweite Reihe dadurch ableitet, dass man zu irgend einer Grösse der Reihe ein Vielfaches der benachbarten Grösse der Reihe addirt, während man alle übrigen Grössen der Reihe ungeändert lässt, ſo ſage ich, es ſei die erſte Reihe in die zweite durch eine einfache lineale Aenderung umgewandelt; leitet man aus dieſer zweiten Reihe wieder durch einfache lineale Aenderung eine dritte ab, u. ſ. f., ſo ſage ich, es ſei die erſte Reihe in die letzte durch mehrfache lineale Aenderung umgewandelt. In beiden Fällen alſo ſage ich, es ſei die erſte Reihe in die letzte durch lineale Aenderung umgewandelt.

Wenn alſo p und q irgend zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe ſind, ſo lässt ſich durch einfache lineale Aenderung umwandeln die Reihe

$$\cdots p,\ q, \cdots \text{ in } \cdots\cdots p + \alpha q,\ q \cdots$$
$$\text{oder in } \cdots\cdots p,\ q + \alpha p, \cdots,$$

wo α eine beliebige Zahl ist.

Anm. Die Wahl des Ausdrucks bezieht ſich auf den Gegenſatz zu einer weiter unten zu behandelnden Aenderung, welche ich circuläre Aenderung nenne. Beide Ausdrücke gehen auf die Geometrie zurück und zwar auf die beiden Fundamentalgebilde der Geometrie, die gerade Linie und den Kreis, oder vielmehr auf das Lineal und den Zirkel, indem, wie ich ſpäter zeigen werde, die lineale Aenderung in der Geometrie ſich einfach mittelſt des Lineals, die circuläre mittelſt des Zirkels bewerkſtelligen lässt.

72. Bei der linealen Aenderung einer Grössenreihe bleibt das kombinatorische Produkt dieſer Grössenreihe ungeändert.

Beweis. Nach 67 ändert ein kombinatoriſches Produkt ſeinen Werth nicht, wenn man zu einem Faktor ein beliebiges Vielfaches eines andern Faktors desſelben addirt, alſo ändert es ſeinen Werth nicht bei einfacher linealer Aenderung ſeiner Faktoren, alſo auch nicht bei mehrfacher.

73. Man kann durch lineale Aenderung zwei beliebige Grössen einer Reihe beliebig im umgekehrten Verhältniss

Hosted by Google

ändern; d. h. es lässt ſich durch lineale Aenderung umwandeln die Reihe

$$\cdots\cdot p\cdots\cdot q\cdots\cdot \text{ in } \cdots\cdot \alpha p\cdots\cdot \frac{q}{\alpha}\cdots\cdot.$$

Beweis. Erstens ſeien p und q zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe, ſo lässt ſich (nach 71) durch lineale Aenderung nach und nach verwandeln:

p, q in p, $q+(\alpha-1)p$, dies wieder in $p+q+(\alpha-1)p$, $q+(\alpha-1)p$, d. h. in $\alpha p+q$, $q+(\alpha-1)p$;

dies in $\alpha p+q$, $q+(\alpha-1)p-\frac{\alpha-1}{\alpha}(\alpha p+q)$, d. h.

in $\alpha p+q$, $\frac{q}{\alpha}$, und dies endlich in $\alpha p+q-q$, $\frac{q}{\alpha}$,

d. h. in αp, $\frac{q}{\alpha}$.

Zweitens: Sind p und q durch die Grössen $p_1, p_2, \cdots p_n$ getrennt, ſo verwandelt ſich durch lineale Aenderung, indem man die im ersten Theil als zulässig erwieſene Umwandlung anwendet,

$$p, p_1, p_2, \cdots p_n, q \text{ in } \alpha p, \frac{p_1}{\alpha}, p_2\cdots\cdot p_n, q,$$

$$\text{dies in } \alpha p, p_1, p_2:\alpha, p_3\cdots\cdot p_n, q,$$

und, indem man ſo fortfährt, ſo erhält man zuletzt

$$\alpha p, p_1, p_2, \cdots p_n, \frac{q}{\alpha}, \text{ d. h.}$$

$$p\cdots\cdot q\cdots \text{ geht über in } \cdots\alpha p\cdots\cdot\frac{q}{\alpha}\cdots\cdot.$$

74. Aus einer beliebigen Grössenreihe kann man durch lineale Aenderung jede andere Reihenfolge derſelben Grössen ableiten, vorausgeſetzt, dass man für den Fall, dass das kombinatoriſche Produkt der abgeleiteten Grössenreihe dem der urſprünglichen entgegengeſetzt ist, das Vorzeichen von einer der Grössen der neuen Reihe ändert; d. h. wenn $a', b', c', \cdots$ dieſelben Grössen ſind wie $a, b, c, \cdots$, nur in anderer Reihenfolge, ſo lässt ſich durch lineale Aenderung umwandeln:

$$a, b, c, \cdots\cdot \text{ in } a', b', c', \cdots$$

$$\text{wenn } [abc\cdots] = [a'b'c'\cdots]$$

ist, hingegen

Hosted by Google

$a, b, c, \cdots$ in $-a', b', c', \cdots$
wenn $[abc\cdots] = -[a'b'c'\cdots]$

ist.

Beweis 1. Wenn p und q zwei beliebige Grössen jener Reihe find, fo verwandeln fich durch lineale Aenderung, indem man nämlich abwechfelnd zum ersten und zweiten Faktor beziehlich den zweiten und ersten addirt und fubtrahirt, Schritt für Schritt

p, q in $p + q, q$, dies in $p + q, q - (p + q)$,
d. h. in $p + q, -p$, dies in $q, -p$.

2. Man kann alfo durch lineale Aenderung zwei aufeinander folgende Grössen der Reihe in die umgekehrte Ordnung bringen, wenn man nur das Vorzeichen der einen ändert. Somit kann man auch durch lineale Aenderung jede Grösse der Reihe auf jede Stelle bringen, bei gehöriger Zeichenänderung. Es feien nun $a', b', c', \cdots$ diefelben Grössen wie $a, b, c, \cdots$ aber in anderer Reihenfolge, fo wird man die Reihe $a, b, c, \cdots$ durch lineale Aenderung in eine Reihe umwandeln können, deren Grössen der Reihe nach mit $a', b', c' \cdots$ entweder gleich oder ihnen entgegengefetzt find. Nun kann man (nach 73) durch lineale Aenderung zwei beliebige Grössen p, q einer Reihe im umgekehrten Verhältniss ändern, d. h. fo ändern, dass, wenn die eine Grösse p in αp übergeht, dann die andere q in $\frac{q}{\alpha}$ übergehe; alfo kann man namentlich die zuletzt gefundene Reihe fo ändern, dass jede beliebige Grösse p derfelben, welche einer der Grössen a, b, $c, \cdots$ entgegengefetzt ist, in $(-1)p$, d. h. in $-p$, übergeht, während die erste Grösse jener Reihe, nämlich $\mp a'$ in $\mp \frac{a'}{-1}$, d. h. in $\pm a'$ übergeht. Wendet man diefe Aenderung nach und nach auf jede Grösse jener Reihe an, welche einer der Grössen a, b, $c, \cdots$ entgegengefetzt ist, nur nicht auf die erste Grösse $\mp a'$ jener Reihe, fo erhält man zuletzt entweder die Reihe

$a', b', c', \cdots\cdots$ oder $-a', b', c' \cdots$,

wo noch das Vorzeichen von a' zu bestimmen ist. Da nun

Hosted by Google

diese Reihe aus a, b, c, $\cdots$ durch lineale Aenderung hervorgegangen ist, so muss (nach 72) im ersten Falle

$$[abc\cdots\cdots] = [a'b'c'\cdots\cdots],$$

im zweiten

$$[abc\cdots\cdots] = [-a'b'c'\cdots\cdots] = -[a'b'c'\cdots\cdots]$$

sein.

75. Wenn man zu irgend einer Grösse (p) einer Grössenreihe ein Vielfaches einer andern Grösse (q) jener Reihe addirt, also statt p setzt $p + \alpha q$, während man alle übrigen Grössen jener Reihe unverändert lässt, so lässt sich die so hervorgehende Reihe aus der ursprünglichen durch lineale Aenderung ableiten, d. h. es lässt sich durch lineale Aenderung umwandeln

$$p, \cdots\cdots, q \text{ in } p + \alpha q, \cdots\cdots q, \text{ oder auch}$$
$$\text{in } p, \cdots\cdots\cdots, q + \alpha p.$$

Beweis. Wenn in der gegebenen Reihe zwischen p und q keine Grösse steht, so folgt das zu erweisende unmittelbar aus der Definition [71]. Stehen zwischen p und q die Grössen $p_1, p_2, \cdots p_n$, so ist (nach 73) durch lineale Aenderung umzuwandeln

$$p, p_1, p_2, \cdots p_n, q \text{ in } p, q, p_1, p_2 \cdots \mp p_n; \text{ und dies (nach 71)}$$
$$\text{in } p + \alpha q, q, p_1, p_2, \cdots \mp p_n; \text{ dies wieder (nach 74)}$$
$$\text{in } p + \alpha q, p_1, p_2, \cdots p_n, \mp q,$$

wo das Vorzeichen von q noch zu bestimmen ist. Da die letzte Reihe aus der ersten durch lineale Aenderung hervorgegangen ist, so ist das kombinatorische Produkt der ersten Reihe (nach 72) dem der letzten gleich; also

$$[p p_1 p_2 \cdots\cdots p_n q] = [(p + \alpha q) p_1 p_2 \cdots p_n (\mp q)]$$
$$= \mp [(p + \alpha q) p_1 p_2 \cdots p_n q].$$

Aber es ist (nach 65)

$$[p p_1 p_2 \cdots p_n q] = + [(p + \alpha q) p_1 p_2 \cdots p_n q],$$

d. h. es gilt in der vorigen Formel das $+$Zeichen, also haben wir statt $\mp q$, zu setzen q, d. h. die gewonnene Reihe ist $p + \alpha q, p_1, p_2, \cdots p_n, q$. Es verwandelt sich also durch lineale Aenderung

$$p \cdots\cdots q \text{ in } p + \alpha q, \cdots\cdots q,$$

Hosted by Google

und auf diefelbe Weife folgt, dass fich auch durch lineale Aenderung umwandeln lässt

$$p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q \text{ in } p, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q + \alpha p.$$

76. Wenn zwei von null verschiedene kombinatorische Produkte einander gleich find, fo lassen fich die einfachen Faktoren des einen aus denen des andern durch lineale Aenderung ableiten, d. h. wenn

(a) $[abc \cdot \cdot \cdot \cdot] = [ABC \cdot \cdot \cdot \cdot] \gtrless 0$

ist, fo lässt fich durch lineale Aenderung die Grössenreihe

(b) a, b, c, $\cdot \cdot \cdot \cdot$ in A, B, C, $\cdot \cdot \cdot \cdot$

umwandeln [Umkehrung von 72].

Beweis. Da die von null verschiedenen kombinatorischen Produkte $[abc \cdot \cdot \cdot]$ und $[ABC \cdot \cdot \cdot]$ einander gleich find, und fie alfo in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, fo müssen (nach 70) die aus ihren einfachen Faktoren ableitbaren Gebiete identisch fein; d. h. die aus der Grössenreihe a, b, c, $\cdot \cdot \cdot$ numerisch ableitbaren Grössen müssen auch aus A, B, C, $\cdot \cdot \cdot$ numerisch ableitbar fein und umgekehrt. Alfo müssen namentlich A, B, C, $\cdot \cdot \cdot$ felbst, aus a, b, c, $\cdot \cdot \cdot$ numerisch ableitbar fein. In den Ausdrücken diefer Ableitung darf nicht der Koefficient von irgend einer der Grössen a, b, c, $\cdot \cdot \cdot$, z. B. der von a, in allen gleichzeitig null fein; denn fonst wären die Grössen A, B, C, $\cdot \cdot \cdot$, deren Anzahl n fei, aus den $n - 1$ Grössen b, c, $\cdot \cdot \cdot$ ableitbar; alfo würde (nach 22) eine Zahlbeziehung zwischen ihnen herrschen, ihr Produkt alfo (nach 61) null fein, gegen die Annahme. Es fei a′ eine der Grössen A, B, C, $\cdot \cdot \cdot$ und zwar eine folche, in deren Ableitungsausdruck der Koefficient von a nicht null fei, und fei

$$a' = \alpha_1 a + \beta_1 b + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

wo alfo $\alpha_1 \gtrless 0$ ist; fo lässt fich durch lineale Aenderung nach und nach umwandeln

$$a, b, c, \cdot \cdot \cdot, l \text{ in } \alpha_1 a, b, c, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, \frac{1}{\alpha_1} \quad [72],$$

$$\text{dies in } (\alpha_1 a + \beta_1 b + \cdot \cdot \cdot \cdot), b, c, \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\alpha_1} \quad [74],$$

$$\text{d. h. in } a', b, c, \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{1}{\alpha_1}.$$

Hosted by Google

Nun muss aber (nach 19) das aus a′, b, c, ···· ableitbare Gebiet identisch fein dem aus a, b, c, ··· ableitbaren, alfo müssen namentlich die Grössen A, B, C···· aus a′, b, c, ···· ableitbar fein. Nun ist es wieder, aus demfelben Grunde wie vorher, unmöglich, dass der Koefficient von b in allen Ausdrücken diefer Ableitung zugleich null fei. Es fei b′ eine der Grössen A, B, C, ··· und zwar eine folche, in der jener Koefficient nicht null ist, und fei

$$b' = \alpha_2 a' + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots,$$

fo lässt fich durch lineale Aenderung, auf diefelbe Weife wie vorher, a′, b, c, $\cdots\cdots \frac{1}{\alpha_1}$ umwandeln

$$\text{in } a', b', c \cdots\cdots \frac{1}{\alpha_1\beta_2}.$$

Ebenfo fei $c' = \alpha_3 a' + \beta_3 b' + \gamma_3 c + \delta_3 d + \cdots$, wo γ_3 ungleich null ist, fo lässt fich wieder durch lineale Aenderung a′, b′, c, $\cdots \frac{1}{\alpha_1\beta_2}$ umwandeln

$$\text{in } a', b', c', d, \cdots\cdots \frac{1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3}.$$

Auf diefe Weife fahre man fort bis zur vorletzten Grösse. Diefe fei k, fo erhält man zuletzt die Grössenreihe

$$a', b', c', \cdots, k', \frac{1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3\cdots\varkappa_{n-1}}.$$

Da nun diefe Grössenreihe aus der urfprünglichen a, b, c, ··· hervorgegangen ist; fo muss (nach 72) ihr kombinatorisches Produkt gleich dem jener Grössenreihe fein; alfo

$$\left[a'b'c'\cdots\cdots k'\frac{1}{\alpha_1\beta_2\gamma_3\cdots\varkappa_{n-1}}\right] = [abc\cdots\cdots kl].$$

Ferner find die n — 1 Grössen a′, b′, c′, ···· k′ aus der Reihe der n Grössen A, B, C, ···· K, L entnommen, und da a′, b′, c′, ··· k′ alle von einander verschieden fein müssen, weil fonst (nach 61) das kombinatorische Produkt derfelben null wäre, was vermöge der fo eben entwickelten Gleichung mit der Vorausfetzung streitet, fo kann von den Grössen A, B, C, ··· K, L nur noch eine übrig fein, welche nicht unter den Grössen a′, b′, c′ ···· k′ enthalten ist. Dies fei l′ und

Hosted by Google

ſei $l = \alpha_n a' + \beta_n b' + \cdots + \varkappa_n k' + \lambda_n l'$, ſo verwandelt ſich die zuletzt gewonnene Reihe durch lineale Aenderung in

$$a',\ b',\ c' \cdots k',\ \frac{\lambda_n l'}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 \cdots \varkappa_{n-1}}.$$

Die Grössenreihe a′, b′, c′, ···· k′, l′ enthält aber dieſelben Grössen, wie die Reihe A, B, C, ··· K, L, nur in anderer Ordnung; alſo iſt (nach 74) a′, b′, c′, ···· k′, l′ durch lineale Aenderung umzuwandeln in A, B, C, ··· K, $\mp$ L, alſo auch

$$a',\ b',\ c',\ \cdots,\ k',\ \frac{\lambda_n l'}{\alpha_1\beta_2 \cdots \varkappa_{n+1}}$$

$$\text{in } A,\ B,\ C, \cdots,\ K, \mp \frac{\lambda_n L}{\alpha_1\beta_2 \cdots \varkappa_{n-1}},$$

indem es (nach 73) gleichgültig iſt, zu welcher Grösse man den Zahlfaktor $\frac{\mp \lambda_n}{\alpha_1\beta_2 \cdots \varkappa_{n-1}}$ hinzufügt. Es ſei dieſer Zahlfaktor $= \varepsilon$, ſo iſt alſo durch lineale Aenderung aus a, b, c, ···· k, l schliesslich hervorgegangen A, B, l, ··· K, εL. Alſo iſt (nach 72)

$$[abc \cdots kl] = [ABC \cdots K\varepsilon L] = \varepsilon[ABC \cdots KL].$$

Es iſt aber auch nach der Hypotheſis

$$[abc \cdots kl] = [ABC \cdots KL].$$

Alſo auch

$$\varepsilon[ABC \cdots KL] = [ABC \cdots KL],$$

d. h. $\varepsilon = 1$, alſo iſt $\varepsilon L = L$, und ſomit hat ſich durch lineale Aenderung umgewandelt die Reihe:

a, b, c, ···· k, l in A, B, C, ··· K, L,

eine Umwandlung, deren Möglichkeit zu erweiſen war.

77. Erklärung. Die multiplikativen Kombinationen der urſprünglichen Einheiten zur m-ten Klaſſe, nenne ich Einheiten m-ter Stufe, eine aus dieſen Einheiten numerisch abgeleitete Grösse, eine Grösse m-ter Stufe, und zwar eine einfache, wenn ſie ſich als kombinatorisches Produkt von m Grössen erster Stufe darſtellen lässt, eine zuſammengeſetzte, wenn dies nicht möglich iſt. Das aus den einfachen Faktoren einer einfachen Grösse ableitbare Gebiet, nenne ich das dieſer Grösse zugehörige Gebiet, kurz das Gebiet dieſer Grösse. Ich nenne endlich eine einfache Grösse A einer andern übergeordnet, untergeordnet,

Hosted by Google

oder mit ihr incident, je nachdem dies von den Gebieten dieſer Grössen gilt (vergl. No. 15).

77b. Zuſatz. Ein kombinatorisches Produkt aus m Grössen erster Stufe ist eine einfache Grösse m-ter Stufe, und ist aus den Einheiten m-ter Stufe numerisch ableitbar.

Anm. Als Beiſpiel einer zuſammengeſetzten Grösse führe ich hier die Summe (ab) + (cd) an, wenn a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen ſind. Sollte nämlich (ab) + (cd) eine einfache Grösse, etwa = (pq) ſein, ſo müsste $[(ab + cd)(ab + cd)] = [pq\,pq] = 0$ ſein (nach 60); aber $[(ab + cd)(ab + cd)] = (abcd) + (cdab)$, da [ab ab] und [cd cd] null ſind. Aber (nach 58) ist (abcd) = (cdab). Alſo $[(ab + cd)(ab + cd)] = 2(abcd)$. Somit müsste, wenn (ab) + (cd) eine einfache Grösse wäre, (abcd) = 0 ſein, alſo (nach 66) a, b, c, d in einer Zahlbeziehung stehen, was der Vorausſetzung widerstreitet.

§. 3. Aeussere Multiplikation von Grössen höherer Stufen.

78. Erklärung. Zwei Einheiten höherer Stufe äusserlich multipliciren, heisst die einfachen Faktoren derſelben, ohne ihre Reihenfolge zu verändern, kombinatorisch multipliciren, d. h.

$$[(e_1e_2\cdots e_m)(e_{m+1}\cdots e_n)] = [e_1e_2\cdots e_n].$$

Anm. Den Namen der äusseren Multiplikation habe ich gewählt, um zu bezeichnen, dass das Produkt nur dann geltenden Werth hat, wenn der eine Faktor ganz ausserhalb des Gebietes der andern liegt. Es steht der äusseren Multiplikation die innere (ſ. Kap. 4) gegenüber.

79. Statt eine einfache Grösse A mit einer andern B äusserlich zu multipliciren, kann man nach der Reihe die einfachen Faktoren der ersten mit denen der zweiten kombinatorisch multipliciren, d. h.

$$[(ab\cdots)(c\cdot d\cdots)] = [a\cdot b\cdots c\cdot d\cdots].$$

Beweis. Es ſeien $e_1\cdots e_n$ die urſprünglichen Einheiten, und ſei

$$a = \sum \overline{\alpha_a e_a},\quad b = \sum \overline{\beta_b e_b}\cdots\quad c = \sum \overline{\gamma_c e_c},\quad d = \sum \overline{\delta_b e_b},\cdots$$

ſo ist

$$\begin{aligned}&[(ab\cdots)(cd\cdots)]\\ &= [(\sum \overline{\alpha_a e_a}\sum \overline{\beta_b e_b}\cdots)(\sum \overline{\gamma_c e_c}\sum \overline{\delta_b e_b}\cdots)]\\ &= [\sum \alpha_a\beta_b\cdots\overline{[e_a e_b\cdots]}\sum \gamma_c\delta_b\cdots\overline{[e_c e_b\cdots]}] \qquad [45]\end{aligned}$$

Hosted by Google

$$= \sum \alpha_a \beta_b \cdots \gamma_c \delta_c \cdots [(e_a e_b \cdots)(e_c e_b \cdots)] \quad [42]$$
$$= \sum \alpha_a \beta_b \cdots \gamma_c \delta_c \cdots [e_a e_b \cdots e_c e_b \cdots] \quad [78]$$
$$= [\sum \alpha_a e_a \sum \beta_b e_b \cdots \sum \gamma_c e_c \sum \delta_b e_b \cdots] \quad [45]$$
$$= [ab \cdots cd \cdots].$$

79b. Zuſatz. Wenn eine einfache Grösse A, welche nicht null ist, einer andern B, welche gleichfalls nicht null ist, untergeordnet ist, ſo lässt ſich die letztere als äusseres Produkt darstellen, dessen einer Faktor A und dessen anderer Faktor eine einfache Grösse C ist, alſo in der Form

$$B = [AC].$$

Beweis. Nach **77** ist A dem B untergeordnet, wenn das Gebiet von A dem von B untergeordnet ist, d. h. (nach 15) wenn jede Grösse des ersten Gebietes zugleich Grösse des zweiten ist. Es ſei $A = [a_1 a_2 \cdots a_m]$, wo $a_1 \cdots a_m$ Grössen erster Stufe ſind, ſo stehen dieſe, da A ungleich null ſein ſoll, in keiner Zahlbeziehung zu einander (61). Ferner ſei $B = [b_1 \cdots b_n]$. Da nun die Grössen $a_1 \cdots a_m$ dem Gebiete B angehören ſollen, ſo müssen ſie aus $b_1 \cdots b_n$ numerisch ableitbar ſein. Dann aber kann man (nach 20) zu den Grössen $a_1 \cdots a_m$ noch $(n - m)$ Grössen $a_{m+1} \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass die Gebiete $a_1 \cdots a_n$ und $b_1 \cdots b_n$ identisch ſind. Ist aber dies der Fall, ſo müssen (nach 70) die Produkte $[a_1 \cdots a_n]$ und $[b_1 \cdots b_n]$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Es ſei

$$[b_1 \cdots b_n] = \alpha[a_1 \cdots a_n] = \alpha[(a_1 \cdots a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n] = [(a_1 \cdots a_m) \cdot (\alpha a_{m+1} \cdots a_n)] \quad [79].$$

Alſo wenn noch

$$\alpha[a_{m+1} \cdots a_n] = C$$

geſetzt wird, ſo wird

$$B = [AC].$$

80. Die Klammerſetzung in einem äusseren Produkt ist gleichgültig für das Reſultat, d. h.

$$[A(BC)] = [ABC].$$

Beweis 1. Es ſeien A, B, C einfache Grössen, $A = [a_1 \cdots a_q]$, $B = [b_1 \cdots b_r]$, $C = [c_1 \cdots c_s]$, ſo ist

$$[A(BC)] = [a_1 \cdots a_q((b_1 \cdots b_r)(c_1 \cdots c_s))] = [a_1 \cdots a_q(b_1 \cdots b_r c_1 \cdots c_s)] \quad [79]$$

Hosted by Google

$$= [a_1 \cdots a_q b_1 \cdots b_r c_1 \cdots c_s] \qquad [79]$$
$$= [(a_1 \cdots a_q)(b_1 \cdots b_r)(c_1 \cdots c_s)] \qquad [79]$$
$$= [ABC].$$

2. Es seien A, B, C Summen einfacher Grössen, $A = \sum \overline{A_a}$, $B = \sum \overline{B_b}$, $C = \sum \overline{C_c}$, so ist

$$[A(BC)] = [\sum \overline{A_a}(\sum \overline{B_b} \sum \overline{C_c})] = \sum \overline{A_a (B_b C_c)} \qquad [45]$$
$$= \sum \overline{A_a B_b C_c} \qquad [\text{Beweis } 1]$$
$$= [\sum \overline{A_a} \sum \overline{B_b} \sum \overline{C_c}] \qquad [45]$$
$$= [ABC].$$

81. Wenn $a_1 \cdots a_m$, $b_1 \cdots b_n$ Grössen erster Stufe sind, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und A aus $a_1 \cdots a_m$ durch Addition und Multiplikation hervorgegangen ist und B aus $b_1 \cdots b_n$, und

$$[AB] = 0$$

ist, so muss entweder $A = 0$ oder $B = 0$ sein.

Beweis. Es sei A von α-ter Stufe, B von β-ter Stufe, und seien $A_1, A_2, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ zur α-ten Klasse, $B_1, B_2, \cdots$ die zur β-ten Klasse aus $b_1 \cdots b_n$, so sind (nach 77) A und B darstellbar in den Formen

$$A = \sum \overline{\alpha_a A_a}, \quad B = \sum \overline{\beta_b B_b},$$

also ist

$$[AB] = \sum \overline{\alpha_a \beta_b [A_a B_b]}.$$

Hier sind die $[A_a B_b]$ als multiplikative Kombinationen von $a_1 \cdots a_m$, $b_1 \cdots b_n$ zu betrachten. Sie stehen also (nach 69) in keiner Zahlbeziehung zu einander. Also ist (nach 34)

$$\alpha_r \beta_s = 0$$

für jedes r und s; also wenn $B \gtrless 0$ ist, d. h. irgend eine der Grössen β_s ungleich null ist, so folgt, $\alpha_r = 0$ für jedes r, d. h. $A = 0$.

82. Wenn eine Summe S einfacher Grössen mit einer von null verschiedenen Grösse erster Stufe a äusserlich multiplicirt null giebt, so lässt sich die erstere (S) als äusseres Produkt darstellen, in welchem a ein Faktor ist, d. h. in der Form

$$S = [aP], \text{ wenn } [aS] = 0.$$

Hosted by Google

Beweis. Es ſei S eine Summe von Grössen m-ter Stufe, und ſeien $e_1, e_2, \cdots e_n$ die urſprünglichen Einheiten, ſo kann man (nach 20) zu a stets noch $(n-1)$ andere Grössen b, c, $\cdots$ der Art hinzufügen, dass ſich die Grössen $e_1 \cdots e_n$ aus a, b, c, $\cdots$ numerisch ableiten lassen. Dann lässt ſich auch jeder einfache Faktor in jeder der Grössen m-ter Stufe, deren Summe S ist, aus a, b, c, $\cdots$ numerisch ableiten. Alſo lässt ſich jede dieſer Grössen, und alſo auch ihre Summe S, aus den multiplikativen Kombinationen zur m-ten Klasse aus a, b, c, $\cdots$ ableiten. Es ſeien nun $[aB_1], [aB_2], \cdots$ diejenigen unter dieſen Kombinationen, welche a enthalten, und $C_1, C_2, \cdots$ diejenigen unter ihnen, welche a nicht enthalten, und ſei

$$S = \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots + \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots.$$

Da nun nach der Annahme $[aS] = 0$ ſein ſoll, ſo hat man

$$0 = [aS] = \gamma_1[aC_1] + \gamma_2[aC_2] + \cdots,$$

da $[aaB_1], [aaB_2], \cdots$ null ſind. Da nun a nicht in $C_1, C_2, \cdots$ enthalten ist, ſo ſind $[aC_1], [aC_2], \cdots$ multiplikative Kombinationen, ſtehen alſo in keiner Zahlbeziehung zu einander. Somit folgt aus der obigen Gleichung, $0 = \gamma_1[aC_1] + \gamma_2[aC_2] + \cdots$, dass $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ alle null ſind (nach 16). Folglich ist

$$S = \beta_1[aB_1] + \beta_2[aB_2] + \cdots$$
$$= [a(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots)] = [aP], \text{ wenn}$$
$$P = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots$$

geſetzt wird.

83. Wenn eine Summe S einfacher Grössen mit jeder von m, in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehenden Grössen erſter Stufe $a_1, \cdots a_m$ äusſerlich multiplicirt null giebt, ſo lässt ſich S als äusſeres Produkt darſtellen, in welchem $a_1 \cdots a_m$ Faktoren ſind, d. h. in der Form

$$S = [a_1 a_2 \cdots a_m S_m],$$
$$\text{wenn } 0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \cdots = [a_m S_m].$$

Beweis. Es ſeien $e_1 \cdots e_n$ die urſprünglichen Einheiten, ſo laſſen ſich (nach 20) zu $a_1 \cdots a_m$ noch $n - m$ andere Grössen $a_{m+1} \cdots a_n$ der Art hinzufügen, dass ſich $e_1 \cdots e_n$ aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten laſſen. Demnach laſſen ſich auch alle in S vorkommenden Grössen erſter Stufe aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten. Nun ist angenommen $[a_1 S] = 0$, folglich lässt ſich

Hosted by Google

(nach 82) S in der Form $S = [a_1 S_1]$ darstellen. Hier ist S_1 wieder eine Summe einfacher Grössen. Stellt man die einfachen Faktoren diefer Grössen als Vielfachenfumme von $a_1 \cdots a_n$ dar, fo kann man, ohne den Werth der Produkte zu ändern, (nach 67) in allen diefen Vielfachenfummen das Glied, was a_1 enthält, weglassen. Nachdem dies geschehen, habe fich S_1 in P_1 verwandelt, fo ist

$$S = [a_1 S_1] = [a_1 P_1],$$

wo P_1 nur aus den Grössen $a_2 \cdots a_n$ hervorgegangen ist (kein a_1 enthält). Nun ist ferner $[a_2 S] = 0$, d. h.

$$0 = [a_2 a_1 P_1], \text{ oder (nach 55) } [a_1 a_2 P_1] = 0.$$

Da nun $a_2 P_1$ nur aus den Grössen $a_2 \cdots a_n$ erzeugt ist, fo muss (nach 81) entweder a_1 oder $[a_2 P_1]$ null fein. Das erste ist gegen die Annahme, alfo $a_2 P_1 = 0$. Somit muss P_1 in der Form $[a_2 S_2]$ darstellbar fein; hier kann wieder in S_2 die Grösse a_2 fortgeschafft werden, ohne den Werth des Produktes $a_2 S_2$ zu ändern; es fei $P_1 = [a_2 S_2] = [a_2 P_2]$, wo P_2 nur noch aus $a_3 \cdots a_n$ erzeugt ist (ohne a_1 und a_2), fo ist $S = [a_1 a_2 P_2]$. Dann ist $[a_3 S] = 0$, alfo $[a_3 a_1 a_2 P_2] = 0$, oder

$$[a_1 a_2 a_3 P_2] = 0.$$

Da nun $[a_3 P_2]$ nur aus $a_3 \cdots a_n$ erzeugt find, fo muss (nach 81) entweder $[a_1 a_2]$ null fein, oder $[a_3 P_2]$. Ersteres ist nicht möglich, weil fonst (nach 61) zwischen a_1 und a_2 eine Zahlbeziehung herrschen würde, gegen die Vorausfetzung. Es muss alfo $[a_3 P_2] = 0$, alfo P_2 in der Form darstellbar $P_2 = [a_3 P_3]$, wo wieder P_3 nur aus $a_4 \cdots a_n$ erzeugbar ist u. f. f., bis endlich

$$S = [a_1 a_2 \cdots a_m S_m]$$

wird.

84. Wenn eine Summe S von Grössen m-ter Stufe mit jeder von m Grössen erster Stufe $a_1 \cdots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, äusserlich multiplicirt null giebt, fo ist S dem äusseren Produkte diefer m Grössen kongruent, d. h. wenn

$$0 = [a_1 S] = \cdots = [a_m S], \text{ fo ist } S \equiv [a_1 \cdots a_m].$$

Beweis. Dann ist (nach 83) S in der Form $[a_1 \cdots a_m S_m]$ darstellbar, hier muss, da S ein Ausdruck m-ter Stufe ist,

Hosted by Google

S_m von nullter Stufe, alſo eine Zahl ſein und dann können wir (nach 2) ſtatt $S = [a_1 \cdots a_m S_m]$ ſchreiben

$$S \equiv [a_1 \cdots a_m].$$

85. Wenn es $m + 1$ Grössen $a_1 \cdots a_{m+1}$ giebt, deren jede mit einer Summe S von Grössen m-ter Stufe äusserlich multiplicirt null giebt, ſo ist entweder $S = 0$ oder $[a_1 \cdots a_{m+1}] = 0$.

Beweis. Geſetzt, es ſei $[a_1 \cdots a_{m+1}]$ nicht null, alſo auch $[a_1 \cdots a_m]$ nicht null, alſo $a_1 \cdots a_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehend, ſo ist, da auch $[a_1 S] = [a_2 S] \cdots = [a_m S] = 0$ ist, (nach 84) $S = \alpha[a_1 \cdots a_m]$. Nun ſoll aber auch $[a_{m+1} S] = 0$, alſo $\alpha[a_1 \cdots a_{m+1}] = 0$, alſo, da $[a_1 \cdot \cdot a_{m+1}]$ nach der Annahme von null verschieden ist, ſo muss $\alpha = 0$, alſo auch $S = \alpha[a_1 \cdots a_m] = 0$, d. h. es ist entwender $[a_1 \cdots a_{m+1}]$ oder S null.

§. 4. Ergänzung der Grössen in Bezug auf ein Hauptgebiet.

86. Erklärung. Hauptgebiet nenne ich das Gebiet der urſprünglichen Einheiten, aus welchen alle der Betrachtung unterworfenen Grössen hervorgegangen ſind.

87. Zwei einfache Grössen A und B lassen ſich, wenn die Summe ihrer Stufenzahlen die des Hauptgebietes um γ übertrifft, in der Form darstellen

$$A = [CA_1], \quad B = [CB_1],$$

wenn C eine einfache Grösse von γ-ter Stufe ist.

Beweis. Es ſei α die Stufenzahl von A, β die von B, n die des Hauptgebietes, alſo

$$\alpha + \beta = n + \gamma.$$

Dann haben (nach 26) die Gebiete A und B mindestens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$-ter, alſo γ-ter Stufe gemein. Es ſei C eine Grösse γ-ter Stufe dieſes Gebietes, ſo ist C ſowohl der Grösse A, als der Grösse B untergeordnet, alſo (nach 79b) A in der Form $[CA_1]$ und B in der Form $[CB_1]$ darstellbar.

88. Einfache Grössen $(n - 1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe geben zur Summe wieder eine einfache Grösse $(n-1)$-ter Stufe.

Hosted by Google

Beweis. Es seien A und B die beiden Grössen (n — 1)-ter Stufe, welche in einem Hauptgebiete n-ter Stufe liegen; so müssen sie, da die Summe (2n — 2) ihrer Stufenzahlen die des Hauptgebietes um n — 2 übertrifft, (nach 87) in der Form

$$A = [Ca], \quad B = [Cb]$$

darstellbar sein, wo C eine Reihe von n — 2 einfachen Faktoren erster Stufe darstellt, a und b aber Faktoren erster Stufe sind, also

$$A + B = [Ca] + [Cb] = [C(a + b)] \qquad [44].$$

Hier ist a + b, als Summe zweier Grössen erster Stufe, wieder eine Grösse erster Stufe, also ist A + B als kombinatorisches Produkt von n — 1 Grössen erster Stufe darstellbar, also selbst eine Grösse (n — 1)-ter Stufe.

Anm. Hat man in einem Hauptgebiete n-ter Stufe zwei Grössen A und B, deren Stufenzahlen grösser als 1 und kleiner als n — 1 sind, so giebt ihre Summe im Allgemeinen nicht mehr eine einfache Grösse. So z. B. lässt sich, wenn a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe sind, die Summe S = ab + cd nicht mehr in Form eines kombinatorischen Produktes von Faktoren erster Stufe darstellen. In der That müsste dann (nach 60)

$$[SS] = 0$$

sein, also

$$0 = [SS] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd] + [cdab],$$

da [abab] und [cdcd] (nach 60) null sind. Aber da (nach 58) [cdab] = [abcd] ist, so hätte man dann

$$0 = 2[abcd],$$

d. h. es müsste [abcd] null sein, also (nach 66) a, b, c, d in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, gegen die Voraussetzung. Also ist S dann nicht in Form eines kombinatorischen Produktes von Grössen erster Stufe darstellbar, und ist also dann eine zusammengesetzte Grösse.

89. Erklärung. Wenn in einem Hauptgebiete n-ter Stufe das kombinatorische Produkt der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ gleich 1 gesetzt ist, und E eine Einheit beliebiger Stufe, d. h. entweder eine der ursprünglichen Einheiten oder ein kombinatorisches Produkt von mehreren derselben ist, so nenne ich „Ergänzung von E“ diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte E′ aller in E nicht vorkommenden Einheiten gleich oder entgegengesetzt ist, je nachdem [EE′] der absoluten Einheit gleich oder entgegengesetzt ist; ich bezeichne die Ergänzung einer Grösse

Hosted by Google

durch einen vor das Zeichen der Grösse gefetzten vertikalen Strich, alfo die von E durch |E. Die Ergänzung einer Zahl fetze ich diefer Zahl gleich; alfo:

$$|E = [EE']E',$$

wenn E und E′ die einfachen Faktoren $e_1 \cdots e_n$ enthalten und

$$[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$$

ist; und

$$|\alpha = \alpha,$$ wenn α eine Zahl ist.

Anm. Bei der Definition ist vorausgefetzt, dass [EE′] nur entweder $+1$ oder -1 fein könne. In der That, da E und E′ kombinatorische Produkte der urſprünglichen Einheiten find und E′ alle in E fehlenden Einheiten enthält, fo unterſcheidet fich [EE′] von $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ nur durch die Folge feiner Faktoren, und beide find alfo (nach 57) einander entweder gleich oder entgegengefetzt, alfo da $[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$ ist, fo ist $[EE'] = \mp 1$.

90. Erklärung. Unter der Ergänzung einer beliebigen Grösse A verſtehe ich diejenige Grösse |A, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke, welcher die numerische Ableitung jener Grösse aus den Einheiten darſtellt, ſtatt jeder diefer Einheiten ihre Ergänzung fetzt, d. h.

$$|(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots) = \alpha_1 |E_1 + \alpha_2 |E_2 + \cdots,$$

wo $E_1, E_2, \cdots$ Einheiten beliebiger Stufen find.

Zufatz. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes und α die der Grösse A ist, fo ist $n - \alpha$ die der Ergänzung.

Anm. Der vertikale Strich erſcheint alfo nach diefen Definitionen mit den Eigenſchaften eines Faktors. Es hat diefer Faktor, wie fich weiter unten zeigen wird, eine auffallende Analogie mit dem imaginären Ausdruck $\sqrt{-1}$, fo dass man ihn unter gewiſſen Umſtänden dadurch erfetzen kann. Den vertikalen Strich habe ich gewählt, um darauf hinzudeuten, dass, wie ich unten zeigen werde, diefe Ergänzung geometrisch durch das auf einem gegebenen Gebilde fenkrecht ſtehende Gebilde dargeſtellt wird.

91. Das äuſſere Produkt einer Einheit in ihre Ergänzung ist 1, d. h.

$$[E|E] = 1.$$

Beweis. Wenn E′ das kombinatorische Produkt aller in E nicht enthaltenen urſprünglichen Einheiten ist, fo ist (nach 89)

$$|E = \mp E',$$ je nachdem $[EE'] = \mp 1$.

Alfo wenn das untere Zeichen gilt, fo ist

$$[E|E] = [EE'] = 1$$

Hosted by Google

und wenn das obere gilt, ſo ist

$$[E|E] = -[EE'] = -(-1) = 1.$$

92. Die Ergänzung der Ergänzung einer Grösse A ist dieſer Grösse A gleich oder entgegengeſetzt, je nachdem das Produkt der Stufenzahlen dieſer Grösse einerſeits und ihrer Ergänzung andrerſeits gerade oder ungerade ist, d. h.

$$||A = (-1)^{qr}A,$$

wenn q die Stufenzahl von A und r die von |A ist.

Beweis. Angenommen ſei zuerst, dass A ein kombinatorisches Produkt der ursprünglichen Einheiten ſei, und B = |A ſeine Ergänzung, ſo enthält nach der Definition B alle die Einheiten, welche dem A fehlen, und zwar ſo, dass A|A = 1, alſo

$$AB = 1$$

ist. Die Ergänzung von B wiederum ist, da A alle Einheiten enthält die der Grösse B fehlen, (nach 90) der Grösse A gleich oder entgegengeſetzt, je nachdem BA der abſoluten Einheit gleich oder entgegengeſetzt ist; nun ist (nach 58) $BA = (-1)^{qr}AB$, wenn q und r die Stufenzahlen von A und B ſind; alſo, da AB = 1 ist,

$$BA = (-1)^{qr},$$

ſomit auch die Ergänzung von B gleich + A oder − A, je nachdem $(-1)^{qr}$ gleich + 1 oder − 1 ist, d. h.

$$|B = (-1)^{qr}A.$$

Aber B war gleich |A angenommen, ſomit

$$||A = (-1)^{qr}A,$$

wenn A ein kombinatorisches Produkt der ursprünglichen Einheiten ist.

Es ſei zweitens A eine beliebige Grösse q-ter Stufe, ihre Ergänzung von r-ter Stufe, und ſei

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots,$$

wo $E_1, E_2, \cdots$ kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ Zahlen ſind, ſo ist (nach 90)

$$|A = \alpha_1|E_1 + \alpha_2|E_2 + \cdots,$$

ſomit, da $|E_1, |E_2$ wieder Einheitsprodukte ſind,

$$||A = \alpha_1||E_1 + \alpha_2||E_2 + \cdots.$$

Nun ſind $E_1, E_2, \cdots$ von gleicher Stufe mit A, alſo von

Hosted by Google

q-ter Stufe, und ihre Ergänzungen von r-ter Stufe; alfo ist nach dem ersten Theile des Beweifes $\|E_1 = (-1)^{qr}E_1$, $\|E_2 = (-1)^{qr}E_2$ u. f. w., fomit

$$\|A = (-1)^{qr}(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots)$$
$$= (-1)^{qr}A.$$

93. Ist die Stufenzahl (n) des Hauptgebietes ungerade, fo ist

$$\|A = A.$$

Ist n gerade, fo ist

$$\|A = (-1)^q A,$$

wenn q die Stufenzahl von A ist.

Beweis. Denn dann ist die Stufenzahl von |A gleich (n — q), alfo (nach 92) $\|A = (-1)^{q(n-q)}A$. Ist nun n ungerade, fo ist entweder q oder n — q gerade, alfo $(-1)^{q(n-q)} = 1$ und alfo dann $\|A = A$. Ist n gerade, fo ist q(n — q) gerade oder ungerade, je nachdem q es ist, alfo dann $(-1)^{q(n-q)} = (-1)^q$, und $\|A = (-1)^q A$.

Anm. Sind q und r beide ungerade, wie z. B. wenn man die Ergänzungen von Grössen erster Stufe in einem Gebiet zweiter Stufe betrachtet, fo wird $\|A = -A$, fo dass alfo in diefem Falle das Zeichen | denfelben Gefetzen unterliegt wie $i = \sqrt{-1}$, und wir erhalten daher hier eine reelle Bedeutung des Imaginären. Es wird fich bei der Anwendung auf die Geometrie zeigen, dass Strecken, d. h. Linien von bestimmter Richtung und Länge als Grössen erster Stufe zu betrachten find, und dass in Bezug auf fie die Ebene als Gebiet zweiter Stufe erscheint, fo dass alfo hier der obenerwähnte Fall, wo $\|A = -A$ ist, eintritt. Ich werde zeigen, dass die Ergänzung einer Strecke, wenn man als urfprüngliche Einheiten zwei gegeneinander fenkrechte Strecken von gleicher Länge annimmt, die auf ihr fenkrechte Strecke ist, und man fieht daher schon hier, dass die reelle Bedeutung, die wir hier dem Imaginären beilegen, genau der geometrischen Bedeutung desfelben, wie fie von Gauss zuerst aufgefasst wurde, entspricht; nur dass diefe Bedeutung hier in allgemeinerer Form hervortritt.

§. 5. Produkt in Bezug auf ein Hauptgebiet.

94. Erklärung. Wenn die Summe der Stufenzahlen zweier Einheiten kleiner oder ebenfo gross ist als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, fo verstehe ich unter ihrem progressiven Produkte ihr äusseres Produkt, jedoch mit der

Hosted by Google

Bestimmung, dass das progressive Produkt der n ursprünglichen Einheiten 1 sei. Hingegen, wenn die Summe der Stufenzahlen zweier Einheiten grösser ist als die Stufenzahlen (n) des Hauptgebietes, so verstehe ich unter ihrem regressiven (eingewandten) Produkte diejenige Grösse, deren Ergänzung das progressive Produkt der Ergänzungen jener Einheiten ist. Das progressive und regressive Produkt fasse ich zusammen unter dem Namen des auf ein Hauptgebiet bezüglichen Produktes. Die Bezeichnung ist für alle diese Produkte dieselbe, nämlich die einer das Produkt umschliessenden Klammer. Also

$$|[EF] = [|E|F],$$

wenn die Summe der Stufenzahlen von E und F kleiner ist als die Stufe (n) des Hauptgebietes, und

$$[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1,$$

wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ die Reihe der ursprünglichen Einheiten ist.

Anm. Auf die hier behandelte Multiplikation und auf die algebraische lassen sich alle Multiplikationen, die überhaupt für die Wissenschaft von Interesse sind, zurückführen. Es kommt daher nur darauf an, diese beiden Multiplikationsgattungen von einander durch die Bezeichnung unzweideutig zu unterscheiden. Wenn man bei der algebraischen Multiplikation alle überflüssigen Klammern vermeidet, also nie ein algebraisches Produkt, welches mit einer andern Grösse durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division verbunden werden soll, durch eine Klammer umschliesst, so wird eine in diesen Fällen angewandte Klammer stets ein unzweideutiges Zeichen der bezüglichen Multiplikation sein. In denjenigen Fällen, wo das algebraische Produkt so verknüpft wird, dass eine Klammersetzung nöthig wird, also wenn das Produkt potenzirt oder logarithmirt werden soll, oder in ein Funktionzeichen (wozu auch Summenzeichen, Differenzialzeichen u. s. w. gerechnet werden können) einrückt, so wird wieder alle Zweideutigkeit gehoben, wenn man in diesem Falle entweder für die bezügliche Multiplikation zwei Klammern anwendet, oder, was bequemer erscheint, für diese Fälle dem algebraischen Produkte stets die runde Klammer, dem bezüglichen die eckige zuweist, während man in den erstgenannten Fällen nach Bequemlichkeit über beide verfügt. Es ist noch zu erwähnen, dass die gewählte Bezeichnung für die verschiedenen Arten der bezüglichen Multiplikation, sobald das Hauptgebiet bekannt ist, durchaus zureichend ist und keinen Verwechselungen Raum giebt, und dass die Rechnungsgesetze überall dieselben sind, und nur noch von den Stufenzahlen der zu verknüpfenden Grössen und von der des Hauptgebietes abhängen.

Hosted by Google

95. Wenn q und r die Stufenzahlen zweier Grössen A und B ſind, und n die des Hauptgebietes, ſo ist die Stufenzahl des Produktes [AB] erstens gleich $q + r$, wenn $q + r$ kleiner als n ist, zweitens gleich $q + r - n$, wenn $q + r$ grösser oder ebenſo gross als n ist, in beiden Fällen alſo kongruent der Summe der Stufenzahlen in Bezug auf den Modul. n, d. h. wenn

$C = [AB]$, ſo ist

$s \equiv q + r$ (Modul. n),

wo q, r, s, n beziehlich die Stufenzahlen von A, B, C und vom Hauptgebiete ſind.

Beweis. Ist $q + r < n$ und $A = [a_1 a_2 \cdots a_q]$, $B = [b_1 b_2 \cdots b_r]$, wo $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ Grössen erster Stufe ſind, ſo ist [AB] als progressives Produkt zu betrachten, alſo

$$C = [AB] = [(a_1 a_2 \cdots a_q) \cdot (b_1 b_2 \cdots b_r)]$$
$$= [a_1 a_2 \cdots a_q b_1 b_2 \cdots b_r] \quad [79],$$

alſo (nach 77) die Stufenzahl des Produktes $= q + r$. Wenn $q + r = n$ ist, ſo wird, da (nach 94) das Produkt der n Einheiten $= 1$ geſetzt ist, und alſo auch das Produkt von n Grössen erster Stufe eine Zahl wird, die Zahlen aber (nach 77) als Grössen nullter Stufe aufzufassen ſind, die Stufenzahl des Produktes gleich 0, alſo $= q + r - n$. Wenn endlich $q + r$ grösser als n ist, ſo ist (nach 94), wenn A und B Einheiten beliebiger Stufen ſind,

$|C = [|A|B]$.

Aber (nach 90) ſind die Stufenzahlen von |A, |B, |C gleich $n - q$, $n - r$, $n - s$; nun ist $n - q + n - r = n - (q + r - n)$, alſo kleiner als n, ſomit ist (nach dem ersten Theile des Beweiſes) die Stufenzahl des Produktes [|A|B] gleich der Summe der Stufenzahlen ſeiner Faktoren, alſo

$n - s = n - q + n - r$, d. h. $s = q + r - n$.

Somit gilt das zu erweiſende Geſetz für den Fall, dass A, B, C Einheiten beliebiger Stufen ſind. Da nun aber jede aus den Einheiten numerisch abgeleitete Grösse mit den Einheiten von gleicher Stufe ist, ſo gilt der Satz auch für beliebige Grössen.

96. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, ſo ist die Stufenzahl eines beliebigen auf dies Gebiet bezüglichen

Hosted by Google

Produktes der Summe der Stufenzahlen ſeiner Faktoren kongruent, in Bezug auf den Modul. n, oder die Stufenzahl des Produktes ist gleich dem Diviſionsreste, welcher bleibt, wenn man die Summe der Stufenzahlen aller Faktoren durch die Stufenzahl des Hauptgebietes dividirt; alſo wenn

$$R = [ABC\cdots] \text{ ist, ſo ist}$$
$$\varrho = \alpha + \beta + \gamma + \cdots \text{ (Mod. n)},$$

wenn ϱ, α, β, $\gamma, \cdots$ die Stufenzahlen von R, A, B, C, $\cdots$ ſind und n die des Hauptgebietes ist.

Beweis. In 95 ist gezeigt, dass die Stufenzahl des Produktes zweier Grössen der Summe der Stufenzahlen dieſer Grössen kongruent ist, in Bezug auf den Modul. n. Tritt nun zu dem Produkte noch ein Faktor hinzu, ſo bleibt aus gleichem Grunde das Geſetz noch bestehen u. ſ. f., alſo gilt es für beliebig viele Faktoren. Da nun die Stufenzahl immer kleiner als n und nie negativ ist, ſo gilt der Satz auch in der zweiten Fassung.

Anm. So z. B. ist die Stufenzahl eines Produktes von 7 Faktoren 3-ter Stufe, in Bezug auf ein Hauptgebiet 4-ter Stufe, gleich 1 (ſ. Crelle Journal B. 49, p. 64).

97. Das Produkt der Ergänzungen zweier Grössen ist die Ergänzung des Produktes dieſer Grössen, d. h.

$$[|A|B] = |[AB].$$

Beweis 1. Wenn die Stufenzahlen α und β der Grössen A und B zuſammen kleiner ſind als die Stufenzahl n des Hauptgebietes, d. h. $\alpha + \beta < n$.

Dann ſei $A = \sum \alpha_r E_r$, $B = \sum \beta_s F_s$, wo E_r, F_s Einheiten ſind, ſo ist (nach 90)

$$|A = \sum \alpha_r |E_r \text{ und } |B = \sum \beta_s |F_s.$$

Alſo

$$\begin{aligned}
[|A|B] &= [\sum \alpha_r |E_r \sum \beta_s F_s] = \sum \alpha_r \beta_s [E_r |F_s] && [42]\\
&= \sum \alpha_r \beta_s |[E_r F_s] && [94]\\
&= |\sum \alpha_r \beta_s [E_r F_s] && [90]\\
&= |[\sum \alpha_r E_r \sum \beta_s F_s] && [42]\\
&= |[AB].
\end{aligned}$$

2. Wenn $\alpha + \beta = n$ ist, dann gilt der Satz zunächst für die Einheiten.

Hosted by Google

Es ſeien E und F Einheiten, d. h. kombinatorische Produkte der urſprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$. Enthält zuerſt E eine urſprüngliche Einheit, die auch in F vorkommt, ſo können in E und F, da ſie zuſammen nur n einfache Faktoren enthalten, nicht alle urſprünglichen Einheiten vorkommen; es muss alſo mindestens eine dieſer Einheiten, etwa e_1, in beiden Grössen E und F fehlen; nun enthält |E alle urſprünglichen Einheiten die in E fehlen, alſo auch e_1, und |F alle die in F fehlen, alſo auch e_1, ſomit enthalten |E und |F beide die urſprüngliche Einheit e_1, es ist alſo (nach 60) $[|E|F] = 0$, aber auch $[EF] = 0$, da E und F nach der Annahme beide ein und dieſelbe urſprüngliche Einheit enthalten, ſomit

$$[|E|F] = [EF].$$

Wenn zweitens E keine urſprüngliche Einheit enthält, die auch in F vorkommt, ſo muss, da E und F im Ganzen n Faktoren enthalten, deren jeder eine der urſprünglichen Einheiten ist, [EF] ein Produkt ſämmtlicher n Einheiten ſein. Dann aber ist (nach 90)

$$|E = [EF]F \text{ und } |F = [FE]E,$$

wo [EF] und [FE] nur entweder $+1$ oder -1 ſind. Dann ist

$$[|E|F] = [EF][FE][FE].$$

Aber [FE][FE] ist entweder $1 \cdot 1$ oder $(-1) \cdot (-1)$, alſo beidemale 1. Somit ist

$$[|E|F] = [EF],$$

wie im vorigen Falle. Da nun [EF] eine Zahl ist, ſo ist (nach 90) $[EF] = |[EF]$. Somit in beiden Fällen

$$[|E|F] = |[EF].$$

Da nun das Geſetz für Einheiten gilt, ſo folgt ganz wie in Beweis 1, dass es auch für beliebige Grössen gilt, vorausgeſetzt, dass die Summe der Stufenzahlen n ſei.

3. Wenn $\alpha + \beta > n$, dann ſei $A = |A'$ und $B = |B'$. Ist nun zuerſt n ungerade, ſo ist (nach 93)

$$|A = ||A' = A' \text{ und ebenſo } |B = ||B' = B'.$$

Alſo

$$[|A|B] = [A'B'] = ||[A'B'] \qquad \text{(nach 93)}.$$

Aber da die Stufenzahl von A′ und B′ beziehlich $= n - \alpha$, $n - \beta$ ſind (90 Zuſ.), ſo ſind die Stufenzahlen von A′ und B′

Hosted by Google

zuſammengenommen $= 2n - \alpha - \beta = n - (\alpha + \beta - n)$. Nun ist $\alpha + \beta - n$ poſitiv, da $\alpha + \beta$ nach der Annahme grösser als n ist, ſomit ist $n - (\alpha + \beta - n) < n$, alſo die Summe der Stufenzahlen von A′ und B′ kleiner als n. Alſo ist nach Beweis 1 $|[A'B'] = [|A'|B'] = [AB]$. Alſo

$$\|[A'B'] = |[AB], \text{ aber auch } \|[A'B'] = [|A|B],$$

wie oben gezeigt, alſo

$$[|A|B] = |[AB].$$

Zuſatz. Wenn das Produkt zweier Grössen ein progressives iſt, ſo iſt das ihrer Ergänzungen ein regressives, vorausgeſetzt, dass man das Produkt nullter Stufe zugleich als ein progressives und als ein regressives betrachtet.

Beweis. Denn iſt [AB] ein progressives Produkt, ſo iſt $\alpha + \beta = < n$, wenn α und β die Stufenzahlen von A und B ſind. Dann ſind die der Ergänzungen $n - \alpha$ und $n - \beta$, aber $n - \alpha - \beta = > 0$, alſo auch $n - \alpha + n - \beta = > n$, d. h. das Produkt der Ergänzungen ein regressives.

98. Das Produkt der Ergänzungen mehrerer Grössen iſt die Ergänzung des Produktes dieſer Grössen, d. h.

$$[|A|B|C\cdots] = |[ABC\cdots].$$

Beweis. Es gelte der Satz für m Faktoren, d. h. es ſei

$$[|A_1|A_2\cdots|A_m] = |[A_1A_2\cdots A_m],$$

ſo gilt er auch für m + 1 Faktoren Denn es komme noch ein Faktor $|A_{m+1}$ auf beiden Seiten obiger Gleichung hinzu, ſo iſt

$$[|A_1|A_2\cdots|A_m|A_{m+1}] = [|(A_1A_2\cdots A_m)|A_{m+1}]$$
$$= |[A_1A_2\cdots A_mA_{m+1}] \quad [97].$$

Gilt der Satz alſo für irgend eine Faktorenzahl, ſo gilt er auch für die nächſt höhere, alſo auch für jede höhere Faktorenzahl. Da er nun (nach 97) für zwei Faktoren gilt, ſo gilt er auch für beliebig viele.

99. Ins Beſondere iſt

$$[|a|b\cdots] = |[ab\cdots],$$

wenn a, b, ·· Grössen erſter Stufe ſind.

Zuſatz. Es folgt hieraus, dass das regressive Produkt als ein kombinatoriſches betrachtet werden kann, deſſen einfache Faktoren von (n — 1)-ter Stufe ſind.

Hosted by Google

100. Die Ergänzung eines Polynoms erhält man, indem man, ohne die Vorzeichen der Glieder zu ändern, von jedem die Ergänzung nimmt, d. h.

$$|(A \mp B \mp \cdots) = |A \mp |B \mp \cdots.$$

Beweis. Es sei $A = \sum \overline{\alpha_r E_r}$, $B = \sum \overline{\beta_r E_r}$, $\cdots$ so ist

$$\begin{aligned}
&|(A \mp B \mp \cdots) \\
&= |(\sum \overline{\alpha_r E_r} \mp \sum \overline{\beta_r E_r} \mp \cdots) = |\sum \overline{(\alpha_r \mp \beta_r \mp \cdots) E_r} \\
&= \sum (\alpha_r \mp \beta_r \mp \cdots) |E_r \qquad [90] \\
&= \sum \alpha_r |E_r \mp \sum \beta_r |E_r \mp \cdots = |\sum \alpha_r E_r \mp |\sum \beta_r E_r \mp \cdots \qquad [90] \\
&= |A \mp |B \mp \cdots.
\end{aligned}$$

101. Eine Gleichung, in welcher keine andern Verknüpfungen als die in Kap. 1 und 3 behandelten vorkommen, bleibt auch bestehen, wenn man statt der darin vorkommenden Grössen ihre Ergänzungen setzt, d. h. wenn

$$f(A, B, \cdots) = \varphi(A', B', \cdots)$$

ist, wo f und φ Zeichen von Verknüpfungen sind, die den genannten Kapiteln angehören, so ist

$$f(|A, |B, \cdots) = \varphi(A', B', \cdots).$$

Beweis. Da gleiche Grössen, derselben Verknüpfung unterworfen, Gleiches liefern, so muss, wenn

$$f(A, B, \cdots) = \varphi(A', B', \cdots)$$

ist, auch

$$|f(A, B, \cdots) = |\varphi(A', B', \cdots)$$

sein. Nun können keine andern Verknüpfungen vorkommen als Addition, Subtraktion und die bezügliche Multiplikation, zu welcher auch die Multiplikation mit Zahlen gerechnet werden darf. Für Addition und Subtraktion ist in Satz 100 bewiesen, dass man, statt von der Verknüpfung, von den Verknüpfungsgliedern die Ergänzungen nehmen kann, und dasselbe gilt (nach 99) von der bezüglichen Multiplikation, also für alle auf beiden Seiten vorkommenden Verknüpfungen.

Anm. Es tritt hierdurch die volle Reciprocität zwischen beliebigen Grössen und ihren Ergänzungen, also überhaupt zwischen Grössen m-ter und (n − m)-ter Stufe hervor, wenn das Hauptgebiet von n-ter Stufe ist, namentlich ist die Reciprocität zwischen Grössen erster und (n − 1)-ter Stufe von Interesse. Noch anschaulicher wird sich diese Reciprocität weiter unten entfalten.

Hosted by Google

102. Wenn E, F, G Einheiten ſind, deren Stufenzahlen zuſammen n (Stufenzahl des Hauptgebietes) betragen, ſo ist

$$[EF \cdot EG] = [EFG] \cdot E.$$

Beweis. Wir können zwei Fälle unterſcheiden, entweder [EFG] enthält gleiche Faktoren oder nicht. Enthält es gleiche, ſo muss, da die Anzahl ſeiner einfachen Faktoren, nach der Vorausſetzung, gleich n, gleich der Anzahl der urſprünglichen Einheiten ist, eine dieſer Einheiten, etwa e_1, unter den Faktoren von [EFG] fehlen.

Nun ſei $[EF] = |Q$, ſo muss (nach 89) Q dieſen auch in [EF] fehlenden Faktor e_1 enthalten; ebenſo ſei $[EG] = |R$, ſo muss R dieſen Faktor gleichfalls enthalten. Alſo ist dann (nach 60) [QR] gleich null. Nun ist

$$[EF \cdot EG] = [|Q|R] = |[QR] \qquad [94],$$

alſo gleich der Ergänzung von $[QR] = 0$, alſo (nach 89) ſelbst null. Aber es ist auch [EFG], da es nach der Annahme gleiche Faktoren enthält, null, ſomit beide Seiten der zu erweiſenden Gleichung null.

Wenn dagegen [EFG] keine gleichen Faktoren enthält, ſo muss es, da es n Faktoren enthalten ſoll und zwar keine andern als urſprüngliche Einheiten, ein Produkt der n urſprünglichen Einheiten ſein. Dann ist (nach 89)

$$|G = [GEF][EF], \quad |F = [FEG][EG].$$

Da hier [GEF] und [FEG] als Produkte ſämmtlicher Einheiten $e_1, \cdots e_n$ gleich $\mp [e_1 e_2 \cdots e_n]$, alſo (nach 94) $= \mp 1$ ſind, und die Multiplikation ∓ 1 gleiches Reſultat mit der Diviſion durch ∓ 1 liefert, ſo können wir die obigen Gleichungen auch ſo ſchreiben:

$$[EF] = [GEF]|G, \quad [EG] = [FEG]|F.$$

Dann wird, da man überdies Zahlfaktoren beliebig ordnen darf,

$$[EF \cdot EG] = [GEF][FEG][|G|F] = [GEF][FEG]|[GF] \quad [97]$$
$$= [GEF][FEG][GFE]E \qquad [89].$$

Nun ist $[EF] = \mp [FE]$ (nach 58). Vertauscht man alſo in dem gewonnenen Ausdrucke zweimal E mit F, ſo bleibt ſein Werth ungeändert, und ſo wird er

$$= [GEF][EFG][GEF]E.$$

Hosted by Google

Aber da $[GEF] = \mp 1$ ist, so wird $[GEF][GEF] = 1$ und somit erhält man

$$[EF \cdot EG] = [EFG]E.$$

103. Wenn A, B, C einfache Grössen sind und die Summe ihrer Stufenzahlen gleich der Stufenzahl n des Hauptgebietes ist, so ist

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Beweis. Angenommen, die Formel 103 gelte für den Fall, dass A, B, C keine andern Faktoren enthalte als die, welche einer gegebenen Reihe von n Grössen erster Stufe $a_1, a_2, a_3, \cdots$ angehören, so zeige ich, dass sie auch noch gelte, wenn man statt einer dieser n Grössen, etwa statt a_1, eine aus ihnen numerisch abgeleitete setzt, etwa $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots = \sum \alpha_r a_r$. Es kann a_1 entweder in A oder B oder C enthalten sein. Ist a_1 in B enthalten, so sei $B = a_1 D$, und verwandle sich B durch die obige Substitution in $B' = a'D$. Dann wird

$$[AB' \cdot AC] = [A \sum \alpha_r a_r D \cdot AC] = \sum \alpha_r [A a_r D \cdot AC]$$
$$= \sum \alpha_r [A a_r DC] \cdot A,$$

da nach der Annahme Formel 103 für den Fall, dass die betrachteten Grössen nur $a_1, a_2, \cdots$ als einfache Faktoren enthalten, gelten soll. Also ist

$$[AB' \cdot AC] = \sum \alpha_r [A a_r DC] \cdot A = [A \sum \alpha_r a_r DC]A$$
$$= [Aa'DC]A = [AB'C]A.$$

Genau dieselben Schlüsse gelten, wenn a_1 in C enthalten ist. Es bleibt also nur der Fall zu behandeln, wo a_1 in A enthalten ist. In diesem Falle verwandle sich zunächst a_1 in $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, und sei $A = [a_1 D]$, also

$$A' = [a'D] = \alpha_1 [a_1 D] + \alpha_2 [a_2 D]$$
$$= \alpha_1 A + \alpha_2 [a_2 D] \quad *$$

Sollte a_2 noch in D enthalten sein, so wäre der letzte Summand (nach 60) null; es verwandelte sich also A' nur in sein Vielfaches, also würde dann

$$[A'B \cdot A'C] = \alpha^2 [AB \cdot AC] = \alpha^2 [ABC]A$$
$$= [\alpha ABC]\alpha A = [A'BC]A'.$$

Also bleibt nur noch der Fall zu betrachten, wo a_2 in B oder in C, z. B. in B, vorkommt. In diesem Falle sei

Hosted by Google

$B = [a_2 E]$. Es war, wie oben (*) gezeigt, $A' = \alpha_1 A + \alpha_2 [a_2 D]$, und da a_2 in B als Faktor enthalten ist, und alſo $[a_2 DB]$ null wird, ſo ist $[A'B] = \alpha_1 [AB]$; ferner ist $[A'C] = [(\alpha_1 A + \alpha_2 [a_2 D])C]$ $= \alpha_1 [AC] + \alpha_2 [a_2 DC]$, alſo

$$[A'B \cdot A'C] = \alpha_1^2 [AB \cdot AC] + \alpha_1 \alpha_2 [AB \cdot a_2 DC]$$
$$= \alpha_1^2 [ABC] \cdot A + \alpha_1 \alpha_2 [AB \cdot a_2 DC].$$

Aber $[AB \cdot a_2 DC] = [a_1 D a_2 E \cdot a_2 DC] = - [a_2 D a_1 E \cdot a_2 DC]$ (55) $= - [a_2 D a_1 EC][a_2 D]$. Letzteres nämlich ist der Fall, da die drei Grössen $[a_2 D]$, $[a_1 E]$ und C keine andern Faktoren enthalten, als ſolche, die der Grössenreihe a_1, a_2, $a_3 \cdots$ angehören, und die Summe der Stufenzahlen n ist, alſo die Bedingungen alle erfüllt ſind, unter denen die Geltung der Formel $[AB \cdot AC] = [ABC]A$ angenommen war. Somit wird

$$[A'B \cdot A'C] = \alpha_1^2 [ABC]A - \alpha_1 \alpha_2 [a_2 D a_1 EC][a_2 D]$$
$$= \alpha_1^2 [ABC]A + \alpha_1 \alpha_2 [a_1 D a_2 EC][a_2 D] \quad [55]$$
$$= \alpha_1^2 [ABC]A + \alpha_1 \alpha_2 [ABC][a_2 D]$$
$$= \alpha_1 [ABC](\alpha A + \alpha_2 [a_2 D])$$
$$= [\alpha_1 ABC] \cdot A' \quad [*]$$
$$= [A'BC]A'.$$

Daſſelbe gilt, wenn a_2 in C statt in B enthalten war. Alſo ist gezeigt, dass die Formel immer bestehen bleibt, wenn man einen Faktor a_1 in $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ verwandelt, alſo auch, wenn man dieſen wieder in $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ verwandelt u. ſ. f.

Es ist alſo jetzt vollständig erwieſen, dass, wenn die Formel 103 für irgend eine Reihe von n Grössen erster Stufe a_1, $a_2 \cdots a_n$ gilt, welche die einfachen Faktoren der Grössen A, B, C bilden, ſie auch noch bestehen bleibt, wenn man statt irgend eines dieſer Faktoren eine aus jenen Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitete ſetzt. Da ſich daſſelbe wieder auf die ſo hervorgehende Reihe von Grössen anwenden lässt, ſo folgt, dass die Formel auch noch bestehen bleibt, wenn man statt der einfachen Faktoren der Grössen A, B, C beliebige aus jenen Grössen $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitete Grössen ſetzt. In der That, es ſeien z. B. $b_1 \cdots b_n$ ſolche aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitete Grössen. Wie dieſe auch beſchaffen ſeien, immer wird ſich (nach 17) unter ihnen ein Verein von m Grössen angeben lassen, welche in keiner Zahlbeziehung

Hosted by Google

zu einander stehen, und aus denen sich, wenn m kleiner als n ist, die übrigen numerisch ableiten lassen. Es seien nun $b_1 \cdots b_m$ diese Grössen, aus denen $b_{m+1} \cdots b_n$ numerisch ableitbar sind; dann kann man (nach 20) statt m der Grössen $a_1 \cdots a_n$, die Grössen $b_1 \cdots b_m$ in der Art einführen, dass das Gebiet der so erhaltenen Grössen dem Gebiete der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch wird. Es seien $a_1 \cdots a_m$ die Grössen, statt deren man in dieser Weise $b_1 \cdots b_m$ einführen kann, so wird nun das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_m a_{m+1} \cdots a_n$, oder, indem man dieselbe Schlussfolge Schritt für Schritt anwendet: Es wird das Gebiet

$a_1 a_2 \cdots a_n$ identisch dem Gebiet $b_1 a_2 \cdots a_n$,

dies wieder identisch $b_1 b_2 a_3 \cdots a_n$,

$\vdots$

und endlich identisch $b_1 b_2 \cdots b_m a_{m+1} \cdots a_n$.

Gilt nun Formel 103 für $a_1 \cdots a_n$, so gilt sie auch, wenn man statt des Faktors a_1 die aus $a_1 \cdots a_n$ abgeleitete Grösse b_1 setzt, also für b_1, $a_2 \cdots a_n$. Da nun das Gebiet $a_1 \cdots a_n$ mit dem Gebiete $b_1, a_2 \cdots a_n$ identisch ist, und b_2 nach der Annahme aus $a_1 \cdots a_n$ ableitbar ist, so ist es auch aus $b_1, a_2 \cdots a_n$ ableitbar, folglich bleibt Formel 103 noch bestehen, wenn man b_2 statt a_2 setzt, d. h. für die Reihe $b_1, b_2, a_3 \cdots a_n$ u. s. f., endlich noch für die Reihe $b_1, b_2 \cdots b_m, a_{m+1} \cdots a_n$. Ferner, da nach der Annahme $b_{m+1} \cdots b_n$ aus $b_1, b_2, \cdots b_m$ numerisch ableitbar sind, so bleibt nun 103 auch noch bestehen, wenn man nach und nach in der Reihe $b_1 \cdots b_m, a_{m+1} \cdots a_n$, statt $a_{m+1} \cdots a_n$ die Grössen $b_{m+1} \cdots b_n$ setzt, also auch für die Reihe $b_1 \cdots b_n$, d. h. für jede beliebige aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch abgeleitete Grössenreihe. Nun gilt aber 103 für die ursprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$ (nach 102), also für eine beliebige Reihe von Grössen erster Stufe, welche die einfachen Faktoren von A, B, C bilden, d. h. für beliebige einfache Grössen A, B, C.

104. Auch wenn B und C zusammengesetzte Grössen sind, A aber eine einfache Grösse und die Summe der Stufenzahlen von A, B, C gleich der Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so ist

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Hosted by Google

Beweis. Es sei

$$B = \sum \beta_r E_r, \quad C = \sum \gamma_s F_s,$$

wo E_r und F_s Einheitsprodukte sind, so ist

$$\begin{aligned} [AB \cdot AC] &= \sum \beta_r \gamma_s [AE_r \cdot AF_s] && [45] \\ &= \sum \beta_r \gamma_s [AE_r F_s] A && [103] \\ &= [A \sum \beta_r E_r \sum \gamma_s F_s] A && [45] \\ &= [ABC] A. \end{aligned}$$

Anm. Dieser Satz gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn A eine zusammengesetzte Grösse ist. Ist z. B. $A = ab + cd$, wo a, b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen sollen, und ist $B = c$, $C = d$, so wird in Bezug auf ein Gebiet 4ter Stufe $[AB \cdot AC] = [(ab + cd)c \cdot (ab + cd)d] = [abc \cdot abd]$, da $[cdc]$ und $[cdd]$ verschwinden; aber $[abc \cdot abd] = [abcd] \cdot [ab]$. Also ist

$$[AB \cdot AC] = [abcd] \cdot ab.$$

Dagegen ist

$$\begin{aligned} [ABC] \cdot A &= [(ab + cd)cd] \cdot [(ab) + (cd)] = [abcd]\,[(ab) + (cd)] \\ &= [abcd] \cdot [ab] + [abcd] \cdot [cd]. \end{aligned}$$

Also sind beide Ausdrücke um $[abcd] \cdot [cd]$ von einander verschieden.

105—107. Wenn A, B, C einfache Grössen sind, und ihr Produkt von nullter Stufe ist, so ist

105. $[AB \cdot AC] = [ABC]A$

106. $[AB \cdot BC] = [ABC]B$

107. $[AC \cdot BC] = [ABC]C$,

d. h. wenn zwei Produkte (P und Q) einfacher Grössen, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, zu multipliciren sind, und dieser gemeinschaftliche Faktor entweder in dem zweiten Produkte (Q) als erster Faktor oder in dem ersten (P) als zweiter Faktor vorkommt, so kann man diesen Faktor mit dem Produkte der übrigen Faktoren multipliciren, vorausgesetzt, dass dies letztere Produkt von nullter Stufe ist. In beiden Fällen ist das Gesammtprodukt von gleichem Werthe.

Beweis 1. Sind α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C und n die des Hauptgebietes, so muss, da [ABC] von nullter Stufe sein soll, (nach 96) $\alpha + \beta + \gamma$ durch n theilbar sein, also, da α, β, γ kleiner als n sind, entweder gleich n oder gleich 2n sein. Ist $\alpha + \beta + \gamma = n$, so ist die Geltung der Formel 105 schon in 103 bewiesen. Ist dagegen $\alpha + \beta + \gamma = 2n$, so sei

Hosted by Google

$$A = |A', \; B = |B', \; C = |C'$$

und ſeien $\alpha' + \beta' + \gamma'$ die Stufenzahlen von A', B', C', ſo iſt

$$\alpha' = n - \alpha, \; \beta' = n - \beta, \; \gamma' = n - \gamma \qquad [90],$$

alſo $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3n - (\alpha + \beta + \gamma) = 3n - 2n = n.$

Somit $[AB \cdot AC] = ([|A'|B'] \cdot [|A'|C']) = |[A'B' \cdot A'C'] \quad [99]$

$$= |[A'B'C' \cdot A'] \qquad [103],$$

da nämlich $\alpha' + \beta' + \gamma' = n$ iſt. Dies iſt aber (nach 99)

$$= [|A'|B'|C'] \cdot |A' = [ABC]A.$$

2. Es ſei $[AB] = [BD]$, ſo iſt D von gleicher Stufe mit A, alſo

$$[AB \cdot BC] = [BD \cdot BC] = [BDC]B \qquad [105]$$
$$= [ABC]B,$$

da $[BD] = [AB]$ iſt.

3. Es ſei $[BC] = [CD]$, ſo iſt D von gleicher Stufe mit B, alſo

$$[AC \cdot BC] = [AC \cdot CD] = [ACD] \cdot C \qquad [106]$$
$$= [ABC]C,$$

da $[CD] = [BC]$ iſt.

Anm. Es laſſen ſich die in 105—107 aufgeſtellten Geſetze ſo erweitern, daſs ſie auch für den Fall gelten, wo [ABC] nicht von nullter Stufe iſt, wenn man ſie nämlich in den folgenden Formen darſtellt:

$$[AB \cdot AC] = [A \cdot ABC]$$
$$[AB \cdot BC] = [B \cdot ABC]$$
$$[AC \cdot BC] = [C \cdot ABC].$$

Den Beweis dieſer Formeln, die ich in dieſer allgemeineren Bedeutung im Folgenden nicht anwenden werde, überlaſſe ich dem Leſer.

108. Wenn A, B, C einfache Grössen ſind, und die Summe der Stufenzahlen von A und C gleich der des Hauptgebietes, und B dem A untergeordnet iſt, ſo iſt

$$[A \cdot BC] = [AC]B$$
$$[CB \cdot A] = [CA]B.$$

Beweis. Denn dann iſt (nach 79 Zuſatz) A in der Form BD darſtellbar, und alſo

$$[A \cdot BC] = [BD \cdot BC] = [BDC] \cdot B \qquad [105]$$
$$= [AC]B$$

und

$$[CB \cdot A] = [CB \cdot BD] = [CBD]B \qquad [106]$$
$$= [CA]B.$$

Hosted by Google

109. Ein bezügliches Produkt zweier einfacher Grössen, die nicht null sind, ist dann, und nur dann von null verschieden, wenn die Stufenzahl ihres gemeinschaftlichen Gebietes den kleinsten, oder, was dasselbe ist, die Stufenzahl ihres verbindenden Gebietes den grössten Werth hat, den sie bei gegebenen Stufenzahlen der beiden Faktoren und des Hauptgebietes haben kann, d. h. wenn α und β die Stufenzahlen der Faktoren A und B, n die des Hauptgebietes ist, γ die des gemeinschaftlichen, δ die des verbindenden Gebietes, so ist, wenn $\alpha + \beta = < n$, d. h. das Produkt ein progressives ist,

$[AB] \gtrless 0$, dann und nur dann, wenn
$\gamma = 0$, oder, was dasselbe ist,
$\alpha + \beta = \delta$, und

wenn $\alpha + \beta > n$, d. h. das Produkt ein regressives ist, so ist

$[AB] \gtrless 0$, dann und nur dann, wenn
$\gamma = \alpha + \beta - n$, oder, was dasselbe,
$\delta = n$

ist.

Beweis 1. Wenn $\alpha + \beta = < n$ ist, so ist das Produkt (nach 94) progressiv, also (nach 61, 66) dann und nur dann null, wenn seine einfachen Faktoren in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist also $[AB] = 0$, so lässt sich von den einfachen Faktoren des Produktes [AB] einer aus den $\alpha + \beta - 1$ übrigen numerisch ableiten (nach 2). Also werden dann sämmtliche einfache Faktoren jenes Produktes von einem Gebiete von niederer als $(\alpha + \beta)$-ter Stufe umfasst, d. h. $\delta < \alpha + \beta$. Ist hingegen $[AB] \gtrless 0$, so stehen die einfachen Faktoren dieses Produktes (nach 61) in keiner Zahlbeziehung zu einander, ihr verbindendes Gebiet ist also von $(\alpha + \beta)$-ter Stufe, d. h. $\alpha + \beta = \delta$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta = < n$ ist, [AB] dann und nur dann von null verschieden, wenn $\alpha + \beta = \delta$ ist.

2. Es sei $\alpha + \beta > n$ und $a + \beta - n = \gamma$. Dann haben die Gebiete A und B, da sie beziehlich von α-ter und β-ter Stufe sind, (nach 26) mindestens ein Gebiet $(\alpha + \beta - n)$-ter d. h. γ-ter Stufe gemein. Es sei C eine Grösse von γ-ter Stufe in diesem Gebiete, so sind (nach 79 Zus.) A und B in den Formen $A = [CA_1]$, $B = [CB_1]$ darstellbar. Somit wird

$$[AB] = [CA_1 \cdot CB_1] = [CA_1B_1] \cdot C \qquad [103],$$

Hosted by Google

weil die Summe der Stufenzahlen von C, A_1 und B_1, $= \gamma + (\alpha - \gamma) + (\beta - \gamma) = \alpha + \beta - \gamma = n$ ſind. Es ist aber $[CA_1B_1]C$, da $[CA_1B_1]$ von nullter Stufe, alſo eine Zahl ist, dann und nur dann null, wenn $[CA_1B_1]$, d. h. $[AB_1]$ null ist. Aber nach Beweis 1 ist $[AB_1]$ dann und nur dann null, wenn A und B_1 von einem Gebiet von niederer als n-ter Stufe umfasst werden, aber da C in $A = CA_1$ liegt, ſo werden dann auch A und CB_1, d. h. A und B von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe, umfasst, d. h. $\delta < n$. Somit ist, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, [AB] dann und nur dann von null verschieden, wenn $\delta = n$ ist.

3. Nach 25 ist die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Summe der Stufenzahlen ihres gemeinschaftlichen und ihres verbindenden Gebietes, d. h.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Die Bedingung in Beweis 1, dass $\alpha + \beta = \delta$ ſei, ist alſo identisch mit der, dass $\gamma = 0$ ſei, und die Bedingung in Beweis 2, dass $\delta = n$ ſei, ist identisch mit der, dass

$$\alpha + \beta - n = \gamma$$

ſei. Somit ist der zweite Wortausdruck unſeres Satzes bewieſen. Nun ist aber klar, dass, wenn α und $\beta = < n$ ist, die kleinste Stufenzahl, die das den Grössen A und B gemeinschaftliche Gebiet haben kann, null, und die grösste, die das verbindende Gebiet haben kann, $\alpha + \beta$ ist. Auf der andern Seite, wenn $\alpha + \beta > n$ ist, ſo ist die grösste Stufenzahl, die das verbindende Gebiet haben kann, n, alſo (nach 26) die kleinste, die das verbindende Gebiet haben, $\alpha + \beta - n$. Somit stimmt der erste Wortausdruck mit dem zweiten überein, und der Satz ist erwieſen.

110. Alle Geſetze der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation gelten auch noch, wenn man überall statt der urſprünglichen Einheiten eine beliebige Reihe von n Grössen ſetzt, die aus jenen numerisch abgeleitet ſind, und deren kombinatorisches Produkt 1 ist.

Beweis. Es ſeien $e_1 \cdots e_n$ die urſprünglichen Einheiten, und $a_1 \cdots a_n$ aus ihnen numerisch abgeleitet, und zwar ſo, dass

$$[a_1, a_2 \cdots a_n] = 1$$

ist.

Hosted by Google

Nach 89 wurde unter der Ergänzung |E eines Einheitsproduktes E diejenige Grösse verstanden, welche dem kombinatorischen Produkte E′ aller in E nicht vorkommender Einheiten gleich oder entgegengefetzt ist, je nachdem [EE′] der abfoluten Einheit gleich oder entgegengefetzt ist, d. h. für die

$$|E = [EE']E'$$

war. Bezeichnen wir nun diejenige Grösse, welche aus einem Produkte A, in welchem nur die Grössen $a_1 \cdots a_n$ vorkommen, auf entsprechende Weife gebildet ist, für den Augenblick mit IA, d. h. bezeichnet IA diejenige Grösse, welche dem kombinatorischen Produkte A′ aller derjenigen Grössen jener Reihe $[a_1 \cdots a_n]$, welche in A nicht vorkommen, gleich oder entgegengefetzt ist, je nachdem [AA′] der abfoluten Einheit gleich oder entgegengefetzt ist, d. h. fo dass

$$IA = [AA']A'$$

ist, fo haben wir zunächst zu beweifen, dass die als Definition des bezüglichen Produktes in 94 aufgestellte Bestimmung, auch bei diefer Einfetzung der Grössen $a_1 \cdots a_n$ an die Stelle der urfprünglichen Einheiten noch ihre Geltung behalte, d. h. dass

$$I[AB] = [IAIB]$$

fei, wenn A und B nur Grössen aus der Reihe $a_1 \cdots a_n$ als einfache Faktoren enthalten, und die Summe $(\alpha + \beta)$ der Stufenzahlen von A und B kleiner ist als die Stufenzahl n des Hauptgebietes.

Es fei zuerst $[AB] = 0$, fo müssen (nach 109) die Gebiete A und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben; fie mögen ein Gebiet γ-ter Stufe gemein haben, alfo γ einfache Faktoren, dann werden diefe Faktoren, da IA nur diejenigen Faktoren enthält, welche in A nicht vorkommen, in IA fehlen, und aus gleichem Grunde auch in IB, alfo werden IA und IB von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst, fomit (nach 109)

$$[IAIB] = 0,$$

alfo, da auch [AB] null war und die Ergänzung einer Zahl (nach 89) diefer gleich, alfo die von null felbst null ist, fo ist

$$I[AB] = [IAIB].$$

Hosted by Google

Es ſei zweitens [AB] von null verſchieden, ſo enthält daſſelbe $\alpha + \beta$ verſchiedene einfache Faktoren der Reihe $a_1 \cdots a_n$, es ſei C das Produkt der übrigen, alſo [ABC] (nach 57) dem Produkte $[a_1 \cdots a_n]$ entweder gleich oder entgegengeſetzt, alſo da das letztere gleich 1 ist, ſo ist $[ABC] = \mp 1$. Da nun [BC] das Produkt der in A nicht vorkommenden Faktoren ist, ſo ist nach der hier angenommenen Bezeichnung

$$IA = [ABC] \cdot [BC], \text{ ebenſo}$$
$$IB = [BAC] \cdot [AC] \text{ und } I[AB] = [ABC]C \quad *.$$

Alſo, da [ABC], [BAC] Zahlen ($= \mp 1$) ſind,

$$[IAIB] = [ABC][BAC][BC \cdot AC]$$
$$= [ABC][BAC][BAC] \cdot C \qquad [107].$$

Da nun $[BAC] = \mp 1$ ist, ſo ist $[BAC][BAC] = 1$. Alſo

$$[IAIB] = [ABC] \cdot C = I[AB] \qquad [*].$$

Es gilt alſo die Beſtimmung, durch welche der Begriff der bezüglichen Multiplikation feſtgeſtellt wurde, auch wenn man ſtatt der urſprünglichen Einheiten die Grössen $a_1 \cdots a_n$ einführt, alle früheren Geſetze gelten aber, wenn man ſtatt der n urſprünglichen Einheiten beliebige n Grössen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, d. h. deren kombinatoriſches Produkt nicht null ist, alſo auch, wenn man ſtatt derſelben die Grössen $a_1 \cdots a_n$ ſetzt. Aus dieſen früheren Sätzen und der in der Definition feſtgeſtellten Beſtimmung ſind aber alle folgenden Geſetze abgeleitet, folglich gelten auch dieſe noch bei der angegebenen Subſtitution.

Anm. Durch das Fortbeſtehen der Multiplikations-Geſetze, auch wenn man eine Reihe lineal ableitbarer Einheiten den urſprünglichen ſubſtituirt, ist die Multiplikation als lineale bedingt, und erſt im folgenden Kapitel werden wir zu einer Produktbildung übergehen, bei welcher das Fortbeſtehen der für die urſprünglichen Einheiten geltenden Geſetze, nur in einem viel beſchränkteren Umfange, ſtattfindet. Zu bemerken ist noch, daſs die oben mit IA bezeichnete Grösse im Allgemeinen nicht mit der Ergänzung von A, die wir mit |A bezeichneten, zuſammenfällt, z. B. ist in einem Gebiete dritter Stufe, wenn e_1, e_2, e_3 die urſprünglichen Einheiten ſind und $[e_1 e_2 e_3] = 1$ ist, die Ergänzung von $e_1 + e_2$, da $|e_1 = [e_2 e_3]$, $|e_2 = [e_3 e_1]$ ist, gleich $[e_2 e_3] + [e_3 e_1]$; denn (nach 90) ist

$$|(e_1 + e_2) = |e_1 + |e_2 = [e_2 e_3] + [e_3 e_1].$$

Dagegen, wenn

$$a_1 = e_1 + e_2, \; a_2 = e_2, \; a_3 = e_3$$

Hosted by Google

ist, so ist zwar $[a_1 a_2 a_3] = [e_1 e_2 e_3] = 1$, aber, bei Anwendung der Bezeichnung in obigem Satze,

$$Ia_1 = [a_1 a_2 a_3][a_2 a_3] = [a_2 a_3] = [e_2 e_3],$$

also von $|a_1$ um $[e_3 e_1]$ verschieden. Im folgenden Kapitel wird sich ergeben, welche Beziehungen zwischen $e_1 \cdots e_n$ und $a_1 \cdots a_n$ stattfinden müssen, wenn $|A = IA$ sein soll.

111. Wenn

$$1 = [a_1 \cdots a_n] = [PP'] = [AA'] = [BB'] = [CC'] \cdots$$

ist, und P, P', A, A', B, B', C, C' $\cdots$ keine andern einfachen Faktoren enthalten, als die der Reihe $a_1 \cdots a_n$ angehören und

$$P = [ABC \cdots]$$

ist, so ist auch

$$P' = [A'B'C' \cdots].$$

Beweis. Es sei unter IA dasselbe verstanden, wie im vorigen Beweise, so ist

$$IP = [PP']P' = P', \quad IA = [AA']A' = A' \text{ u. s. w.}$$

Nun ist, da nach dem vorigen Satze alle früheren Sätze, also namentlich auch Satz 98 noch gilt, wenn man überall das Zeichen I statt | setzt,

$$I[ABC \cdots] = [IAIBIC \cdots],$$

also

$$IP = [IAIBIC \cdots].$$

Also, da $IP = P'$, $IA = A'$, $IB = B'$, $IC = C' \cdots$ ist,

$$P' = [A'B'C' \cdots].$$

112. Wenn man aus n Grössen erster Stufe, deren kombinatorisches Produkt 1 liefert, die multiplikativen Kombinationen zur $n-1$-ten Klasse bildet, und die Elemente jeder Kombination alphabetisch, die Kombinationen selbst lexikographisch unter der Annahme ordnet, dass die Reihe jener n Grössen als ein Alphabet betrachtet wird, so ist das Produkt aus den $n-m$ ersten dieser Kombinationen gleich dem Produkt aus den m ersten jener n Grössen, d. h.

$$[A_n \cdots A_{m+1}] = [a_1 \cdots a_m],$$

wenn

$$A_r = [a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1} \cdots a_n]$$

und $[a_1 \cdots a_n] = 1$ ist.

Beweis 1. Ich beweise zuerst, dass

$$[a_1 \cdots a_r A_r] = [a_1 \cdots a_{r-1}]$$

Hosted by Google

ſei. Es ist nach der gewählten Beichnung

$$A_r = [a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1} \cdots a_n].$$

Alſo!

$$\begin{aligned}[a_1 \cdots a_r A_r] &= [a_1 \cdots a_r (a_1 \cdots a_{r-1} a_{r+1} \cdots a_n)] \\ &= [a_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n][a_1 \cdots a_{r-1}] \\ &= [a_1 \cdots a_{r-1}],\end{aligned} \quad [105]$$

da $[a_1 \cdots a_n] = 1$ ist.

2. Somit ist

$$[A_n A_{n-1}] = [a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1}] = [a_1 \cdots a_{n-2}]$$
$$[A_n A_{n-1} A_{n-2}] = [a_1 \cdots a_{n-2} A_{n-2}] = [a_1 \cdots a_{n-3}]$$

u. ſ. f. Alſo

$$[A_n A_{n-1} \cdots A_{n-r}] = [a_1 \cdots a_{n-r-1}].$$

Alſo, wenn $n - r - 1 = m$ ist,

$$[A_n A_{n-1} \cdots A_{m+1}] = [a_1 \cdots a_m].$$

113. Wenn $C_1, C_2, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren (erster Stufe) einer von null verschiedenen Grösse B ſind, und D_r jedesmal aus denjenigen Faktoren von B besteht, welche in C_r fehlen, und zwar die Faktoren ſo geordnet, dass jedesmal

$$[C_r B_r] = B$$

ist, ſo ist für jede Grösse A, deren Stufenzahl die Stufenzahl von D zu der des Hauptgebietes ergänzt,

$$[AB] = \sum \overline{[AD_r]C_r} = [AD_1]C_1 + [AD_2]C_2 + \cdots.$$

Beweis. Es möge m die Anzahl der einfachen Faktoren von B ſein und n die Stufe des Hauptgebietes, α die Stufenzahl von A, und ſei $B = [b_1, b_2 \cdots b_m]$.

Da nun nach der Annahme B von null verschieden ist, ſo stehen (nach 61) $b_1 \cdots b_m$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, folglich lassen ſich (nach 20) zu ihnen noch $n - m$ Grössen erster Stufe $b_{m+1} \cdots b_n$ von der Art hinzufügen, dass ſich alle Grössen erster Stufe, welche dem betrachteten Hauptgebiete angehören, aus ihnen numerisch ableiten lassen. Dann lässt ſich A als Grösse α-ter Stufe aus den multiplikativen Kombinationen der n Grössen $b_1 \cdots b_n$ zur α-ten Klasse numerisch ableiten, alſo ſich in der Form

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots = \sum \overline{\alpha_r A_r}$$

darstellbar, wenn $A_1, A_2, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen

Hosted by Google

aus $b_1 \cdots b_n$ zur α-ten Klasse ſind. Es ſeien dieſe Kombinationen A_1, $A_2, \cdots$ ſo gewählt, dass jedesmal A_r aus denjenigen jener n Grössen besteht, welche in D_r fehlen. Dies ist allemal möglich, da D_r nach der Annahme $n - \alpha$ jener Grössen enthält. Dann ist

$$[AB] = \sum \overline{(\alpha_r A_r)B} = \sum \overline{\alpha_r [A_r B]} \qquad [41]$$
$$= \sum \overline{\alpha_r [A_r \cdot C_r D_r]},$$

da nach der Annahme $B = [C_r D_r]$ ist. Da nun C_r nur ſolche jener n Grössen $b_1 \cdots b_n$ enthält, die dem D_r fehlen, und A_r ſämmtliche in D_r fehlenden Grössen $b_1 \cdots b_n$ enthält, ſo ist C_r dem A_r untergeordnet, ſomit (nach 108) $[A_r \cdot C_r D_r] = [A_r D_r] C_r$, alſo

$$[AB] = \sum \overline{\alpha_r [A_r D_r] C_r}.$$

Nun ist aber $[A_s D_r] = 0$, wenn s von r verschieden ist, weil dann A_s mindestens einen Faktor enthält, der auch in D_r vorkommt, alſo kann man statt $\alpha_r [A_r D_r]$ schreiben $\sum \overline{\alpha_s [A_s D_r]}$, wo ſich die Summe nur auf den Index s bezieht, d. h. es ist $\alpha_r [A_r D_r] = \sum \overline{\alpha_s [A_s D_r]} = [\sum \overline{\alpha_s A_s} D_r] = [A D_r]$, ſomit

$$[AB] = \sum \overline{[A D_r] C_r}.$$

§. 6. Vertauschung der Faktoren und Auflösung der Klammern in einem reinen und gemischten Produkte.

114. Erklärung. Wenn mehr als zwei Grössen A, B, C, $\cdots$ ſo zu einem Produkte verknüpft ſind, dass ſie keiner anderen als der progressiven Multiplikation unterliegen, ſo nenne ich das Produkt ein rein progressives Produkt jener Grössen, wenn ſie dagegen keiner andern als der regressiven Multiplikation unterliegen, oder, falls das Geſammtprodukt von nullter Stufe ist, nur die letzte das Geſammtprodukt bildende Multiplikation eine progressive ist, ſo nenne ich das Produkt ein rein regressives, in beiden Fällen ein reines, in jedem andern Falle ein gemischtes, d. h. wenn in dem Produkte [ABCD $\cdots$ JK], das Produkt [AB] ein progressives, das Produkt der zwei Grössen [AB] und C wieder ein progressives, ebenſo das Produkt der zwei Grössen [ABC] und D, u. ſ. f., endlich auch das Produkt der zwei Grössen [ABCD $\cdots$ J]

Hosted by Google

und K ein progressives ist, so ist [ABCD···JK] ein rein progressives Produkt der Grössen A, B, C, D, ··· J, K. Wenn hingegen alle jene Produkte regressive sind, oder wenigstens nur das letzte, nämlich das der zwei Grössen [ABCD···J] und K ein progressives Produkt, und zwar von nullter Stufe ist, so ist [ABCD···JK] ein rein regressives Produkt der Grössen A, B, C, D, ··· J, K.

Anm. Dass das Produkt auch in dem Falle als ein rein regressives betrachtet wird, wenn die letzte Multiplikation, die das ganze Produkt nullter Stufe bildet, eine progressive ist, beruht darauf, dass die progressive Multiplikation, welche ein Produkt nullter Stufe bildet, auch insofern zugleich als regressive Multiplikation betrachtet werden kann, als alle speciellen Gesetze regressiver Multiplikation ebenso für dasselbe gelten, wie die speciellen Gesetze progressiver Multiplikation. Als Beispiel einer solchen rein regressiven Multiplikation diene das Produkt [ab·ac·bc], wenn das Hauptgebiet von dritter Stufe ist.

115. Wenn ein Produkt mehrerer Grössen [ABC··] ein rein progressives ist, so ist das Produkt der Ergänzungen [|A|B|C···] ein rein regressives und umgekehrt.

Beweis. Denn (nach 97 Zus.) gilt dies für zwei Faktoren, also da [AB] ein progressives ist, so ist [|A|B] ein regressives, und da [(AB)C] ein progressives ist, so ist [|(AB)|C] ein regressives, also [|A|B|C] ein rein regressives u. s. w.

116. Ein Produkt von m Grössen A, B, C, ··· J, K ist ein rein progressives, wenn die Summe der Stufenzahlen dieser Grössen ebenso gross oder kleiner als die Stufenzahl (n) des Hauptgebietes ist, hingegen ein rein regressives, wenn jene Summe ebenso gross oder grösser als n(m — 1) ist, ein gemischtes, wenn jene Summe grösser als n und kleiner als n(m — 1) ist.

Beweis 1. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ die Stufenzahlen der Grössen A, B, C, ···. Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa = < n$ ist, so ist auch $\alpha + \beta < n$, also das Produkt [AB] (nach 94) ein progressives; aber auch $\alpha + \beta + \gamma < n$, also das Produkt der zwei Grössen [AB] und C ein progressives, u. s. f. Endlich auch $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa = < n$, also auch das Produkt der zwei Grössen [ABC···J] und K, da die Stufe von [ABC···J] (nach 95) gleich $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota$ ist, ein progressives.

Hosted by Google

Ebenfo folgt das Umgekehrte, dass nämlich, wenn [ABC···JK] ein rein progressives Produkt ist, $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa = < n$ fein muss.

2. Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa = > n(m-1)$ ist, fo können wir dies auch fo schreiben: $(n-\alpha) + (n-\beta) + (n-\gamma) + \cdots + (n-\iota) + (n-\varkappa) = < n$, weil nämlich m die Anzahl der Grössen A, B, C, ··· J, K ist. Da nun $n-\alpha$ die Stufenzahl der Ergänzung von A, d. h. die Stufenzahl von |A ist u. f. w., fo ist das Produkt

$$[|A|B|C\cdots|J|K]$$

nach Beweis 1 ein rein progressives, folglich (nach 115) [ABC···JK] ein rein regressives.

117. Die Stufenzahl eines rein progressiven Produktes ist 0, wenn die Summe der Stufenzahlen feiner Faktoren gleich der Stufenzahl n des Hauptgebietes ist, in jedem andern Falle ist die Stufenzahl jenes Produktes gleich der Summe der Stufenzahlen feiner Faktoren. Die Stufenzahl eines rein regressiven Produktes ist $= \varsigma - (m-1)n$, wenn ς die Summe der Stufenzahlen feiner Faktoren und m die Anzahl diefer Faktoren ist.

Beweis. Für zwei Faktoren ist der Satz in 95 bewiefen. Ist nun das Produkt [ABC···JK] ein rein progressives, und find $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \iota, \varkappa$ die Stufenzahlen von A, B, C···J, K, fo ist die von $[AB] = \alpha + \beta$, die alfo von $[(AB)C] = \alpha + \beta + \gamma$ u. f. w.; alfo die von $[ABC\cdots J] = \alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota$. Ist nun $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa < n$, fo ist nach demfelben Satze (95) die Stufenzahl von $[(ABC\cdots J)K] = \alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa$, wenn aber $\alpha + \beta + \gamma + \cdots \iota + \varkappa = n$ ist, fo ist fie nach demfelben Satze null. Ist zweitens das Produkt [ABC···JK] ein rein regressives, fo ist nach dem angeführten Satze die Stufenzahl von [AB] gleich $\alpha + \beta - n$, alfo die von [(AB)C] gleich $\alpha + \beta + \gamma - 2n$ u. f. w., alfo wenn m die Anzahl der Faktoren von [ABC···JK] ist, die Stufenzahl diefes Produktes $= \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \iota + \varkappa - (m-1)n$.

118. Das Gebiet eines rein progressiven Produktes ist gleich dem feine fämmtlichen Faktoren verbindenden Gebiete, und das Gebiet eines rein regressiven Produktes gleich dem feinen fämmtlichen Faktoren gemeinschaftlichen Gebiete, vorausgefetzt, dass in beiden Fällen das Produkt nicht null ist.

Hosted by Google

Beweis 1. Es ſei $[AB\cdots]$ ein rein progressives Produkt und $A=[a_1\cdots a_q]$, $B=[b_1\cdots b_r]$, u. ſ. w., wo $a_1,\cdots a_q$, $b_1,\cdots b_r$, u. ſ. w. Grössen erster Stufe ſind, ſo erhält man

$$[AB\cdots]=[(a_1\cdots a_q)(b_1\cdots b_r)\cdots].$$

Da nun das progressive Produkt stets zugleich ein äusseres ist, ſo kann man (nach 80) die Klammern weglassen und es wird der letzte Ausdruck

$$=[a_1\cdots a_q b_1\cdots b_r\cdots].$$

Das Gebiet des Produktes ist alſo (nach 77) das aus ſeinen einfachen Faktoren $a_1,\cdots a_q$, $b_1,\cdots b_r,\cdots$ numerisch ableitbare Gebiet. Ebenſo ist das Gebiet von A das aus $a_1,\cdots a_q$ ableitbare Gebiet u. ſ. w. und (nach 15) ist das aus den Grössen zweier oder mehrerer Gebiete A, B, $\cdots$ ableitbare Gebiet, das dieſe letzteren verbindende Gebiet, alſo das Gebiet des progressiven Produktes $[AB\cdots]$ das die Faktoren A, B, $\cdots$ verbindende Gebiet.

2. Es ſei $[AB]$ ein von null verschiedenes regressives Produkt, alſo die Stufenzahlen α und β der Faktoren A und B zuſammen grösser als n, ſo haben A und B ein Gebiet $\alpha+\beta-$n-ter Stufe gemein; aber auch kein Gebiet höherer Stufe, weil ſonst (nach 109) das Produkt null ſein würde. Alſo lassen ſich A und B auf einen gemeinschaftlichen Faktor D von $\alpha+\beta-$n-ter Stufe von der Art bringen, dass $A=DE$, $B=DF$ und D, E, F einfache Grössen ſind; dann ist (nach 105)

$$[AB]=[DE\cdot DF]=[DEF]\cdot D\equiv D,$$

da $[DEF]$ eine von null verschiedene Zahl ist, d. h. das Gebiet von $[AB]$ ist gleich dem den Faktoren A und B gemeinschaftlichen Gebiete. Tritt nun noch ein Faktor C hinzu, ſo wird

$$[ABC]\equiv[DC]\equiv E,$$

wenn E das dem D und C gemeinschaftliche Gebiet ist, alſo das dem A, B, C gemeinschaftliche u. ſ. w.

119. In einem reinen Produkte kann man Klammern beliebig ſetzen und weglassen, d. h.

$$[A(BC)]=[ABC],$$

wenn $[ABC]$ ein reines Produkt ist.

Beweis 1. Wenn das Produkt ein rein progressives ist,

Hosted by Google

ſo ist es (nach 94) auch ein äusseres, alſo (nach 80) die Klammerſetzung gleichgültig für's Reſultat.

2. Wenn das Produkt [ABC] ein rein regressives ist, ſo ist (nach 114) das Produkt [|A|B|C] ein rein progressives, alſo nach Beweis 1

$$[|A(|B|C)] = [|A|B|C],$$

d. h. (nach 101)

$$[A(BC)] = [ABC].$$

119b. Ein reines Produkt behält ſeinen Werth, wenn man ſeine Faktoren in lauter Faktoren erster oder (n — 1)-ter Stufe auflöst, je nachdem das gegebene Produkt ein progressives oder regressives war. Auch behauptet das Produkt in Bezug auf dieſe neuen Faktoren ſeinen Charakter, als rein progressives oder regressives, d. h. wenn

$$P = [AB\cdots E]$$

ein reines Produkt der Faktoren A, B, ··· E ist, und

$A = [a_1\cdots a_q]$, $B = [a_{q+1}\cdots a_r]$ u. ſ. w., $E = [a_{t+1}\cdots a_u]$ und $a_1\cdots a_u$ Grössen erster oder (n — 1)-ter Stufe ſind, je nachdem das Produkt [AB···E] ein progressives oder regressives ist, ſo ist auch

$$P = [a_1a_2\cdots a_u]$$

und zwar auch dies Produkt ein rein progressives oder regressives, je nachdem das gegebene Produkt [AB···E] es war.

Beweis. Wenn das Produkt [AB···E] ein rein progressives ist, ſo ist die Summe der Stufenzahlen von A, B, ···E, d. h. u, kleiner als n, ſomit bleibt es auch (nach 116) ein rein progressives in Bezug auf die Faktoren $a_1\cdots a_u$, wenn man statt A ſetzt $[a_1\cdots a_q]$ u. ſ. w., folglich kann man (nach 119) die Klammern weglassen und erhält $P = [a_1a_2\cdots a_u]$. Ist aber [AB···E] ein rein regressives Produkt, ſo wird [|A|B···|E] (nach 115) ein rein progressives; und wenn $A = [a_1\cdots a_q]$ ist u. ſ. w., und $a_1,\cdots a_u$ Grössen (n — 1)-ter Stufe ſind, ſo ist $|A = [|a_1\cdots|a_q]$ u. ſ. w., wo $|a_1,\cdots|a_u$ Grössen erster Stufe ſind, ſomit nach Beweis 1

$$[|A|B\cdots|E] = [|a_1\cdots|a_u].$$

Alſo auch (nach 101)

$$[AB\cdots E] = [a_1\cdots a_u],$$

und dies ein rein regressives Produkt (nach 115).

Hosted by Google

120. Ein reines Produkt bleibt ſich ſelbst kongruent, wenn man die Ordnung der Faktoren beliebig ändert, d. h. $P_{A,B} \equiv P_{B,A}$.

Beweis 1. Sind q und r die Stufenzahlen von A und B, und ist zuerst das Produkt [AB] ein progressives, ſo ist (nach 58)

$$[AB] = (-1)^{qr}[BA], \text{ alſo } [AB] \equiv [BA].$$

Ist das Produkt [AB] ein regressives, die Stufe des Hauptgebietes n, ſo ist [|A|B] (nach 115) ein progressives Produkt, und da $n - q$ und $n - r$ die Stufen von |A und |B ſind

$$[|A|B] = (-1)^{(n-q)(n-r)}[|B|A],$$

alſo (nach 101)

$$[AB] = (-1)^{(n-q)(n-r)}[BA], \text{ alſo auch } [AB] \equiv [BA].$$

2. Ist ferner das Produkt [PAB] ein reines, ſo ist

$$[PAB] = [P \cdot AB] \qquad [119]$$
$$\equiv [P \cdot BA]$$

nach Beweis 1 und nach 2, 40; dies wieder

$$= [PBA] \qquad [119],$$

alſo

$$[PAB] \equiv [PBA],$$

d. h. das Produkt bleibt ſich kongruent, wenn man zwei auf einander folgende Faktoren vertauscht.

3. Durch Vertauschung zweier auf einander folgender Faktoren kann man nun nach und nach jeden Faktor auf jede beliebige Stelle bringen, alſo den Faktoren jede beliebige Ordnung geben, während dabei nach Beweis 2 das Produkt ſich kongruent bleibt.

121. Wenn ein reines Produkt zwei einander incidente Faktoren, deren Stufenzahl nicht null ist, enthält, ſo ist das Produkt null, d. h. $P_{A,B} = 0$, wenn P reines Produkt und A und B incidente Faktoren ſind.

Beweis 1. Sind A und B die einander incidenten Faktoren, alſo der eine dem andern untergeordnet, etwa B dem A, ſo ist B das gemeinſchaftliche Gebiet und A das verbindende, alſo das Produkt [AB], da die Stufe von $B > 0$, und die von $A < n$ ist, (nach 109) null.

2. Enthält alſo ein Produkt P zwei einander incidente

Hosted by Google

Faktoren A und B, so kann man (nach 120) die Faktoren so ordnen, dass A und B auf einander folgen, wobei das Produkt sich selbst kongruent bleibt, also auch (nach 2) in dem einen Falle null bleibt, wenn es in dem andern null ist. Dann kann man (nach 119) diese beiden Faktoren in eine Klammer schliessen. Ihr Produkt ist null nach Beweis 1, also ein Faktor von P null, also auch P selbst null.

122. Ein gemischtes Produkt dreier Grössen [ABC] ist dann und nur dann null, wenn entweder $[AB] = 0$ ist, oder alle drei Grössen A, B, C von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als 0-ter Stufe gemein haben.

Beweis. Es seien α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C, also $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ (nach 116). Es sei $[AB] \gtrless 0$, und sei zuerst $\alpha + \beta > n$ etwa $= n + \delta$, so lassen sich (nach 87) A und B auf einen gemeinschaftlichen Faktor δ-ter Stufe D bringen, so dass $A = DE$, $B = DF$ sind, so ist

$$[AB] = [DEF]D \qquad [105],$$

also da [AB] nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, so muss auch [DEF] $\gtrless 0$ sein. Dann ist

$$[ABC] = [DEF][DC],$$

also, da [DEF] eine von null verschiedene Zahl ist, so ist [ABC] dann und nur dann null, wenn [DC] es ist. Die Stufe von [DC] ist $= \delta + \gamma = \alpha + \beta - n + \gamma$, also $< n$, da $\alpha + \beta + \gamma < 2n$ ist. Also ist das Produkt [DC] dann und nur dann null (nach 109), wenn D und C ein System von höherer als nullter Stufe gemein haben, d. h. (da D das gemeinsame System von A und B ist) wenn A, B und C ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Es sei zweitens $\alpha + \beta = < n$, so ist [AB] ein progressives Produkt, also, da [AB] nach der Annahme $\gtrless 0$ ist, das Produkt [(AB)C] (nach 109) dann und nur dann null, wenn [AB] und C, d. h. A, B und C, von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst werden. Somit bewiesen.

123. Die Ordnung, in welcher man mit zwei einander incidenten einfachen Grössen fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Resultat, d. h.

$$[ABC] = [ACB], \text{ wenn B incident C.}$$

Hosted by Google

Beweis 1. Wenn B oder C von nullter Stufe, d. h. Zahlen ſind, ſo findet die Gleichheit beider Seiten statt (nach 13). Wenn die Produkte reine ſind, ſo ſind beide Seiten (nach 121) null, folglich ist der Satz nur noch zu erweiſen für den Fall des gemischten Produktes, in welchem B und C von höherer als nullter Stufe ſind; d. h. (wenn α, β, γ die Stufenzahlen von A, B, C ſind, und n die des Hauptgebietes) für den Fall, dass $\alpha + \beta + \gamma > n$ und $< 2n$ und β und γ von null verschieden ſind. Wir können, da die zu erweiſende Formel ſich nicht ändert, wenn man B und C mit einander verwechſelt, annehmen, dass $\beta = < \gamma$ ſei, d. h. da B und C einander incident ſind, dass B dem C untergeordnet ſei. Ausserdem nehmen wir zunächst an, auch A ſei eine einfache Grösse. Da die Summe $\alpha + \beta$ ebenſo gross oder kleiner als die Summe $\alpha + \gamma$ ist, ſo ſind nur drei Fälle möglich: entweder beide Summen ſind kleiner als n, oder beide grösser als n, oder es ist $\alpha + \gamma = > n$ und $\alpha + \beta = < n$.

2. Sind beide Summen kleiner als n, alſo auch $\alpha + \gamma < n$, ſo werden die drei Grössen A, B, C, von denen B der Grösse C untergeordnet ist, von einem Gebiete $\alpha + \gamma$-ter Stufe, alſo von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst, ſomit ſind (nach 121) ſowohl [ABC] als [ACB] null, alſo

$$[ABC] = [ACB].$$

3. Sind $\alpha + \beta$ und $\alpha + \gamma > n$, ſo ſind $(n - \alpha) + (n - \beta)$ und $(n - \alpha) + (n - \gamma) < n$, alſo dann, da $n - \alpha$, $n - \beta$, $n - \gamma$ die Stufenzahlen der Ergänzungen von A, B, C ſind,

$$[|A|B|C] = [|A|C|B] \quad \text{(nach Beweis 2)},$$

alſo (nach 101)

$$[ABC] = [ACB].$$

4. Ist $\alpha + \gamma = > n$ und $\alpha + \beta = < n$, ersteres etwa $= n + \delta$, wo δ auch null ſein kann, ſo müssen (nach 87) A und C ſich auf einen gemeinſchaftlichen Faktor D von δ-ter Stufe bringen lassen in der Art, dass $C = [DE]$ ſei, wo D und E einfache Grössen ſind und D dem A untergeordnet ist. Dann ist E von $(\gamma - \delta)$-ter Stufe, alſo die Summe der Stufenzahlen von A und E gleich $\alpha + \gamma - \delta = n$, ſomit ist (nach 108)

$$[AC] = [A \cdot DE] = [AE]D, \text{ alſo}$$
$$[ACB] = [AE][DB].$$

Hosted by Google

Hier ist das Produkt [DB] ein progressives, da $\delta + \beta = \alpha + \beta + \gamma - n < n$ ist, indem das Produkt ein gemischtes sein sollte. Wenn nun [DB] null ist, so haben (nach 109) D und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein, dann haben aber auch, da D dem A untergeordnet ist, A und B dies Gebiet gemein, das Produkt [AB] ist aber, da $\alpha + \beta = < n$ ist, ein progressives, folglich dies (nach 109) null. Also dann auch $[ABC] = 0$, ebenso wie [ACB], und somit beide einander gleich. Ist aber $[DB] \gtrless 0$, so ist, da D und B beide dem C untergeordnet sind, auch ihr verbindendes Gebiet [DB] dem Gebiete von C untergeordnet, also C (nach 79b) in der Form [DBF] darstellbar, wo F wieder eine einfache Grösse ist. Dann wird, da wir oben $C = DE$ setzten, $E = BF$ gesetzt werden können, und man erhält:

$$[ACB] = [AE][DB] = [ABF][DB].$$

Ferner:

$$[ABC] = [AB \cdot DBF] = [ABF][DB] \qquad \text{(nach 108)},$$

weil nämlich D dem A untergeordnet ist, also [DB] dem [AB], und weil $[ABF] = [AE]$, wie oben gezeigt, von nullter Stufe ist. Also erhält man $[ACB] = [ABC]$.

5. Hiermit sind, da $\beta = < \gamma$ angenommen war, alle Fälle erschöpft, sofern A eine einfache Grösse ist. Ist nun A eine zusammengesetzte Grösse, so ist sie immer (nach 77) aus einfachen Grössen numerisch ableitbar. Es sei $A = \sum \alpha_r A_r$, wo alle A_r einfache Grössen sind, so ist

$$\begin{aligned} [ABC] &= \sum \alpha_r [A_r BC] && [44] \\ &= \sum \alpha_r [A_r CB] && \text{[nach Beweis 1—4]} \\ &= [ACB] && [44]. \end{aligned}$$

124. Wenn q, r, s die Stufenzahlen dreier einfacher Grössen A, B, C sind und n die des Hauptgebietes, so sind die Produkte [ABC] und [ACB] nur in folgenden Fällen kongruent

$$[ABC] \equiv [ACB],$$

a) wenn $\alpha + \beta + \gamma = < n$ ist, dann ist

$$[ABC] = (-1)^{rs}[ACB],$$

b) wenn $\alpha + \beta + \gamma = > 2n$ ist, dann ist

$$[ABC] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[ACB],$$

Hosted by Google

c) wenn [AB] und [AC] null sind, dann ist

$$[ABC] = [ACB] = 0,$$

d) wenn [ABC] ein gemischtes Produkt ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete von niederer als n-ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$[ABC] = [ACB] = 0,$$

e) wenn $q + r + s = n + t$ ist und B und C entweder ein Gebiet von t-ter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete t-ter Stufe umfasst werden; dann ist

$$[ABC] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

f) wenn B und C einander incident sind; dann ist

$$[ABC] = [ACB].$$

Beweis. Formel a) ist in 58 bewiesen. Ist $q + r + s \gtrless 2n$, so ist $(n - q) + (n - r) + (n - s) \lessgtr n$, also da $n - q$, $n - r$, $n - s$ die Stufenzahlen der Ergänzungen von A, B, C sind, so ist in diesem Falle

$$[|A|B|C] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[|A|C|B] \qquad \text{(Formel a).}$$

Also (nach 101)

$$[ABC] = (-1)^{(n-r)(n-s)}[ACB].$$

Somit ist Formel b bewiesen. Da in diesen beiden Fällen $q + r + s$ entweder $\lessgtr n$ oder $\gtrless 2n$ war, so bleibt nur der Fall übrig, wo $q + r + s > n$ und $< 2n$ ist, also der Fall des gemischten Produktes. Angenommen zuerst, [ABC] sei null. Ein gemischtes Produkt [ABC] ist (nach 122) dann und nur dann null, wenn entweder $[AB] = 0$ ist, oder alle drei Grössen A, B, C von einem Gebiete niederer als n-ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Tritt einer der beiden letzten Fälle ein, so ist sowohl [ABC] als [ACB] null, und also $[ABC] = [ACB] = 0$, somit Formel (d) bewiesen. Tritt aber von diesen beiden Fällen keiner ein, so kann [ABC] nicht anders null werden, als wenn [AB] null ist; ist dies der Fall und soll dann [ABC] kongruent [ACB] sein, so muss auch [ACB] null sein, dies kann aber, da die beiden genannten Fälle ausgeschlossen sind, nicht anders geschehen als wenn auch [AC] null ist, und es tritt also dann der Fall (c) ein. Es bleiben also nur noch

Hosted by Google

die Fälle des von null verschiedenen gemischten Produktes übrig. Da $q + r + s < 2n$ und $> n$ ist, so können wir $q + r + s = n + t$ setzen, wo $t > 0$ und $< n$ ist. Nun seien hier (genau wie in 123) drei Fälle unterschieden. Erstens der, wo die Summen $q + s$ und $q + r$ beide kleiner als n sind. Dann ist, da [AB] und [AC] dann von null verschiedene progressive Produkte sind, $q + r$ die Stufe von [AB] und $q + s$ die von [AC]. Dann haben [AB] und C (nach 26) einen Faktor von $q + r + s - n$-ter, d. h. t-ter Stufe gemein. Dieser sei D, und sei $C = [DE]$, so ist die Summe der Stufenzahlen von A, B, E gleich n, und D ist dem [AB] untergeordnet. Folglich ist dann (nach 108)

$$[ABC] = [AB \cdot DE] = [ABE] \cdot D.$$

Also da [ABE] eine Zahl ist, so ist $[ABC] \equiv D$, somit muss, wenn $[ABC] \equiv [ACB]$ sein soll, auch $[ACB] \equiv D$ sein, d. h. [AC] und B müssen sich auf einen mit D kongruenten gemeinschaftlichen Faktor bringen lassen, also auch auf den Faktor D selbst; folglich muss D dem B untergeordnet sein, es war aber auch dem C untergeordnet, d. h. B und C lassen sich auf den gemeinschaftlichen Faktor t-ter Stufe D bringen, d. h. haben ein System t-ter Stufe gemein, was die erste Bedingung für Formel (e) ist. Es sei $B = [DF]$, so ist

$$\begin{aligned} [ABC] &= [AB \cdot DE] = [ABE]D && [108] \\ &= [A(DF)E]D = [ADFE]D && [119] \\ [ACB] &= [AC \cdot DF] = [ACF]D && [108] \\ &= [A(DE)F]D = [ADEF]D && [119]. \end{aligned}$$

Da nun $C = [DE]$ war, so ist E von $(s - t)$-ter Stufe, und da $B = [DF]$ war, so ist F von $(r - t)$-ter Stufe, somit

$$[ADFE]D = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ADEF]D \qquad [58],$$

also

$$[ABC] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

was die Formel (e) ist.

Sind hingegen die beiden Summen $q + r$ und $q + s$ grösser als n, so sind die Summen $(n - q) + (n - r)$ und $(n - q) + (n - s)$ kleiner als n, und $(n - q) + (n - r) + (n - s) = n + (n - t)$. Folglich sind in diesem Falle (nach Fall e) die Produkte [|A|B|C] und [|A|C|B] nur dann einander kon-

Hosted by Google

gruent, wenn ſich |B und |C auf einen gemeinſchaftlichen Faktor von (n — t)-ter Stufe bringen laſſen. Dieſer ſei |D und ſei |B = [|D|F], |C = [|D|E], ſo iſt (nach e)

$$[|A|B|C] = (-1)^{(t-r)(t-s)}[|A|C|B].$$

Aber (nach 98) iſt dann

$$B = [DF],\ C = [DE]$$

$$[ABC] = (-1)^{(t-r)(t-s)}[ACB] = (-1)^{(r-t)(s-t)}[ACB],$$

d. h. es tritt die zweite Bedingung der Formel (e) und dieſe ſelbſt ein, indem nämlich das Produkt B = [DF], da B von geringer Stufe als D iſt, als regreſſives erſcheint, und ebenſo [DE], und alſo B und C beide dem D untergeordnet ſind, alſo von dem Gebiete D umfaſst werden.

Es bleibt ſomit nur noch der Fall übrig, wo von den Summen q + r und q + s die eine, etwa die erſtere, ebenſo groſs oder kleiner, die andere ebenſo groſs oder grösser als n iſt. Dann laſſen ſich (nach 26) [AB] und C auf einen gemeinſchaftlichen Faktor q + r + s — n-ter, d. h. t-ter Stufe bringen. Dieſer ſei D, und ſei C = [DE] *), ſo wird

$$[ABC] = [AB \cdot DE] = [ABE]D \qquad [108].$$

Ferner ſei q + s = n + v, ſo haben A und C einen Faktor von v-ter Stufe gemein, dieſer ſei F, und ſei C = [FG], ſo iſt

$$[AC] = [A \cdot FG] = [AG]F \qquad [108].$$

Alſo

$$[ACB] = [AG][FB].$$

Soll alſo [ABC] ≡ [ACB] ſein, ſo muss, da [ABE] und [AG] von null verſchiedene Zahlen ſind, D ≡ [FB] ſein, d. h. B iſt dem D untergeordnet, aber auch D dem C, alſo B dem C untergeordnet, d. h. B und C ſind einander incident. Dies iſt die Bedingung der Formel (f) und (nach 123) iſt dann

$$[ABC] = [ACB].$$

Somit der Satz vollſtändig bewieſen.

125. In denſelben und in keinen andern Fällen (wie in 124) iſt

$$[BAC] \equiv [B \cdot AC].$$

*) Sollte q + r = n ſein, ſo würde E von nullter Stufe ſein, was in dem obigen Beweiſe mit eingeſchlossen iſt, dasſelbe gilt im Folgenden von F.

Hosted by Google

Beweis. Es ist in den in 124 angenommenen Fällen

$$[BAC] \equiv [ABC] \quad [58]$$
$$\equiv [ACB] \quad [123]$$
$$\equiv [B \cdot AC] \quad [58].$$

und umgekehrt folgt aus der letzten Kongruenz wieder die erste.

Anm. Es ergiebt sich ins Besondere für Fall (c) und (d)

$$[ABC] = [B \cdot AC] = 0,$$

für Fall (a) und (b)

$$[BAC] = [B \cdot AC].$$

Dagegen spaltet sich der Fall (e) in zwei Fälle; nämlich wenn die Summen $q + r$ und $q + s$ kleiner als n sind, so ist

$$[BAC] = (-1)^{qt}[B \cdot AC],$$

und wenn jene Summen grösser als n sind,

$$[BAC] = (-1)^{(n-q)(n-t)}[B \cdot AC].$$

Der Fall (f) spaltet sich in zwei Fälle, nämlich wenn $q + r$ kleiner, und $q + s$ grösser als n ist, so wird

$$[BAC] = (-1)^{r(n-s)}[B \cdot AC],$$

wenn umgekehrt $q + r$ grösser und $q + s$ kleiner als n ist,

$$[BAC] = (-1)^{(n-r)s}[B \cdot AC].$$

Wenn eine der Summen gleich n ist, so gilt sowohl diejenige Formel, bei welcher die Summe grösser, als diejenige, wo sie kleiner als n vorausgesetzt war, indem dann beide Formeln identisch werden. Auch ist zu bemerken, dass wenn in f, d. h. in dem Falle der Incidenz von B und C, die Bedingung eintritt, dass beide Summen grösser als n oder beide kleiner als n sind, sowohl [BA], als [B·AC] null werden, und also zugleich der Fall c oder d statt hat.

126. Ein Produkt nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn man die Ordnung aller seiner Faktoren umkehrt, oder die letzten Faktoren in beliebiger Anzahl mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliesst, d. h.

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] \equiv [A_nA_{n-1} \cdots A_2A_1]$$
$$\equiv [A_1 \cdot A_nA_{n-1} \cdots A_2].$$

Beweis. Es sei zuerst

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-2}] = P,$$

so ist

$$[A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n] = [PA_{n-1}A_n].$$

Da das Produkt von nullter Stufe sein soll, so muss die Summe der Stufenzahlen von P, A_{n-1}, A_n (nach 96) durch n theilbar, also, da die einzelnen Stufenzahlen > 0 und $< n$ sind, entweder gleich n oder gleich 2n sein; im ersteren Falle ist das Produkt der drei Grössen P, A_{n-1}, A_n ein rein pro-

Hosted by Google

gressives, im letzteren ein rein regressives, in beiden alfo ein reines, fomit (nach 125)

$$[PA_{n-1}A_n] \equiv [P \cdot A_n A_{n-1}],$$

oder

$$[A_1 A_2 \cdot \cdot \cdot \cdot A_{n-1} A_n] \equiv [A_1 \cdot \cdot \cdot A_{n-2} \cdot A_n A_{n-1}].$$

Betrachten wir diefen Ausdruck als ein Produkt der drei Grössen $[A_1 \cdot \cdot \cdot A_{n-3}]$, A_{n-2} und $[A_n A_{n-1}]$, fo erhalten wir auf gleiche Weife den zuletzt gewonnenen Ausdruck

$$\equiv [A_1 \cdot \cdot \cdot A_{n-3} \cdot A_n A_{n-1} A_{n-2}].$$

Wendet man dies Verfahren r-mal an, fo erhält man

$$[A_1 \cdot \cdot \cdot \cdot A_n] \equiv [A_1 \cdot \cdot \cdot \cdot A_{n-r-1} \cdot A_n A_{n-1} \cdot \cdot \cdot A_{n-r}],$$

d. h. das Produkt bleibt fich felbst kongruent, wenn man die letzten Faktoren in beliebiger Anzahl (r) mit umgekehrter Ordnung in Klammern schliesst. Hiernach wird nun auch

$$[A_1 A_2 \cdot \cdot \cdot \cdot A_n] \equiv [A_1 \cdot A_n A_{n-1} \cdot \cdot \cdot \cdot A_2],$$

fomit (nach 58)

$$\equiv [A_n A_{n-1} \cdot \cdot \cdot A_2 A_1],$$

alfo auch der erste Theil des Satzes bewiefen.

§. 7. Zurückleitung und Ersetzung.

127. Erklärung. Wenn n die Stufenzahl des Hauptgebietes, $A_1 \cdot \cdot \cdot A_\nu$ die multiplikativen Kombinationen aus den n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster oder (n — 1)-ter Stufe, $a_1 \cdot \cdot \cdot a_n$ zu irgend einer Klasse und $A_1 \cdot \cdot \cdot \cdot A_u$ die multiplikativen Kombinationen aus m derfelben, etwa aus $a_1, \cdot \cdot \cdot \cdot a_m$ zur gleichen Klasse find, und

$$C = \alpha_1 A_1 + \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_\nu A_\nu,$$

$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_u A_u$$

ist, fo nenne ich C_1 die Zurückleitung von C auf das Gebiet $[a_1 \cdot \cdot \cdot \cdot a_m]$, unter Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \cdot \cdot a_n]$, und zwar nenne ich die Zurückleitung eine progressive, wenn $a_1 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ Grössen erster Stufe, eine regressive, wenn $a_1 \cdot \cdot \cdot \cdot a_n$ Grössen (n — 1)-ter Stufe find. Die Zurückleitungen mehrerer Grössen heissen in demfelben Sinne genommen, wenn fie auf dasfelbe Gebiet und unter Ausschluss desfelben Gebietes zurückgeleitet find (vergl. 33).

Anm. Ist z. B. das Hauptgebiet von vierter Stufe (wie z. B. der Raum), und find a, b, c, d vier in keiner Zahlbeziehung zu einander

Hosted by Google

stehende Grössen erster Stufe (z. B. vier nicht in ein und derfelben Ebene liegende Punkte), fo ist $C_1 = [bc] + [ca] + [ab]$ (im Raume eine Linie) die (progressive) Zurückleitung von $C = [bc] + [ca] + [ab] + [ad] + [bd] + [cd]$ auf das Gebiet [abc] (alfo auf die Ebene abc), unter Ausschluss des Gebietes d. Bezeichnen wir ferner [bcd] mit a', [cad] mit b', [abd] mit c' und [acb] mit d', fo find a', b', c', d' Grössen $(n-1)$-ter Stufe, da $n=4$ ist und fetzen wir noch $[abcd]=1$, fo ist $[b'c'] = [ad]$, $[c'a'] = [bd]$, $[a'b'] = [cd]$, $[a'd'] = [bc]$, $[b'd'] = [ca]$, $[c'd'] = ab$, und es wird

$$C = [a'd'] + [b'd'] + [c'd'] + [b'c'] + [c'a'] + [a'b'].$$

Dann wird, wenn

$$C' = [b'c'] + [c'a'] + [a'b']$$

ist, C' die (regressive) Zurückleitung von C auf das Gebiet $[a'b'c']$, unter Ausschluss des Gebietes d', fein, d. h., da $[a'b'c'] = [cd \cdot abd] \equiv d$, und $d' \equiv [abc]$ ist, C' ist die Zurückleitung von C auf das Gebiet d, unter Ausschluss des Gebietes [abc]. So erscheint alfo in der Geometrie die Zurückleitung einer Linie auf eine Ebene als progressive Zurückleitung, und die einer Linie auf einen Punkt als regressive Zurückleitung. Die Zurückleitung felbst ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Projektion im weitesten und prägnantesten Sinne des Wortes (f. u.).

Wir haben oben (33) die in der Definition bestimmte Grösse C_1 die Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet der Grössen $A_1, A_2, \cdots A_u$ genannt. Diefer Benennungsweife haben wir hier die für die Anwendung bequemere zur Seite gefetzt.

128. Je nachdem die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, grösser oder kleiner als die Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse ist, erscheint die Zurückleitung als progressive oder regressive. Wenn die Stufenzahl jenes Gebietes gleich der Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse ist, fo kann die Zurückleitung fowohl eine progressive als eine regressive fein.

Beweis. Es feien $a_1 \cdots a_n$ Grössen erster Stufe, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und feien $A_1, \cdots A_v$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$ zur p-ten Klasse, und $A_1 \cdots A_u$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ zur p-ten Klasse und

$$C = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_v A_v$$
$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u,$$

alfo (nach 127) C_1 die progressive Zurückleitung der Grösse C auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, unter Ausschluss des Gebietes

Hosted by Google

$[a_{m+1} \cdots a_n]$, ſo würde es, wenn $m < p$ wäre, gar keine Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ zur p-ten Klasse geben, alſo auch keine progressive Zurückleitung. Es muss alſo für die progressive Zurückleitung $m > = p$ ſein, da aber m die Stufenzahl des Gebietes $[a_1 \cdots a_m]$ und p die der multiplikativen Kombinationen $A_1, \cdots A_n$, alſo auch die von C ist, ſo muss die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenſo gross oder grösser ſein als die der zurückgeleiteten Grösse. Macht man im Uebrigen dieſelben Annahmen wie vorher, mit dem einzigen Unterschiede, dass $a_1, \cdots a_n$ Grössen $(n-1)$-ter Stufe ſind (in dem Hauptgebiete n-ter Stufe), ſo ist die Zurückleitung eine regressive; und auch hier muss, aus gleichem Grunde wie vorher, $m > = p$ ſein. Aber dann ist (nach 90) die Stufenzahl von $[a_1 \cdots a_m]$ gleich $n - m$ und die von C gleich $n - p$, ſomit, da $n - m < = n - p$ ist, ſo ist die Stufenzahl des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenſo gross oder kleiner als die der zurückgeleiteten Grösse. Ist alſo die Stufenzahl jenes Gebietes grösser oder kleiner als die Stufenzahl der zurückgeleiteten Grösse, ſo wird die Zurückleitung im ersteren Falle eine progressive, im letzteren eine regressive ſein. Sind hingegen die genannten Stufenzahlen einander gleich, ſo wird die Zurückleitung ſowohl eine progressive als auch eine regressive ſein können.

129. Die Zurückleitung A′ einer Grösse A auf ein Gebiet B, unter Ausſchluss des Gebietes C, ist

$$A' = \frac{[B \cdot AC]}{[BC]}, \text{ alſo } A' = [B \cdot AC], \text{ wenn } [BC] = 1 \text{ ist.}$$

Beweis. Es ſeien $a_1 \cdots a_n$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehende Grössen erſter oder $(n-1)$-ter Stufe, und $A_1 \cdots A_v$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$, und $A_1 \cdots A_u$ die aus $a_1 \cdots a_m$ und $A = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_v A_v$, alſo $A' = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u$, und ſei $[a_1 \cdots a_m] = B$, $[a_{m+1} \cdots a_n] = C$, ſo ist

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u + \alpha_{u+1} A_{u+1} + \cdots \alpha_v A_v) C];$$

aber da $A_1, \cdots, A_u$ die Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ ſind und $A_{u+1} \cdots A_v$ diejenigen Kombinationen aus $a_1 \cdots a_n$, welche nicht zugleich Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ ſind, ſo muss

Hosted by Google

jede der Grössen $A_{u+1}, \cdots A_v$ mindestens einen der Faktoren $a_{m+1} \cdots a_n$ enthalten, alſo mindestens einen Faktor mit $C = [a_{m+1} \cdots a_n]$ gemein haben. Die Produkte $[A_{u+1}C], \cdots [A_vC]$ ſind aber in Bezug auf die Faktoren $a_1 \cdots a_n$ reine (nach 114), ſomit, da ſie gleiche Faktoren enthalten, null, alſo wird

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u)C] = \alpha_1[A_1C] + \cdots \alpha_u[A_uC].$$

Folglich iſt

$$[B \cdot AC] = \alpha_1[B \cdot A_1C] + \cdots \alpha_u[B \cdot A_uC].$$

Da nun jede der Grössen $A_1, \cdots A_u$ aus Faktoren beſteht, die in B enthalten ſind, ſo iſt jede derſelben mit B incident, ſomit, da auch die Stufenzahlen von B und C zuſammen n betragen, ſo iſt (nach 108)

$$[B \cdot A_1C] = [BC]A_1, \cdots, [B \cdot A_uC] = [BC]A_u,$$

alſo

$$[B \cdot AC] = [BC](\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_u A_u) = [BC]A'.$$

Alſo, da [BC] eine Zahl iſt

$$A' = \frac{[B \cdot AC]}{[BC]}.$$

130. Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache je einer Grösse m-ter Stufe ſind, bleibt beſtehen, wenn man ſtatt aller dieſer Grössen ihre in demſelben Sinne genommenen Zurückleitungen ſetzt; oder wenn

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots$$

iſt und P', A', B', $\cdots$ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von P, A, B, $\cdots$ und α, β, $\cdots$ Zahlen ſind, ſo iſt auch

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

Beweis. Es ſei Q das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, und R das ausgeſchloſſene Gebiet und $[QR] = 1$, ſo erhält man aus der Gleichung

$$P = \alpha A + \beta B + \cdots,$$

durch Multiplikation

$$[PR] = \alpha[AR] + \beta[BR] + \cdots$$

und

$$[Q \cdot PR] = \alpha[Q \cdot AR] + \beta[Q \cdot BR] + \cdots,$$

d. h. (nach 129)

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \cdots.$$

Hosted by Google

131. Die progressive Zurückleitung eines rein progressiven und die regressive eines rein regressiven Produktes ist gleich dem Produkte der in demfelben Sinne genommenen Zurückleitungen der Faktoren jenes Produktes, d. h. wenn das reine Produkt P

$$P = [AB \cdots E]$$

ist, und P′, A′, B′, ··E′ die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von P, A, B, ··E find (und zwar progressive oder regressive, je nachdem das Produkt progressiv oder regressiv ist), fo ist auch

$$P' = [A'B' \cdots E'].$$

Beweis. Es fei $A = [a_1 \cdot \cdots a_q]$, $B = [a_{q+1} \cdot \cdots a_r]$, $\cdots$ $E = [a_{t+1} \cdot \cdots a_v]$, wo $a_1 \cdot \cdots a_v$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe find, je nachdem das Produkt $[AB \cdots E]$ ein progressives oder regressives war. Dann ist

$$P = [a_1 \cdot \cdots \cdot a_v]$$

ein reines Produkt von Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe. Ferner fei $Q = [u_1 \cdot \cdots u_m]$ das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, $R = [u_{m+1} \cdots u_n]$ das ausgeschlossene Gebiet und $[QR] = 1$, wobei $u_1 \cdot \cdots u_n$ Grössen erster oder $(n-1)$-ter Stufe find, je nachdem $a_1 \cdots a_v$ es find. Nun ist (nach 129)

$$P' = [Q \cdot PR]$$
$$= [u_1 \cdot \cdots u_m (a_1 \cdot \cdots a_v \cdot u_{m+1} \cdot \cdots u_n)].$$

Wenn nun das urſprüngliche Produkt $[AB \cdots E]$ ein progressives ist, fo foll auch die Zurückleitung eine progressive, d. h. (nach 127) die Stufenzahl von Q eben fo gross oder grösser als die von P fein, d. h. $m \geqq v$, folglich $v + n - m \leqq n$, d. h. das Produkt $[a_1 \cdots a_v \cdot u_{m+1} \cdot \cdots u_n]$ ein rein progressives, alfo auch $= [a_1 \cdot \cdots a_v u_{m+1} \cdot \cdots u_n]$, und da alle Faktoren von erster Stufe find, ein kombinatorisches (nach 94, 78). Nun fei

$$a_r = \alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots \alpha_n^{(r)} u_n,$$

fo können wir (nach 67) in dem Produkte $[a_1 \cdots a_v u_{m+1} \cdot \cdots u_n]$ ſtatt $a_r = \alpha_1^{(r)} u_1 \cdot \cdots \alpha_n^{(r)} u_n$ ſetzen: $\alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots \alpha_m^{(r)} u_m$, weil $u_{m+1} \cdot \cdots u_n$ als Faktoren in jenem Produkte vorkommen; aber $\alpha_1^{(r)} u_1 + \cdots \alpha_m^{(r)} u_m$ ist die Zurückleitung von a_r auf das Gebiet

Hosted by Google

$Q = [u_1 \cdot \cdot u_m]$, mit Ausschluss des Gebietes $R = [u_{m+1} \cdots u_n]$. Somit wird, wenn wir diese Zurückleitung mit a'_r bezeichnen

$$P' = [u_1 \cdots u_m \cdot a'_1 \cdots a'_v u_{m+1} \cdots u_n].$$

Hier ist $a'_1 \cdots a'_v$ dem $u_1 \cdots u_m$ untergeordnet, also (nach 108)

$$P' = [u_1 \cdots u_n] \cdot [a'_1 \cdots a'_v] = [a'_1 \cdots a'_v].$$

Aus gleichem Grunde ist

$$A' = [a'_1 \cdots a'_q],\ B' = [a'_{q+1} \cdots a'_r], \cdots$$
$$E' = [a'_{t+1} \cdots a'_v].$$

Somit

$$P' = [A'B' \cdots E'].$$

2. Wenn das ursprüngliche Produkt $[AB \cdots E]$ ein regressives ist, und also auch die Zurückleitung von P auf Q, unter Ausschluss von R, eine regressive, d. h. die Stufenzahl von P kleiner oder ebensogross als die von Q ist, so kehrt sich das regressive Produkt und ebenso die regressive Projektion (nach 115 und 90 Zusatz) in das progressive Produkt und in die progressive Projektion um. Sind daher P_1, Q_1, R_1, A_1, $B_1, \cdots E_1$ die Ergänzungen von P, Q, R, A, B, $\cdots$ E, und P'_1, A'_1, $B'_1 \cdots E'_1$ die Zurückleitungen von P_1, A_1, $B_1, \cdots E_1$ auf Q_1, unter Ausschluss von R_1, so ist (nach 101)

$$P_1 = [A_1 B_1 \cdots E_1],$$

und nach Beweis 1

$$(*)\ P'_1 = [A'_1 B'_1 \cdots E'_1].$$

Ferner ist (nach 129)

$$P' = [Q \cdot PR],\ P'_1 = [Q_1 \cdot P_1 R_1] = |[Q \cdot PR] \text{ (nach 98)},$$

also $P'_1 = |P$ und ebenso $A'_1 = |A'$, $B'_1 = |B', \cdots$, also (nach *)

$$|P' = [|A'|B' \cdots |E']$$
$$P' = [A'B' \cdots E'] \qquad \text{(nach 101)}.$$

3. Sind nun endlich A, B, $\cdots$ E zusammengesetzte Grössen,

$$A = \sum \overline{\alpha_r A_r},\ B = \sum \overline{\beta_s B_s}, \cdots E = \sum \overline{\varepsilon_v E_v},$$

wo A_r, $B_s, \cdots E_v$ einfache Grössen sind und sind A'_r, $B'_s, \cdots E'_v$ die Zurückleitungen von A_r, $B_s, \cdots E_v$, so ist

$$P = [\sum \overline{\alpha_r A_r} \cdot \sum \overline{\beta_s B_s} \cdots \sum \overline{\varepsilon_v E_v}] = \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_v} [A_r B_s \cdots E_v]$$
$$= \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_v} P_{r,s,\ldots v}, \text{ wenn } P_{r,s,\ldots v} = [A_r B_s \cdots E_v] \text{ ist.}$$

Also (nach 130)

$$P' = \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_v} P'_{r,s,\ldots v} = \sum \overline{\alpha_r \beta_s \cdots \varepsilon_v} [A'_r B'_s \cdots E'_v]$$

Hosted by Google

nach Beweis 1 und 2; und dies

$= [\sum \alpha_r A'_r \sum \beta_s B'_s \cdot \cdots \sum \varepsilon_v E'_v]$ [nach 45]

$= [A'B' \cdots E']$ [130].

132. Das reine Produkt von Grössen erster Stufe oder von Grössen $(n-1)$-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist ein kombinatorisches Produkt diefer Grössen.

Beweis. Das reine Produkt von Einheiten erster Stufe ist (nach 114, 94) ein progressives, alfo (nach 94) ein äusseres, alfo (nach 78) ein kombinatorisches Produkt der Einheiten, alfo auch (nach 52) das reine Produkt von beliebigen Grössen erster Stufe ein kombinatorisches Produkt diefer Grössen. Das reine Produkt von Grössen $(n-1)$-ter Stufe ist aber (nach 101) genau denfelben Gefetzen unterworfen wie das von Grössen erster Stufe, alfo auch den Gefetzen der kombinatorischen Multiplikation, d. h. jenes Produkt ist ein kombinatorisches Produkt jener Grössen $(n-1)$-ter Stufe.

133. Eine Gleichung, deren Glieder Grössen m-ter Stufe find, wird, wenn n die Stufe des Hauptgebietes ist, durch fo viel Zahlgleichungen erfetzt, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur m-ten Klasse giebt, und zwar erhält man einen erfetzenden Verein von Gleichungen, indem man die gegebene Gleichung nach und nach mit den multiplikativen Kombinationen zur $(n-m)$-ten Klasse aus einer beliebigen Schaar von n Grössen erster Stufe, deren Produkt 1 ist, multiplicirt.

Beweis. Es fei

(a) $P = A + B + \cdots$

die gegebene Gleichung, in welcher P, A, B, $\cdots$ Grössen m-ter Stufe find, es feien ferner $e_1, \cdots e_n$ Grössen erster Stufe, deren Produkt $[e_1 \cdots e_n] = 1$ ist, und feien $E_1, E_2, \cdots E_v$ die multiplikativen Kombinationen zur m-ten Klasse aus $e_1, \cdots e_n$, und $F_1, F_2, \cdots F_v$ die ergänzenden Kombinationen, d. h. die Kombinationen aus denfelben Elementen zur $(n-m)$-ten Klasse und zwar fo geordnet, dass $[E_1F_1] = [E_2F_2] = \cdots = [E_vF_v] = 1$ fei, fo ist zu zeigen, dass die obige Gleichung erfetzt wird durch den Verein von Gleichungen, der aus

(b) $[PF_r] = [AF_r] + [BF_r] + \cdots$

Hosted by Google

dadurch hervorgeht, dass man statt r nach und nach fetzt 1, 2, ··· v. Es find (nach 77a) P, A, B, ··· numerisch ableitbar aus $E_1 \cdots E_v$. Nun fei

$$P = \pi_1 E_1 + \cdots \pi_v E_v, \quad A = \alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_v E_v,$$
$$B = \beta_1 E_1 + \cdots \beta_v E_v, \cdots$$

fo ist

$$[PF_r] = [\sum \pi_s E_s F_r] = \sum \pi_s [E_s F_r].$$

Aber da E_s und F_r, wenn $s \gtrless r$ ist, nothwendig gleiche Elemente $(e_1, \cdots e_n)$ als Faktoren enthalten, fo ist für diefen Fall $[E_s F_r] = 0$, alfo

$$[PF_r] = \pi_r [E_r F_r] = \pi_r.$$

Aus gleichem Grunde ist

$$[AF_r] = \alpha_r, \ [BF_r] = \beta_r, \cdots.$$

Gilt nun die Gleichung (a), fo gilt auch die aus ihr durch Multiplikation hervorgegangene Gleichungsgruppe (b). Gilt umgekehrt die letztere, fo hat man für jedes r von 1 ··· v, indem man für $[PF_r]$, $[AF_r]$, $[BF_r]$, ··· die gefundenen Werthe fetzt,

$\pi_r = \alpha_r + \beta_r + \cdots$, alfo auch $\pi_r E_r = \alpha_r E_r + \beta_r E_r + \cdots$ für jedes r von 1 bis v. Addirt man diefe fämmtlichen Gleichungen, fo erhält man

$$\sum \pi_r E_r = \sum \alpha_r E_r + \sum \beta_r E_r + \cdots,$$

d. h.

$$P = A + B + \cdots.$$

Somit erfetzen fich die Gleichung (a) und der Gleichungsverein (b) gegenfeitig.

Zufatz. Ist ins Befondere

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots,$$

fo ist

$$[AF_r] = \alpha_r,$$

d. h. $[AF_1] = \alpha_1, \ [AF_2] = \alpha_2, \cdots.$

§. 8. Elimination der Unbekannten aus algebraischen Gleichungen durch kombinatorische Multiplikation.

134. Aufgabe. Aus n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten diefe zu finden.

Hosted by Google

Auflöfung 1. Die n Gleichungen feien

$$(a)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)}x_n = \beta^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}x_1 + \alpha_2^{(2)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)}x_n = \beta^{(2)} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ \alpha_1^{(n)}x_1 + \alpha_2^{(n)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)}x_n = \beta^{(n)}. \end{cases}$$

Man multiplicire diefe Gleichungen beziehlich mit n extenfiven Grössen $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $\cdots e^{(n)}$, deren kombinatorisches Produkt Eins ist, und addire fie, fo erhält man, indem man

$$(b)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(1)}e^{(1)} + \alpha_1^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_1^{(n)}e^{(n)} = a_1 \\ \alpha_2^{(1)}e^{(1)} + \alpha_2^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_2^{(n)}e^{(n)} = a_2 \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_n^{(1)}e^{(1)} + \alpha_n^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_n^{(n)}e^{(n)} = a_n \\ \beta^{(1)}e^{(1)} + \beta^{(2)}e^{(2)} + \cdots \beta^{(n)}e^{(n)} = b \end{cases}$$

fetzt, die Gleichung

$$(c)\quad x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b,$$

eine Gleichung, welche die gegebenen Gleichungen (a) erfetzt. Um aus ihr x_1 zu finden, fügt man beiden Seiten der Gleichung die Faktoren a_2, a_3, $\cdots a_n$ hinzu, fo erhält man, da $[a_2a_2a_3\cdots a_n]$, $[a_3a_2a_3\cdots a_n]\cdots[a_na_2a_3\cdots a_n]$ (nach 76) null find,

$$(d)\quad x_1[a_1a_2\cdots a_n] = [ba_2a_3\cdots a_n].$$

Und ebenfo

$$x_2[a_1a_2\cdots a_n] = [a_1ba_3\cdots a_n] \text{ u. f. w.}$$

Angenommen nun zuerst, das Produkt $[a_1a_2\cdots a_n]$ fei ungleich null, fo erhält man

$$(e)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{[ba_2a_3\cdots a_n]}{[a_1a_2a_3\cdots a_n]}, \\ \text{und ebenfo} \\ x_2 = \dfrac{[a_1ba_3\cdots a_n]}{[a_1a_2a_3\cdots a_n]}, \cdots x_n = \dfrac{[a_1a_2\cdots a_{n-1}b]}{[a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n]}. \end{cases}$$

Es ist für diefen Fall noch zu zeigen, dass diefe Werthe der Unbekannten in der That der Gleichung (c) genügen. Da das Produkt $(a_1a_2\cdots a_n]$ nach der für diefen Fall gemachten Annahme ungleich null ist, fo stehen $a_1,\cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander. Da nun $a_1,\cdots a_n$ aus $e_1,\cdots e_n$ numerisch abgeleitet find und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo muss (nach 21) jede aus $e_1\cdots e_n$ numerisch ab-

Hosted by Google

leitbare Grösse, alſo namentlich b, auch aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar ſein; es ſei $b = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots y_n a_n$. Substituirt man dieſen Werth in (e), ſo wird $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \cdots$ $x_n = y_n$, alſo $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots$ $y_n a_n$, d. h. $= b$. Alſo wird der Gleichung (c) durch die Werthe (e) genügt, ſomit auch den urſprünglichen Gleichungen.

Angenommen zweitens, das kombinatoriſche Produkt $[a_1 a_2 \cdots a_n]$ ſei gleich null, ſo ſtehen $a_1 \cdots a_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander, dann muss es unter ihnen (nach 17) ſolche geben, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, und aus denen die übrigen numeriſch ableitbar ſind; es ſeien dies $a_1, \cdots a_r$ und ſeien $a_{r+1}, \cdots a_n$ aus ihnen numeriſch ableitbar. Dann muss alſo vermöge der Gleichung c auch b aus dieſen Grössen $a_1 \cdots a_r$ numeriſch ableitbar ſein. Tritt alſo der Fall ein, dass, vermöge der Natur der gegebenen Gleichungen, b nicht aus $a_1 \cdots a_r$ numeriſch ableitbar iſt, während es doch $a_{r+1}, \cdots a_n$ ſind, ſo enthalten jene Gleichungen einen Widerſpruch. Wird hingegen dieſe Bedingung erfüllt, ſo ſei die Gleichung (c) in der Form geſchrieben:

$$(f)\quad \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_r a_r = c, \text{ wo} \\ \qquad c = b - x_{r+1} a_{r+1} - x_{r+2} a_{r+2} - \cdots x_n a_n \\ \text{iſt, und man erhält} \\ x_1 = \dfrac{[c a_2 a_3 \cdots a_r]}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]},\ x_2 = \dfrac{[a_1 c a_3 \cdots a_r]}{[a_1 a_2 a_3 \cdots a_r]} \text{ u. ſ. w.} \\ \qquad\qquad x_r = \dfrac{[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} c]}{[a_1 a_2 \cdots a_r]}, \end{cases}$$

während x_{r+1} bis x_n ganz willkürlich ſind.

Anm. Setzt man für die Grössen $a_1 \cdots a_n$ und b in der Gleichung (e) ihre Werthe aus (b) ein, ſo erhält man, vermöge 79, die bekannten Ausdrücke

$$x_1 = \frac{\sum \mp \alpha_1^{(1)} \beta_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \cdots \alpha_n^{(n)}}{\sum \mp \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \cdots \alpha_n^{(n)}} \text{ u. ſ. w.}$$

Ich füge hier noch eine zweite Auflöſungsmethode bei, welche zwar auf den erſten Anblick nicht ſo einfach erſcheint, aber dennoch ihre groſſen Vorzüge hat, und deren eigentliches Weſen ſpäterhin in ein noch helleres Licht treten wird:

Auflöſung 2. Man bringe die ſämmtlichen Gleichungen auf die Form, dass ihre rechte Seite null iſt. Die Gleichungen ſeien

Hosted by Google

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(1)} + \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)} + \cdots + \alpha_n x_n^{(1)} = 0 \\ \alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)} x_1^{c} + \alpha_2^{(2)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)} x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)} x_n = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen find alfo diefelben wie in der vorigen Auflöfung, nur dass $\alpha_0^{(r)} = -\beta_0^{(r)}$ ist. Der Symmetrie wegen fügen wir noch dem ersten Gliede jeder Gleichung die Unbekannte x_0 als Faktor bei, die wir dann schliesslich gleich 1 fetzen. Nun nehme man ein System von $(n+1)$ Einheiten $e_0, e_1, \cdots e_n$ an, deren Produkt Eins ist. Dann ist (nach 91)

$$(\beta)\quad \begin{cases} [e_0|e_0] = [e_1|e_1] = [e_2|e_2] = \cdots = [e_n|e_n] \\ \qquad = [e_0 e_1 e_2 \cdots e_n] = 1. \\ \text{Ferner ist, da } |e_s \text{ (nach 98) alle übrigen Einheiten ausser } e_s \text{ als Faktoren enthält,} \\ [e_r|e_s] = 0, \text{ wenn } r \gtrless s \text{ ist} \qquad \text{[nach 60].} \end{cases}$$

Wenn nun

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x_0|e_0 + x_1|e_1 + \cdots x_n|e_n = X \\ \alpha_0^{(1)} e_0 + \alpha_1^{(2)} e_1 + \cdots \alpha_n^{(1)} e_n = a^{(1)} \\ \alpha_0^{(2)} e_0 + \alpha_1^{(2)} e_1 + \cdots \alpha_n^{(2)} e_n = a^{(2)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_0^{(n)} e_0 + \alpha_1^{(n)} e_1 + \cdots \alpha_n^{(n)} e_n = a^{(n)} \end{cases}$$

gefetzt wird, fo ergiebt fich leicht, dass die gegebenen Gleichungen (α) identisch find mit den Gleichungen

$$(\delta)\quad \begin{cases} [a^{(1)}X] = 0 \\ [a^{(2)}X] = 0 \\ \vdots \\ [a^{(n)}X] = 0. \end{cases}$$

In der That, fetzt man z. B. in der ersten diefer Gleichungen statt $a^{(1)}$ und X ihre Werthe aus (γ), fo wird diefelbe vermöge des Gleichungssystems (β) identisch mit der ersten der Gleichungen in (α) und fo bei den übrigen. Angenommen nun zuerst, $a^{(1)} \cdots a^{(n)}$ stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander. Da X eine Grösse n-ter Stufe ist und fie mit jeder der n Grössen erster Stufe $a^{(1)}$, $a^{(2)} \cdots a^{(n)}$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, zu einem kombinatorischen Produkte verbunden, null giebt, fo muss X (nach 84) mit dem kombinatorischen Produkte jener Grössen in

Hosted by Google

einer Zahlbeziehung stehen, alſo iſt, wenn λ eine noch unbestimmte Zahl iſt,

$$(\varepsilon) \quad X = \lambda A, \text{ wo } A = [a^{(1)}a^{(2)} \cdots a^{(n)}]$$

iſt; und da aus dieſer Gleichung wieder umgekehrt die Gleichungen (δ) folgen, ſo erſetzt ſie die Gleichungen (δ), alſo auch die urſprünglichen (α). Fügt man nun zu der gewonnenen Gleichung den Faktor e_0 hinzu, ſo erhält man, da $[e_0 X] = [e_0(x_0|e_0 + x_1|e_0 + \cdots)] = x_0[e_0|e_0] + x_1[e_0 e_1] + \cdots$, d. h., vermöge ($\beta$), $= x_0$ iſt, die Gleichung

$$(\zeta) \quad \begin{cases} x_0 = \lambda[e_0 A], \\ \text{und ebenſo} \\ x_1 = \lambda[e_1 A], \; x_2 = \lambda[e_2 A], \end{cases}$$

d. h.

$$(\eta) \quad x_0 : x_1 : x_2 : \cdots = [e_0 A] : [e_1 A] : [e_2 A],$$

und da x_0 gleich 1 iſt, ſo hat man $1 = \lambda[e_0 A]$

$$(\vartheta) \quad x_1 = \frac{[e_1 A]}{[e_0 A]}, \; x_2 = \frac{[e_2 A]}{[e_0 A]}, \cdots\cdots.$$

Die Auflöſung iſt alſo nur dann möglich, wenn $[e_0 A]$ von null verſchieden iſt; wenn hingegen $[e_0 A] = 0$ iſt, obwohl A von null verſchieden iſt, ſo lehrt die Gleichung $1 = \lambda[e_0 A]$, daſs dann die gegebenen Gleichungen einen Widerſpruch enthalten. Ferner läſst ſich zeigen, daſs in dem angenommenen Falle ($A \gtrless 0$ und $[e_0 A] \gtrless 0$) die Werthe (ϑ) die gegebenen Gleichungen (α) erfüllen. Denn wird $\lambda = \frac{1}{[e_0 A]}$ geſetzt, ſo werden die Gleichungen (ζ) erfüllt; die wir auch ſo ſchreiben können:

$$[e_0 X] = \lambda[e_0 A], \; [e_1 X] = \lambda[e_1 A] \cdots$$

oder

$$0 = [e_0(X - \lambda A)] = [e_1(X - \lambda A)] \text{ u. ſ. w.}$$

Alſo giebt die Grösse n-ter Stufe $X - \lambda A$ mit dem System der $n + 1$ Einheiten $e_0, \cdots e_n$ einzeln kombinatoriſch multiplicirt null; alſo iſt (nach 85) jene Grösse ſelbſt null, d. h.

$$X - \lambda A = 0$$

oder

$$X = \lambda A,$$

welche Gleichung nach dem Obigen die gegebenen Gleichungen (α) erſetzt.

Hosted by Google

Angenommen fei zweitens, $a^{(1)}$, $a^{(2)}, \cdots a^{(n)}$ stehen in einer Zahlbeziehung zu einander, ohne jedoch alle null zu fein, fo giebt es (nach 17) unter ihnen eine Schaar von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen und aus denen die übrigen numerisch ableitbar find; es mögen $a^{(1)}$, $a^{(2)} \cdots a^{(r)}$ eine folche Schaar bilden, und die übrigen $a^{(r+1)}$, $\cdots a^{(n)}$ aus ihnen numerisch ableitbar fein; und fei z. B. $a^{(n)} = \alpha_1 a^{(1)} + \alpha_2 a^{(2)} + \cdots \alpha_r a^r$, dann ergiebt fich auch für jedes X, dass

$$[a^{(n)}X] = \alpha_1[a^{(1)}X] + \alpha_2[a^{(2)}X] + \cdots \alpha_r[a^{(r)}X]$$

ist, d. h. es wird die n-te der gegebenen Gleichungen aus den r ersten gewonnen, indem man diefe beziehlich mit a_1, $a_2 \cdots a_r$ multiplicirt; d. h. die n-te Gleichung ist aus den r ersten Gleichungen numerisch ableitbar, jeder Werth X, der diefe erfüllt, erfüllt auch die letzten. Es bleiben alfo nur r Gleichungen zu erfüllen übrig, und können fomit die (n - r) letzten Unbekannten willkürlich angenommen, und dann die übrigen nach dem obigen Verfahren bestimmt werden.

Anm. Die zweite Auflöfungsmethode hat den Vorzug, dass fie den fämmtlichen n Unbekannten Eine einzige Unbekannte n-ter Stufe fubstituirt und diefe aufs Einfachste finden lehrt.

135. Aufgabe. Aus n + 1 Gleichungen, welche in Bezug auf n Unbekannte vom ersten Grade find, diefe Unbekannten zu eliminiren.

Auflöfung. Die Gleichungen feien

$$(a)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(0)} + \alpha_1^{(0)}x_1 + \alpha_2^{(0)}x_2 + \cdots \alpha_n^{(0)}x_n = 0 \\ \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots \alpha_n^{(1)}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}x_1 + \alpha_2^{(n)}x_2 + \cdots \alpha_n^{(n)}x_n = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man fie beziehlich mit n + 1 Grössen $e^{(0)}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)} \cdots e^{(n)}$, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, addirt die fo gewonnenen Gleichungen und fetzt

$$(b)\quad \begin{cases} \alpha_0^{(0)}e^{(0)} + \alpha_0^{(1)}e^{(1)} + \alpha_0^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_0^{(n)}e^{(n)} = a_0 \\ \alpha_1^{(0)}e^{(0)} + \alpha_1^{(1)}e^{(1)} + \alpha_1^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_1^{(n)}e^{(n)} = a_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_n^{(0)}e^{(0)} + \alpha_n^{(1)}e^{(1)} + \alpha_n^{(2)}e^{(2)} + \cdots \alpha_n^{(n)}e^{(n)} = a_n \end{cases}$$

fo erhält man

$$(c)\quad a_0 + x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n = 0.$$

Hosted by Google

Fügt man die kombinatorischen Faktoren $a_1, a_2, \cdots a_n$ hinzu, so erhält man, da $[a_1 a_1 a_2 \cdots a_n]$ u. s. w. null sind,

(d) $[a_0 a_1 a_2 \cdots a_n] = 0,$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

136. Aufgabe. Aus zwei Gleichungen, welche in Bezug auf eine der Unbekannten algebraisch und von beliebigem Grade sind, diese Unbekannte zu eliminiren.

Auflösung. Es sei, in Bezug auf die Unbekannte y, die eine Gleichung vom m-ten, die andere vom n-ten Grade, und seien die beiden Gleichungen

$$(a)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 y + \cdots + a_m y^m = 0 \\ b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n = 0, \end{cases}$$

wo $a_0, a_1, \cdots a_m$ und $b_0, b_1, \cdots b_n$ beliebige Funktionen der andern Unbekannten sind. Multiplicirt man die erstere nach und nach mit $1, y, y^2, \cdots y^{n-1}$, die letztere nach und nach mit $1, y, y^2, \cdots y^{m-1}$, so erhält man die Gleichungen

$$(b)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 y + \cdots + a_m y^m \\ \quad a_0 y + \cdots + a_m y^{m+1} \\ \qqud\ddots \qquad\qquad \ddots \\ \qquad a_0 y^{n-1} + \cdots + a_m y^{m+n-1} \\ b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n \\ \quad + b_0 y + \cdots + b_n y^{n+1} \\ \qquad\ddots \qquad\qquad \ddots \\ \qquad b_0 y^{m-1} \cdots + b_n y^{m+n-1}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese nach der Reihe mit n + m Einheiten, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, nämlich $e_1, e_2, \cdots e_{m+n}$, addirt die so gewonnenen Gleichungen und setzt

$$(c)\quad \begin{cases} a_0 e_1 + b_0 e_{n+1} = u_1, \\ a_1 e_1 + a_0 e_2 + b_1 e_{n+1} + b_0 e_{n+2} = u_2, \\ a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_0 e_3 + b_2 e_{n+1} + b_1 e_{n+2} + b_0 e_{n+3} = u_3, \\ \quad\vdots \\ a_m e_n + b_n e_{n+m} = u_{m+n}, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

(d) $u_1 + u_2 y + u_3 y^2 + \cdots u_{m+n} y^{m+n-1} = 0;$

und fügt man ihr die kombinatorischen Faktoren $u_2, u_3, \cdots u_{m+n}$ hinzu, so erhält man:

(e) $[u_1 u_2 u_3 \cdots u_{m+n}] = 0,$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

Hosted by Google

Auflöfung 2. Es feien die gegebenen Gleichungen diefelben wie in Auflöfung 1 (a), und fei aus ihnen das System (b) abgeleitet. Man nehme $n+m$ Einheiten $e_0, e_1, \cdots e_{n+m-1}$, deren Produkt $=1$ ist.

Wenn nun

$$(\alpha)\quad \begin{cases} |e_0 + y|e_1 + \cdots\cdots y^{m+n-1}|e_{m+n-1} = Y \\ a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots\cdots\cdots a_me_m = c_0 \\ a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots\cdots\cdots a_me_{m+1} = c_1 \\ \vdots \\ a_0e_{n-1} + a_1e_n + \cdots\cdots a_me_{m+n-1} = c_{n-1} \\ b_0e_0 + b_1e_1 + \cdots\cdots\cdots b_ne_n = d_0 \\ \vdots \\ b_0e_{m-1} + b_1e_m + \cdots\cdots b_ne_{m+n-1} = d_{m-1}, \end{cases}$$

fo werden die Gleichungen (b) gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$(\beta)\quad \begin{cases} c_0Y = c_1Y = \cdots = c_{n-1}Y = 0 \\ d_0Y = d_1Y = \cdots = d_{m-1}Y = 0. \end{cases}$$

Da nun Y eine Grösse $n+m-1$-ter Stufe ist, die nicht null ist, fo müssen die $n+m$ Grössen $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, d_0, d_1, \cdots, d_{m-1}$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen (nach 85). Alfo hat man

$$[c_0c_1\cdots\cdots c_{n-1}d_0d_1\cdots d_{m-1}] = 0,$$

was die verlangte Eliminationsgleichung ist.

Anm. 1. Es lässt fich bei diefer letzten Methode noch die Unbekannte y auf eine fehr einfache Weife ausdrücken, wenn nämlich vorausgefetzt wird, dass es unter den $n+m$ Grössen $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}, d_0, d_1, \cdots d_{m-1}$, folche $n+m-1$ Grössen giebt, welche nicht in einer Zahlbeziehung zu einander stehen; es feien dies etwa $c_1\cdots\cdots c_{n-1}, d_0, d_1\cdots d_{m-1}$ und fei ihr kombinatorisches Produkt der Kürze wegen mit A bezeichnet; dann folgt (nach 84) aus den Gleichungen

$$c_1Y = c_2Y = \cdots = c_{n-1}Y = d_0Y = d_1Y = \cdots d_{m-1}Y,$$

dass

$$Y = pA$$

ist, wo p eine unbekannte Zahl darstellt. Aber nun ist $Y = E_0 + yE_1 + \cdots$, alfo $[e_0Y] = [e_0E_0] = 1$ und $[e_1Y] = y$, alfo hat man

$$1 = e_0Y = p[e_0A]$$
$$y = e_1Y = p[e_1A],$$

alfo, indem man die zweite durch die erste dividirt,

$$y = \frac{[e_1A]}{[e_0A]},$$

Hosted by Google

wodurch y gefunden ist, während die Eliminationsgleichung in der Form

$$[c_0 A] = 0$$

erscheint.

Anm. 2. Diese Auflösungsmethoden (in der ersten der hier mitgetheilten Formen) habe ich bereits in der ersten Ausgabe der Ausdehnungslehre (1844) mitgetheilt, und von ihr in Grunert's Archiv (1845) einen Auszug gegeben. Späterhin hat Cauchy in einer Reihe von Aufsätzen, welche in den Comptes rendus von 1854 veröffentlicht sind, dieselbe Methode mitgetheilt, ohne jedoch meiner oder meines Werkes, welches ich ihm bereits 1845 zugeschickt hatte, Erwähnung zu thun. In Folge einer Prioritäts-Reclamation, welche ich in dieser Beziehung an die Pariser Academie der Wissenschaften richtete, ist eine Commission zur Prüfung derselben ernannt worden; ohne dass jedoch darüber bisher Bericht erstattet wäre; was freilich auch kaum nöthig erscheint, da die Sache selbst keinem Zweifel Raum lässt. Zu erwähnen habe ich noch, dass ich durch die Cauchy'schen Aufsätze veranlasst bin, die Klammer zur Bezeichnung der kombinatorischen und überhaupt der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation anzuwenden.

Kap. 4. Inneres Produkt.

§. 1. Grundgesetze der inneren Multiplikation.

137. Erklärung. Unter dem inneren Produkte zweier Einheiten von beliebigen Stufen verstehe ich das bezügliche Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten; d. h. wenn E und F Einheiten beliebiger Stufen sind, so ist

$[E|F]$ das innere Produkt der Einheiten E und F.

138. Das innere Produkt zweier beliebiger Grössen ist gleich dem bezüglichen Produkt der ersten in die Ergänzung der zweiten, d. h. es ist

$[A|B]$ das innere Produkt der Grössen A und B.

Beweis. Es seien $A_1, \cdots A_n$ die Einheiten, aus denen A, und $B_1, \cdots B_m$ die Einheiten, aus denen B numerisch abgeleitet ist, und sei

$$A = \alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_n A_n;\ B = \beta_1 B_1 + \cdots \beta_m B_m;$$

ferner sei für den Augenblick das Zeichen $\times$ als das der inneren Multiplikation gewählt, so ist

$$[A \times B] = [(\alpha_1 A_1 + \cdots \alpha_n A_n) \times (\beta_1 B_1 + \cdots \beta_n B_n)]$$
$$= \sum \alpha_r \beta_s [A_r \times B_s], \qquad [42]$$

Hosted by Google

wenn nämlich die Summe ſich auf die Werthe $1, \cdots n$ für r und $1, \cdots m$ für s bezieht. Da nun A_r und B_s Einheiten ſind, ſo iſt (nach 137) $[A_r \times B_s]$ gleich $[A_r|B_s]$, alſo $[A \times B]$

$$= \sum \alpha_r \beta_s [A_r|B_s] = [\sum \alpha_r A_r \sum \beta_s |B_s] \qquad [42]$$
$$= [A \sum \beta_s |B_s] = [A|\sum \beta_s B_s] \qquad [100]$$
$$= [A|B].$$

Anm. Eine beſondere Bezeichnung für das innere Produkt erſcheint alſo jetzt als überflüſſig, indem das Ergänzungszeichen die Stelle des Zeichens für die innere Multiplikation vollſtändig vertritt. Und es iſt nur zu beachten, dass dies Zeichen auch wie ein Multiplikationszeichen behandelt werden darf.

In meinen früheren Arbeiten (Geometriſche Analyſe, gekrönte Preisſchrift, Leipzig 1847) habe ich das Zeichen $\times$ für das innere Produkt eingeführt, eine Bezeichnung, die nun entbehrlich iſt.

139. Die Stufenzahl des inneren Produktes, deſſen beide Faktoren nach der Reihe die Stufenzahlen α und β haben, während die des Hauptgebietes n beträgt, iſt entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem β grösser als α iſt, oder nicht.

Beweis. Es ſeien A und B die beiden Faktoren, deren Stufenzahlen beziehlich α und β ſind, ſo iſt die Stufenzahl von |B gleich $n - \beta$. Iſt nun zuerſt β grösser als α, ſo iſt auch n grösser als $\alpha + n - \beta$; d. h. die Summe der Stufenzahlen von A und |B iſt kleiner als die des Hauptgebietes, alſo (nach 95) die Stufenzahl des Produktes [A|B] gleich jener Summe, d. h. gleich $\alpha + n - \beta$. Iſt aber β eben ſo gross oder kleiner als α, ſo iſt auch n eben ſo gross oder kleiner als $\alpha + n - \beta$, d. h. die Summe der Stufenzahlen von A und |B iſt eben ſo gross oder grösser als n, alſo (nach 95) die Stufenzahl des Produktes [A|B] um n kleiner als jene Summe, d. h. gleich $\alpha - \beta$.

140. Die Anzahl der Einheiten, aus denen ſich ein inneres Produkt numeriſch ableiten lässt, iſt gleich der Anzahl der Kombinationen aus ſo viel Elementen, als die Stufenzahl des Hauptgebietes, und zur ſo vielten Klaſſe, als die poſitive Differenz der Stufenzahlen beider Faktoren beträgt.

Beweis. Nach 139 iſt die Stufenzahl des Produktes entweder gleich $n + \alpha - \beta$, oder gleich $\alpha - \beta$, je nachdem

Hosted by Google

β grösser als α ist, oder nicht. Die Einheiten von gleicher Stufe find im ersten Falle die multiplikativen Kombinationen aus den n ursprünglichen Einheiten zur $(n + \alpha - \beta)$-ten, im zweiten zur $(\alpha - \beta)$-ten Klasse. Aber die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(n + \alpha - \beta)$-ten Klasse ist, nach einem bekannten Satze der Kombinationslehre gleich der Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $(\beta - \alpha)$-ten Klasse. Die Klassenzahl ist dann alfo $\beta - \alpha$, im zweiten Falle $\alpha - \beta$, in beiden Fällen alfo der pofitiven Differenz von α und β gleich.

141. Das innere Produkt zweier Grössen gleicher Stufe ist eine Zahl.

Beweis. Denn die Differenz der Stufenzahlen ist dann null, alfo das Produkt von nullter Stufe, d. h. eine Zahl.

142. Das innere Produkt zweier gleicher Einheiten ist eins, das zweier verschiedener Einheiten gleicher Stufe null, d. h. $[E_r|E_r] = 1$, $[E_r|E_s] = 0$.

Beweis. $[E_r|E_r] = 1$ (nach 91). Ferner ist $|E_s$ (nach 89) dem kombinatorischen Produkte aller in dem Produkte E_s nicht vorkommenden Einheiten erster Stufe gleich; da nun E_r von E_s verschieden, beide aber Produkte von einer gleichen Anzahl urſprünglicher Einheiten find, fo enthält E_r nothwendig folche Einheiten als Faktoren, die in E_s fehlen, alfo in $|E_s$ vorkommen; alfo ist $[E_r|E_s]$ (nach 60) gleich null.

143. Wenn $E_1, \cdots E_m$ Einheiten von beliebiger, aber alle von gleicher Stufe find, fo ist

$$[(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)|(\beta_1 E_1 + \cdots \beta_m E_m)] = \alpha_1\beta_1 + \cdots \alpha_m\beta_m.$$

Beweis. Es fei $\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m$ mit $\sum \alpha_r E_r$, und $\beta_1 E_1 + \cdots \beta_m E_m$ mit $\sum \beta_s E_s$ bezeichnet, fo ist

$$[\sum \alpha_r E_r | \sum \beta_s E_s] = \sum \alpha_r \beta_s [E_r|E_s], \qquad [42].$$

Nun ist (nach 142) das Produkt $[E_r|E_s]$ gleich null, wenn E_r und E_s verschiedene Einheiten find und gleich eins, wenn r gleich s ist, fomit wird der gewonnene Ausdruck

$$= \sum \alpha_r \beta_r = \alpha_1\beta_1 + \cdots \alpha_m\beta_m.$$

144. Die beiden Faktoren eines inneren Produktes find vertauschbar, wenn fie von gleicher Stufe find, d. h.

$[A|B] = [B|A]$, wenn A und B von gleicher Stufe find.

Hosted by Google

Beweis. Wenn $E_1 \cdots E_m$ die Einheiten darstellen, welche mit A und B von gleicher Stufe sind und $A = \sum \overline{\alpha_r E_r}$, $B = \sum \overline{\beta_s E_s}$ ist, so ist (nach 143)

$$[A|B] = \sum \overline{\alpha_r \beta_r} = \sum \overline{\beta_r \alpha_r} = [B|A].$$

145. Erklärung. Wir schreiben der Kürze wegen

$$[A|A] = A^2$$

und nennen es das innere Quadrat von A.

146. Es ist

$$[\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m]^2 = \alpha_1^2 + \cdots \alpha_m^2.$$

Beweis. $(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)^2$

$= [(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)|(\alpha_1 E_1 + \cdots \alpha_m E_m)]$ [145]

$= \alpha_1 \alpha_1 + \cdots \alpha_m \alpha_m$ [144].

147. Das innere Produkt zweier Einheiten E und F ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die eine der andern incident ist, d. h.

$[E|F] = 0$, wenn E und F nicht einander incident sind,

$[E|F] \gtrless 0$, wenn E und F einander incident sind.

Beweis. Für Einheiten gleicher Stufe ist der Satz in 142 bewiesen. Nun seien E und F zwei Einheiten ungleicher Stufe, und zwar E von höherer Stufe als F. Es sei $F = [E_1 G]$, wo E_1 dem E untergeordnet ist, aber das Gebiet G keine Grösse erster Stufe mit E gemein hat. Dann ist F dem E incident oder nicht, je nachdem G von nullter Stufe (eine Zahl) ist oder nicht. Es sei ferner $E = [E_1 E_2]$ und sei $[E_1 G E_2 H]$ das Produkt aller n ursprünglichen Einheiten und gleich der absoluten Einheit. Dann ist (nach 89) $[E_2 H]$ die Ergänzung von $[E_1 G]$, d. h. $|[E_1 G] = [E_2 H]$, also

$$[E|F] = [E_1 E_2 | E_1 G] = [E_1 E_2 \cdot E_2 H].$$

Ist G von nullter Stufe, d. h. E mit F incident, so ist $[E_1 E_2 H]$ von nullter Stufe, also (nach 106) der Ausdruck $[E_1 E_2 \cdot E_2 H] = [E_1 E_2 H] \cdot E_2$, also von null verschieden, da E_2 und $[E_1 E_2 H]$ von null verschieden sind. Ist aber G von höherer als nullter Stufe, so ist die Summe der Stufenzahlen von E_1, E_2 und H geringer als die Summe der Stufenzahlen von E_1, G, E_2, H, d. h. kleiner als n, also (nach 109) $[E_1 E_2 \cdot E_2 H] = 0$, d. h. wenn E und F nicht einander incident sind, so ist $[E|F] = 0$.

Hosted by Google

148. Es ist

$$[EF|E] = F \text{ und } [F|EF] = |E,$$

wenn E und F Einheiten ſind, und [EF] nicht null ist.

Beweis. Es ſei [EFG] das Produkt aller urſprünglichen Einheiten und gleich 1, ſo iſt $|E = [FG]$, ſomit

$$[EF|E] = [EF \cdot FG] = [EFG]F \qquad [106]$$
$$= F.$$

Ferner iſt dann $|[EF] = G$, alſo $[F|EF] = [FG] = |E$.

149. Wenn E, F, G Einheiten ſind, und weder [EF] noch [EG] null iſt, ſo iſt entweder

$$[EF|EG] = [F|G], \text{ oder } [FE|GE] = [F|G],$$

erſteres, wenn F von höherer Stufe iſt als G, letzteres, wenn G von höherer Stufe iſt als F. Sind beide von gleicher Stufe, ſo ſind beide Formeln gültig.

Beweis 1. Wenn F und G nicht einander incident ſind, ſo ſind auch [EF] und [EG] nicht einander incident, alſo ſind dann (nach 147) beide Seiten der zu erweiſenden Gleichung null.

2. Wenn G dem F untergeordnet iſt, ſo ſei $F = [GH]$. Dann iſt

$$[EF|EG] = [EGH|EG] = H \qquad [148]$$
$$= [GH|G] \qquad [148]$$
$$= [F|G].$$

3. Wenn F dem G untergeordnet iſt, ſo ſei $G = [HF]$. Dann iſt

$$[FE|GE] = [FE|HFE] = |H \qquad [148]$$
$$= [F|HF] \qquad [148]$$
$$= [F|G].$$

4. Wenn F und G von gleicher Stufe ſind, alſo, bei Ausſchluss des Falles in Beweis 1, zuſammenfallen, ſo iſt (nach 70) ſowohl G dem F, als F dem G untergeordnet, und es gelten alſo nach Beweis 2 und 3 beide Formeln.

150. Wenn q und r die Stufenzahlen von A und B ſind und $q < r$ iſt, ſo iſt

$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}|[B|A],$$

d. h. [A|B] iſt der Ergänzung von [B|A] entgegengeſetzt, wenn die Stufenzahl von A ungerade und zugleich die von B gerade iſt; in jedem andern Falle iſt [A|B] der Ergänzung von [B|A] gleich.

Hosted by Google

Beweis. Es ist

$$|[B|A] = [|B||A] \quad [97]$$
$$= (-1)^{q(n-q)}[|B \cdot A] \quad [92]$$
$$= (-1)^{q(n-q)}(-1)^{q(n-r)}[A|B] \quad [58]$$
$$= (-1)^{q(2n-q-r)}[A|B].$$

Nun ist in Bezug auf den Modul. 2 die Grösse $q(2n-q-r)$ kongruent $q(r-q)$ oder kongruent $q(r-1)$, da q^2 mit q gleichzeitig gerade oder ungerade ist, fomit

$$|[B|A] = (-1)^{q(r-1)}[A|B], \text{ oder auch}$$
$$[A|B] = (-1)^{q(r-1)}[B|A].$$

Anm. Vermittelst des fo eben erwiefenen Satzes kann man den Fall, wo der zweite Faktor eines inneren Produktes von höherer Stufe ist als der erste, immer auf den andern Fall zurückführen, wo der erste Faktor von höherer Stufe ist als der zweite. Diefen letzteren Fall, welcher fich in den oben entwickelten Formeln als der einfachere herausstellte, werde ich jetzt vorzugsweife berückfichtigen.

§. 2. Begriff des Normalen und seine Correlaten.

151. Erklärung. Numerischer Werth einer Grösse A heisst die pofitive Quadratwurzel aus dem innern Quadrat diefer Grösse. Numerisch gleich heissen zwei Grössen von gleichem numerischen Werth, d. h. zwei Grössen, deren innere Quadrate gleich find.

Anm. Für Zahlen, reelle oder imaginäre, ist die Benennung in derfelben Weife auch fonst in Gebrauch, indem zuerst numerischer Werth einer pofitiven Zahl diefe felbst, der einer negativen $-a$ die entsprechende pofitive Zahl a, d. h. in beiden Fällen die pofitive Quadratwurzel ihres Quadrates ist. Hat man eine imaginäre Zahl $a+b\sqrt{-1}$, fo find ihre Einheiten 1 und $\sqrt{-1}$. Eine der beiden Wurzeln von $\sqrt{-1}$ fei mit i bezeichnet, und 1 und i als Einheiten genommen, alfo $i^2=1$, fo ist der numerische Werth von $a+bi$ nach der Definition gleich $\sqrt{a^2+b^2}$, was auch fonst als numerischer Werth der imaginären Grösse $a+bi$ aufgefasst wird. In der Geometrie ist numerischer Werth einer Linie ihre Länge gemessen durch die Längeneinheit u. f. w.

152. Erklärung. Normal zu einander heissen zwei von null verschiedene Grössen, deren inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heissen normal zu einander, wenn ihre Theile es find. Zwei Gebiete heissen allfeitig zu einander

Hosted by Google

normal, wenn jede Grösse erster Stufe, die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normal ist; und zwei Grössen heissen allfeitig normal zu einander, wenn ihre Gebiete es sind.

Anm. Der Grund der Benennung ruht in der Geometrie. Nimmt man dort die ursprünglichen Einheiten als gleich lange zu einander senkrechte Strecken an, wie dies stets geschehen muss, so zeigt sich leicht, dass das innere Produkt zweier Strecken dann und nur dann null ist, wenn diese Strecken senkrecht zu einander sind. Statt des Ausdrucks „senkrecht" habe ich den „normal" gewählt, als den abstrakteren, der auch eine Anwendung auf nicht räumliche Verhältnisse gestattet.

153. Erklärung. Normalsystem n-ter Stufe heisst ein Verein von n numerisch gleichen (von null verschiedenen) Grössen erster Stufe, von denen jede zu jeder normal ist; und wenn n zugleich die Stufenzahl des Hauptgebietes ist, so heisst es ein vollständiges Normalsystem. Der numerische Werth jener n Grössen heisse zugleich der numerische Werth des Normalsystems. Einfaches Normalsystem heisst jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

Anm. Im Raume bilden z. B. drei gleichlange und gegen einander senkrechte Strecken ein Normalsystem.

154. Erklärung. Circuläre Aenderung nenne ich jede Transformation eines Vereins, durch welche 2 Grössen a und b des Vereins sich beziehlich in $xa + yb$ und in $\mp(xb - ya)$ verwandeln, vorausgesetzt, dass $x^2 + y^2 = 1$ sei. Ich nenne die circuläre Aenderung eine positive oder negative, je nachdem a und b sich in $xa + yb$ und $+(xb - ya)$, oder in $xa + yb$ und $-(xb - ya)$ verwandeln. Wenn hierbei $x = \cos.\alpha$ und $y = \sin.\alpha$ ist, und a und b numerisch gleich und zu einander normal sind, so sage ich, der Verein habe sich von a nach b hin um den Winkel α geändert.

Anm. Stellt man sich unter a und b zwei gleichlange und zu einander senkrechte Strecken vor, so sieht man leicht, dass durch die circuläre Aenderung, durch welche a in $a_1 = a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$, b in $b_1 = b\cos.\alpha - a\sin.\alpha$ übergeht, a_1 und b_1 von derselben Länge sind wie a und b und gegen einander senkrecht bleiben. Es bleiben also a und b bei jener Aenderung conjugirte Halbmesser eines festen Kreises, wodurch der Name circulärer Aenderung gerechtfertigt ist. Auch sieht man, dass dann der Winkel von a bis a_1 gleich α ist.

Hosted by Google

Sind übrigens a und b beliebige Strecken, ſo werden a_1 und b_1 conjugirte Halbmesser einer konstanten Ellipse, in welcher auch a und b conjugirte Halbmesser ſind. Von dieſer Betrachtungsweiſe aus würde ſich der Name der elliptischen Aenderung empfehlen. Da jedoch die Ellipse immer auf den Kreis reducirbar und der Kreis die einfachere Kurve ist, ſo habe ich jenen Namen als den einfacheren vorgezogen. Siehe auch Crelle Journal, Band 49 pag. 134.

155. Durch circuläre Aenderung geht aus jedem Normalsystem ein numerisch gleiches Normalsystem hervor.

Beweis. Es ſeien a, b, c, $\cdots$ die Grössen eines Normalsystems, d. h. $a^2 = b^2 = c^2 = \cdots$ und $0 = [a|b] = [a|c] = [b|c] = \cdots$, und ändere ſich a in $a_1 = xa + yb$ und b in $b_1 = xb - ya$, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist, ſo ist zu zeigen, dass a_1, b_1, c, $\cdots$ ein Normalsystem bilden, in welchem $a_1^2 = a^2$ ist. Es ist, da $[a|b] = 0$ ist,

$$a_1^2 = (xa + yb)^2 = x^2a^2 + y^2b^2$$
$$= (x^2 + y^2)a^2 \text{ (da } b^2 = a^2)$$
$$= a^2 \text{ (da } x^2 + y^2 = 1).$$

Aus gleichem Grunde ist $b_1^2 = a^2$. Ferner ist

$$[a_1|b_1] = [(xa + yb)|(xb - ya)] = xy(b^2 - a^2)$$
$$\text{(da } [a|b] = 0)$$
$$= 0 \text{ (weil } b^2 = a^2).$$

Endlich ist

$$[a_1|c] = [(xa + yb)|c] = x[a|c] + y[b|c] = 0,$$

weil $[a|c]$ und $[b|c] = 0$ ſind. Aus gleichem Grunde ist $[b_1|c] = 0$ u. ſ. w. Folglich ist das System a_1, b_1, c, $\cdots$ ein Normalsystem, deſſen numerischer Werth gleich dem des gegebenen ist.

156. Das kombinatorische Produkt der Grössen eines Normalsystems bleibt bei poſitiver circulärer Aenderung dieſes Systems unverändert, und geht bei negativer in ſeinen entgegengeſetzten Werth über.

Beweis. Es gehe a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über, wo $x^2 + y^2 = 1$ ist; ſo wird

$$[a_1b_1] = [(xa + yb)(xb - ya)]$$
$$= x^2[ab] - y^2[ba] \text{ (da } [aa], [bb] \text{ nach 60 null ſind)}$$
$$= (x^2 + y^2)[ab] \text{ (da } [ba] = -[ab] \text{ ist nach 55)}$$
$$= [ab] \text{ (da } x^2 + y^2 = 1).$$

Hosted by Google

Alſo $[a_1b_1] = [ab]$. Kommen nun zu den gleichen Produkten $[ab]$ und $[a_1b_1]$ noch an den entſprechenden Stellen gleiche kombinatoriſche Faktoren hinzu, ſo bleiben die Produkte gleich. Alſo bewieſen.

157. Die Grössen eines Normalsystems ſtehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jede Grösse erſter Stufe lässt ſich aus einem beliebigen vollſtändigen Normalsystem numeriſch ableiten.

Beweis 1. Es ſeien a, b, c, $\cdots$ Grössen eines Normalsystems. Geſetzt nun, es ſtänden dieſelben in einer Zahlbeziehung zu einander, etwa ſo, dass

$$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$

ſei, ſo multiplicire man beide Seiten innerlich mit a, ſo wird

$$a^2 = \beta[b|a] + \gamma[c|a] + \cdots = 0,$$

da $[b|a]$, $[c|a]$, $\cdots$ null ſind (nach 153). Alſo wäre $a^2 = 0$, im Widerſpruch mit 153. Es lässt ſich alſo keine der Grössen a, b, c, $\cdots$ aus den übrigen numeriſch ableiten, d. h. ſie ſtehen (nach 2) in keiner Zahlbeziehung zu einander.

2. Ein vollſtändiges Normalsystem in einem Hauptgebiete n-ter Stufe beſteht aus n Grössen, und da dieſe nach Bew. 1 in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, ſo kann (nach 24) aus ihnen jede Grösse erſter Stufe, da ſie immer dem Hauptgebiete angehören muss, numeriſch abgeleitet werden.

158. Wenn eine Grösse A zu mehreren Grössen B, C, $\cdots$ von gleicher Stufe normal iſt, ſo iſt ſie auch zu jeder Grösse normal, die aus ihnen numeriſch ableitbar iſt.

Beweis. Wenn A zu B, C, $\cdots$ normal iſt, ſo iſt (nach 152)

$$0 = [A|B] = [A|C] = \cdots.$$

Somit auch

$$[A|(\beta B + \gamma C + \cdots)] = \beta[A|B] + \gamma[A|C] + \cdots = 0, \quad [41]$$

da $[A|B]$, $[A|C]$, $\cdots$ null ſind.

159. Die ſämmtlichen Grössen erſter Stufe, welche zu m Grössen eines vollſtändigen Normalsystems n-ter Stufe normal ſind, gehören dem Gebiete der $n - m$ übrigen Grössen des Systems an.

Hosted by Google

Beweis. Es sei das System $a_1, \cdots\cdots a_n$ ein vollständiges Normalsystem, und seien m seiner Grössen, etwa $a_1 \cdots a_m$ zu irgend einer Grösse erster Stufe a normal, so ist zu zeigen, dass a dem Gebiete $a_{m+1} \cdots a_n$ angehört. Nach 157 lässt sich a aus dem vollständigen Normalsystem $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten. Es sei der Ausdruck dieser Ableitung

$$a = \alpha_1 a_1 + \cdots\cdots \alpha_n a_n.$$

Da nun a zu $a_1, a_2, \cdots a_m$ normal ist, so erhält man, indem man zuerst mit a_1 innerlich multiplicirt,

$$0 = [a_1|a] = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 [a_1|a_2] + \cdots \alpha_n [a_1|a_n]$$
$$= \alpha_1 a_1^2,$$

da $[a_1|a_2]$ bis $[a_1|a_n]$ als innere Produkte der Grössen eines Normalsystems null sind. Da nun a_1^2 (nach 153) nicht null ist, so folgt aus der Gleichung $\alpha_1 a_1^2 = 0$, dass $\alpha_1 = 0$ ist. Auf gleiche Weise folgt, indem man nach und nach mit $a_2, \cdots\cdots a_m$ multiplicirt, dass auch $\alpha_2, \cdots\cdots \alpha_m$ null sind. Folglich ist

$$a = \alpha_{m+1} a_{m+1} + \cdots\cdots \alpha_n a_n,$$

d. h. a gehört dem Gebiete $a_{m+1} \cdots\cdots a_n$ an.

160. Jedes Normalsystem lässt sich durch fortgesetzte circuläre Aenderung so umwandeln, dass eine seiner Grössen mit einer beliebig gegebenen Grösse erster Stufe, deren numerischer Werth dem des Normalsystems gleich ist und welche dem Gebiete desselben angehört, identisch wird.

Beweis. Es seien $a_1, \cdots\cdots a_n$ die Grössen des gegebenen Normalsystems, und k die gegebene Grösse welche numerisch gleich a_1 ist, und sei

$$k = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n.$$

Nun wandle man a_1 und a_2 circulär so um, dass dabei a_1 in

$$c_2 = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

übergeht, was (nach 154) möglich ist. Dann ist $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2$, also

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots \alpha_n a_n.$$

Darauf wandle man c_2 und a_3 circulär so um, dass dabei c_2 in

$$c_3 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\, c_2 + \alpha_3 a_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$$

Hosted by Google

übergeht. Dann ist

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\, c_3 + \alpha_4 a_4 + \cdots \alpha_n a_n.$$

In dieſer Weiſe fahre man fort, bis

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots \alpha_{n-1}^2}\, c_{n-1} + \alpha_n a_n$$

wird, und wandle schliesslich c_{n-1} und a_n circulär ſo um, dass dabei c_{n-1} in

$$c_n = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots \alpha_{n-1}^2}\, c_{n-1} + \alpha_n a_n}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2}}$$

übergeht, ſo ist dann

$$* \quad k = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2}\, c_n.$$

Nun ist nach der Hypotheſis

$$a_1^2 = k^2 = (\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n)^2 = \alpha_1^2 a_1^2 + \cdots \alpha_n^2 a_n^2,$$

weil $[a_1|a_2]$ etc. null ſind. Und da auch $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2$ ist, ſo wird

$$a_1^2 = (\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2) a_1^2,$$

d. h. $\alpha_1^2 + \cdots \alpha_n^2 = 1$. Dies alſo in die obige Gleichung (*) eingeführt, giebt, wenn man den poſitiven Wurzelwerth wählt,

$$k = c_n,$$

d. h. in dem zuletzt hervorgehenden Normalsystem ist eine Grösse c_n mit der gegebenen k identisch, wie verlangt.

161. Wenn zwei Normalsysteme gleichen numerischen Werth haben, und ihre Gebiete einander incident ſind, ſo lässt ſich durch fortgeſetzte circuläre Aenderung, wenn beide von gleicher Stufe ſind, jedes aus dem andern ableiten, wenn ſie hingegen von ungleicher Stufe ſind, das höherer Stufe ſo umwandeln, dass es die Grössen des andern enthält.

Beweis. Es ſeien a, b, c, $\cdots$ und a_1, b_1, c_1, $\cdots$ zwei Normalsysteme von gleichem numerischen Werthe, und ſeien die Gebiete beider einander incident, und zwar das des letzteren entweder von gleicher oder höherer Stufe als das des ersteren, ſo müssen (nach 15) alle Grössen a, b, c, $\cdots$ dem Gebiete a_1, b_1, c_1, $\cdots$ angehören. Somit kann man (nach 160) das Normalsystem a_1, b_1, c_1, $\cdots$ circulär ſo umwandeln, dass eine ſeiner Grössen $= a$ wird. Das ſo hervorgehende Normalsystem bestehe aus den Grössen a, b_2, c_2, $\cdots$. Da nun b, c, $\cdots$, als Grössen des Normalsystems a, b, c, $\cdots$, zu a, alſo zu einer

Hosted by Google

Grösse des Normalsystems a, b_2, c_2, $\cdots$ normal sind, so müssen sie (nach 159) dem Gebiete der übrigen Grössen dieses Systems, also dem Gebiete b_2, c_2, $\cdots$ angehören. Demnach kann man wieder das System b_2, c_2, $\cdots$ circulär so umwandeln, dass eine seiner Grössen $= b$ wird. Das so hervorgehende Normalsystem bestehe aus den Grössen b, c_3, d_3, $\cdots$, so müssen wieder aus demselben Grunde, wie vorher, c, d, $\cdots$ dem Gebiete c_3, d_3, $\cdots$ angehören. Das Normalsystem a_1, b_1, c_1, d_1, $\cdots$ ist dann durch circuläre Aenderungen übergegangen in a, b, c_3, d_3, $\cdots$. So kann man, wenn das System a_1, b_1, $\cdots$ von höherer Stufe ist als a, b, $\cdots$, fortfahren, bis das zuletzt hervorgehende System alle Grössen des gegebenen Systemes a, b, c, $\cdots$ enthält, oder wenn beide Systeme von gleicher Stufe sind, so lange bis es alle Grössen des Systems a, b, c, $\cdots$, mit Ausnahme des letzten, enthält. Diese letzte sei q, die vorletzte p, und sei das so hervorgehende Normalsystem a, b, $\cdots$ p, q_n, so muss nach der angewandten Schlussfolge q dem Gebiete q_n angehören, d. h. beide müssen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist nun $q_n = xq$, wo x eine Zahl ist, so ist, da beide einander numerisch gleich sind, $q_n^2 = q^2$, also $x^2 = 1$, somit $q_n = \mp q$. Ist $q_n = -q$, so hat man nur statt der letzten circulären Aenderung die entgegengesetzte zu nehmen, so fällt dann auch die letzte Grösse des so hervorgehenden Normalsystems mit q zusammen, also ist dann das eine der gegebenen Normalsysteme aus dem andern circulär abgeleitet, wie verlangt.

162. Das System der ursprünglichen Einheiten ist ein (vollständiges) Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

Beweis. Es seien $e_1 \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten, so ist (nach 142)

$$1 = e_1^2 = \cdots = e_n^2$$
$$0 = [e_1|e_2] = \cdots.$$

163. In jedem Gebiete m-ter Stufe lässt sich ein Normalsystem gleicher Stufe von beliebigem numerischen Werth annehmen, und zwar so, dass dies System Theil eines vollständigen Normalsystems sei.

Hosted by Google

Beweis. Es sei a_1 eine Grösse erster Stufe in dem gegebenen Gebiete m-ter Stufe A, ihr numerischer Werth sei 1. Da nun (nach 162) das System der ursprünglichen Einheiten $e_1 \cdots e_n$ ein vollständiges Normalsystem ist, dessen numerischer Werth 1 ist, so lässt sich (nach 160) dies Normalsystem circulär so umwandeln, dass a_1 eine der Grössen des resultirenden Normalsystems wird. Dann ist a_1 auf den $n-1$ übrigen Grössen dieses Normalsystems, also auch (nach 158) zu jeder Grösse ihres Gebietes A_1 normal. Dies Gebiet ist von $(n-1)$-ter Stufe und hat also mit dem Gebiet m-ter Stufe A (nach 26) ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n-1+m-n=m-1$ ist. Es sei in diesem gemeinschaftlichen Gebiete a_2 eine Grösse erster Stufe, deren numerischer Werth 1 ist. Da a_2 also auch dem Gebiete A_1 angehört, so ist sie nach dem obigen zu a_1 normal, aber auch mit a_1 numerisch gleich, nämlich $=1$, also bilden a_1 und a_2 ein Normalsystem mit dem numerischen Werth 1. Also lässt sich (nach 159) das vollständige Normalsystem $e_1 \cdots e_n$ in ein anderes Normalsystem umwandeln, welches a_1 und a_2 enthält. Das Gebiet A_2 der übrigen $n-2$ Grössen dieses Normalsystems ist von $(n-2)$-ter Stufe, und alle Grössen erster Stufe, die diesem Gebiete angehören, sind normal zu a_1 und a_2. Nun haben A und A_2 ein Gebiet $m-2$-ter Stufe gemein; in ihm sei a_3 eine beliebige Grösse erster Stufe vom numerischen Werthe 1, so hat man schon ein Normalsystem von drei Grössen a_1, a_2, a_3 in A, und so kann man fortfahren. Hat man so in A ein Normalsystem von $(m-1)$ Grössen $a_1 \cdots a_{m-1}$ erhalten, so enthält das vollständige Normalsystem, zu dem es gehört, ausserdem noch $n-m+1$ Grössen; ihr Gebiet, was A_{m-1} heisse, ist von $(n-m+1)$-ter Stufe, hat also mit dem Gebiete m-ter Stufe A noch ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl $n-m+1+m-n=1$ ist. Es sei a_m eine Grösse dieses Gebietes, deren numerischer Werth 1 ist, so ist a_m, da es in A_{m-1} liegt, zu $a_1 \cdots a_{m-1}$ normal und $a_1 \cdots a_m$ bilden also ein Normalsystem m-ter Stufe in dem Gebiete m-ter Stufe A. Diesem Normalsystem kann man dadurch, dass man alle seine Grössen mit einer und derselben beliebigen Zahl multiplicirt, jeden beliebigen numerischen Werth geben.

Hosted by Google

§. 3. Gesetze des inneren Produktes, an den Begriff des Normalen geknüpft.

164. Erklärung. Normale Zurückleitung A′ einer Grösse A auf ein Gebiet B nenne ich die Zurückleitung der Grösse A auf das Gebiet B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes (vergl. 127 und 33).

Anm. Ist z. B. a, b, c ein vollständiges Normalsystem und p = qa + rb + sc eine beliebige Grösse des Hauptgebietes, so ist die normale Zurückleitung der Grösse p auf das Gebiet bc gleich rb + sc. Für die Geometrie ist sie identisch mit der senkrechten Projektion.

165. Die normale Zurückleitung A′ einer Grösse A auf ein Gebiet B ist

$$A' = \frac{[B\cdot(A|B)]}{B^2}, \text{ oder } = [B\cdot(A|B)],$$

letzteres, wenn der numerische Werth von B gleich 1 ist.

Beweis. Nach 164 ist A′ die Zurückleitung von A auf B, unter Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes, d. h. des Gebietes |B. Wird |B mit C bezeichnet, so ist (nach 129)

$$A' = \frac{[B\cdot AC]}{[BC]}, \text{ also } = \frac{[B\cdot(A|B)]}{[B|B]} = \frac{[B\cdot(A|B)]}{B^2}.$$

166. Zusatz. Sind ins Besondere A und B von gleicher Stufe, so ist die Zurückleitung

$$A' = \frac{[A|B]B}{B^2}, \text{ oder } = [A|B]B, \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Dann ist nämlich (nach 117) [A|B] eine Zahl und kann also statt [B·(A|B)] geschrieben werden [A|B]B.

167. Die Ergänzung des kombinatorischen Produktes A von m Grössen eines vollständigen Normalsystems, welches den numerischen Werth Eins hat, ist dem kombinatorischen Produkte der (n − m) übrigen Grössen des Systems gleich oder entgegengesetzt, je nachdem [AB] = + 1 oder = − 1 ist, d. h.

* $|A = [AB]B,$

wenn die n einfachen Faktoren von [AB] die n Grössen des Normalsystems sind.

Beweis 1. Für das System der ursprünglichen Einheiten ist diese Beziehung in 89 als Definition festgesetzt.

Hosted by Google

2. Ich zeige nun, dass, wenn diese (durch Gleichung * dargestellte) Beziehung für irgend ein Normalsystem a, b, c, $\cdots$ gilt, sie auch für jedes aus ihm durch circuläre Aenderung hervorgehende Normalsystem gelte. Es gehe durch circuläre Aenderung a in $a_1 = xa + yb$, b in $b_1 = xb - ya$ über. Durch diese verwandle sich A in A_1, B in B_1; so ist zu zeigen, dass auch $|A_1 = [A_1B_1]B_1$ sei. Da nun A und B zusammen alle Grössen a, b, $\cdots$ des Normalsystems und zwar sowohl A als B jede dieser Grössen nur einmal enthalten sollen, so kommen a und b entweder beide in A, oder beide in B, oder eine in A und die andere in B vor. Wir haben schon in 156 bewiesen, dass das Produkt $[a_1b_1]$ bei dieser Aenderung gleich [ab] bleibt; somit bleibt in den beiden ersten Fällen sowohl A als B unverändert, also bleibt dann auch die obige Gleichung, die nur A und B enthält, bestehen. Im dritten Falle sei a in A enthalten, b in B, und sei A′ die Grösse, die aus A hervorgeht, wenn man darin b statt a setzt, und B′ die Grösse, welche aus B hervorgeht, wenn man darin a statt b setzt. Dann unterscheiden sich die kombinatorischen Produkte [A′B′] und [AB] nur durch gegenseitige Vertauschung der beiden einfachen Faktoren a und b, folglich ist dann (nach 55) $[A'B'] = -[AB]$. Ferner ist dann

$$A_1 = xA + yA',\ B_1 = xB - yB',$$

folglich

$$|A_1 = x|A + y|A' \qquad [101].$$

Da nun A und A′ nur Grössen des Normalsystems a, b, $\cdots$ als einfache Faktoren enthalten, und B und B′ die jedesmal übrigen, so gilt (nach der Annahme) für sie die obige Gleichung *, d. h. es ist

$$|A = [AB]B,\ |A' = [A'B']B' = -[AB]B',$$

letzteres, weil $[A'B'] = -[AB]$ war; somit ist

$$|A_1 = x[AB]B - y[AB]B' = [AB](xB - yB') = [AB]B_1.$$

Endlich ist (nach 156) $[A_1B_1] = [AB]$, indem die einfachen Faktoren von $[A_1B_1]$ aus denen von [AB] durch positive circuläre Aenderung hervorgehen. Also ist

$$|A_1 = [A_1B_1]B_1,$$

d. h. wenn die Gleichung * für irgend ein Normalsystem gilt, so gilt sie auch für jedes daraus durch positive circuläre

Hosted by Google

Aenderung hervorgehende, ebenfo aber auch für jedes daraus durch negative Aenderung hervorgehende. Denn die pofitive circuläre Aenderung, wie wir fie oben annahmen, wird (nach 154) in eine negative verwandelt, wenn man das Vorzeichen von b_1 ändert, dann ändert fich auch das Vorzeichen von B_1, wobei die gefundene Gleichung bestehen bleibt. Alfo bleibt die Gleichung * überhaupt bei jeder circulären Aenderung des Normalsystems bestehen, wenn fie für irgend ein Normalsystem gilt. Nach Beweis 1 gilt fie aber für das Normalsystem der urfprünglichen Einheiten, alfo nun auch für jedes daraus circulär abgeleitete. Nun lässt fich aber (nach 161) jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist, aus jenem ableiten, alfo gilt die Gleichung für jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth 1 ist.

168. Alle bisher aufgestellten Sätze gelten noch, wenn man statt des Systems der urfprünglichen Einheiten ein beliebiges vollständiges Normalsystem fetzt, dessen numerischer Werth Eins ist.

Beweis. Alle in den ersten drei Kapiteln entwickelten Rechnungsgefetze gelten (nach 110) auch dann noch, wenn man statt der n urfprünglichen Einheiten beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe fetzt, alfo auch, wenn man die Grössen eines vollständigen Normalsystems einfetzt. Ferner gilt (nach 167) der Begriff der Ergänzung wie er in 91 in Bezug auf das System der urfprünglichen Einheiten aufgestellt ist, auch in Bezug auf jedes Normalsystem, dessen numerischer Werth Eins ist. Aber auf diefem Begriff der Ergänzung und den in den ersten drei Kapiteln entwickelten Rechnungsgefetzen beruhen alle Sätze des inneren Produktes, wie fie bisher entwickelt wurden. Alfo gelten diefe Sätze noch, wenn man statt des Systems der urfprünglichen Einheiten ein Normalsystem fetzt, dessen numerischer Werth Eins ist.

Anm. Vermöge des fo eben bewiefenen Satzes ist alfo der Begriff des inneren Produktes in fofern nicht mehr an das System der urfprünglichen Einheiten geknüpft, als man statt diefes Systems ein beliebiges Normalsystem fetzen kann, dessen numerischer Werth Eins ist, ohne dass irgend einer der bisher aufgestellten Sätze eine Aenderung

Hosted by Google

erleidet. Es erscheint alfo der Begriff des inneren Produktes nur noch an den Begriff des Normalsystems geknüpft, und dies tritt daher in den folgenden Entwickelungen statt des Systems der ursprünglichen Einheiten hervor.

169. Das innere Produkt zweier Grössen ändert feinen Werth nicht, wenn man statt des einen Faktors feine normale Zurückleitung auf das Gebiet des andern fetzt, d. h.

$$[A|B] = [A|B'] \text{ und}$$
$$[B|A] = [B'|A],$$

wenn B' die normale Zurückleitung von B auf das Gebiet A ist (alfo A von gleicher oder höherer Stufe als B ist).

Es fei A von m-ter Stufe, B von p-ter, das Hauptgebiet von n-ter, fo kann man (nach 163) ein vollständiges Normalsystem $a_1 \cdots a_n$ fo annehmen, dass m feiner Grössen, etwa $a_1 \cdots a_m$, in A liegen, und fein numerischer Werth 1 fei. Die p Faktoren von B find dann (nach 157) aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableitbar, alfo B aus den multiplikativen Kombinationen von $a_1 \cdots a_n$ zur p-ten Klasse numerisch ableitbar. Diefe Kombinationen feien $B_1, B_2, \cdots B_q, B_{q+1}, \cdots B_r$, wo $B_1 \cdots B_q$ die Kombinationen aus $a_1 \cdots a_m$ find; und fei

$$B = \beta_1 B_1 + \cdots + \beta_q B_q + \beta_{q+1} B_{q+1} \cdots \beta_r B_r,$$

fo find (nach 147 u. 168) $[A|B_{q+1}], \cdots [A|B_r]$ alle gleich null, da jede der Grössen B_{q+1} bis B_r folche Faktoren enthält, die in A nicht vorkommen, und diefe Grössen alfo der Grösse A nicht incident find, alfo wird

$$[A|B] = \beta_1 [A|B_1] + \cdots \beta_q [A|B_q]$$
$$= [A|(\beta_1 B_1 + \cdots \beta_q B_q)].$$

Aber (nach 127) ist $\beta_1 B_1 + \cdots \beta_q B_q$ die Zurückleitung von B auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, mit Ausschluss des Gebietes $[a_{m+1} \cdots a_n]$, letzteres Gebiet ist aber (nach 167) Ergänzung des ersteren; alfo ist $\beta_1 B_1 + \cdots \beta_q B_q$ die normale Zurückleitung von B auf das Gebiet $[a_1 \cdots a_m]$, d. h. auf das Gebiet von A, alfo gleich B' und fomit

$$[A|B] = [A|B'].$$

Aus gleichem Grunde ist $[B|A] = [B'|A]$.

170. Wenn man in einem inneren Produkte zweier gleichstufiger Grössen die eine auf das Gebiet der andern normal zurückleitet, und diefe Zurückleitung fo wie die Grösse,

Hosted by Google

auf deren Gebiet zurückgeleitet ist, durch ein und dasselbe Maass misst, dessen numerischer Werth Eins ist, so ist das Produkt der beiden Messungs-Quotienten gleich dem gegebenen inneren Produkt, d. h.

$$[A|B] = \alpha\beta', \text{ wenn } A = \alpha E,$$

und die normale Zurückleitung B′ von A auf B gleich $\beta' E$, und der numerische Werth von E gleich Eins ist.

Beweis. Nach 145 ist

$$[A|B] = [A|B'].$$

Es sei E ein Gebietstheil von A, dessen numerischer Werth Eins ist, und sei $A = \alpha E$, $B' = \beta' E$, so ist $[A|B'] = \alpha\beta'[E|E] = \alpha\beta' E^2 = \alpha\beta'$, da $E^2 = 1$ ist.

171. Wenn die Gebiete von A und B zu einander allseitig normal sind, und C eine beliebige Grösse von niederer oder gleicher Stufe wie B ist, so ist

$$[AB|AC] = A^2[B|C] \text{ und}$$
$$[CA|BA] = A^2[C|B].$$

Beweis. Es sei ein Normalsystem angenommen, dessen Grössen sich auf die Gebiete A und B vertheilen, und dessen numerischer Werth 1 ist, und sei dasselbe zu einem vollständigen Normalsysteme ergänzt; so ist C aus den multiplikativen Kombinationen der Grössen jenes Normalsystems (69, 77b) numerisch ableitbar. Es sei $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots$, ferner sei $A = \alpha A_1$, $B = \beta B_1$, wo A_1, B_1 kombinatorische Produkte der Grössen des Normalsystems sind, so ist

$$\begin{aligned}[AB|AC] &= \alpha^2\beta[A_1B_1|A_1(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)] \\ &= \alpha^2\beta\gamma_1[A_1B_1|A_1C_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[A_1B_1|A_1C_2] + \cdots.\end{aligned}$$

Aber $[A_1B_1|A_1C_r]$ ist, wenn A_1, B_1, C_r Einheiten höherer Stufe, d. h. kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, (nach 149) gleich $[B_1|C_r]$. Dasselbe findet aber (nach 168) noch statt, wenn jene Grössen kombinatorische Produkte der Grössen eines einfachen Normalsystems sind, also in unserm Falle. Somit wird

$$\begin{aligned}[AB|AC] &= \alpha^2\beta\gamma_1[B_1|C_1] + \alpha^2\beta\gamma_2[B_1|C_2] + \cdots \\ &= \alpha^2\beta[B_1|(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \cdots)] \\ &= \alpha^2\beta[B_1|C].\end{aligned}$$

Da nun A_1^2 gleich 1 ist, weil A_1 ein kombinatorisches

Hosted by Google

Produkt von Grössen eines einfachen Normalsystems ist, so ist der gefundene Ausdruck

$$= \alpha^2\beta A_1^2[B_1|C] = (\alpha A_1)^2[\beta B_1|C]$$
$$= A^2[B|C].$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich die zweite Formel des Satzes.

172. Wenn A mit $\boldsymbol{A}$ von gleicher Stufe, B aber von gleicher oder höherer Stufe wie $\boldsymbol{B}$ ist, und [AB] nicht verschwindet, so ist

(a) $[AB|\boldsymbol{AB}] = [A|\boldsymbol{A}][B|\boldsymbol{B}] + [A_1|\boldsymbol{A}][B_1|\boldsymbol{B}] + \cdots$ und

(b) $[\boldsymbol{BA}|BA] = [\boldsymbol{B}|B][\boldsymbol{A}|A] + [\boldsymbol{B}|B_1][\boldsymbol{A}|A_1] + \cdots$,

wo A, $A_1, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren (erster Stufe) von [AB], und B, $B_1, \cdots$ die zu A, $A_1, \cdots$ ergänzenden Kombinationen sind (so dass also $[AB] = [A_1B_1] =$ u. s. w.).

Anm. Wenn nämlich A eine der multiplikativen Kombinationen aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ ist, so nenne ich diejenige multiplikative Kombination B, welche die sämmtlichen in A nicht enthaltenen Elemente enthält, und mit einem solchen Vorzeichen ($\pm$) versehen ist, dass $[AB] = [a_1a_2\cdots a_n]$ ist, die zu A ergänzende Kombination.

Beweis 1. Es seien die einfachen Faktoren von [AB] alle zu einander normal. Da $\boldsymbol{A}$ von gleicher Stufe mit A ist, so ist es aus den multiplikativen Kombinationen A, $A_1, \cdots$ numerisch ableitbar. Es sei

$$\boldsymbol{A} = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots,$$

so ist

$$[AB|\boldsymbol{AB}] = [AB|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)\boldsymbol{B}]$$
$$= \alpha[AB|A\boldsymbol{B}] + \alpha_1[AB|A_1\boldsymbol{B}] + \cdots.$$

Da nun (nach der Annahme) $[AB] = [A_1B_1] = \cdots$ ist, so erhalten wir den gefundenen Ausdruck

$$= \alpha[AB|A\boldsymbol{B}] + \alpha_1[A_1B_1|A_1\boldsymbol{B}] + \cdots.$$

Da nun die einfachen Faktoren von [AB] alle zu einander normal sind, und identisch sind mit denen von $\mp[A_1B_1]$ u. s. w. (nach der Annahme), so ist A zu B allseitig normal, und ebenso A_1 zu B_1 u. s. w. Folglich ist (nach 171) der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= \alpha A^2[B|\boldsymbol{B}] + \alpha_1 A_1^2[B_1|\boldsymbol{B}] + \cdots.$$

Hosted by Google

Nun ist aber $[A_r|A] = [A_r|(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \cdots)] = \alpha_r A_r^2$, weil A_r mit den zu ihm normalen Grössen A, $A_1, \cdots$, ausgenommen A_r, innerlich multiplicirt, null giebt (nach 147, 168). Alfo kann man in dem vorher gefundenen Ausdruck $A_r|A$ statt $\alpha_r A_r^2$ fetzen und jener Ausdruck wird

$$= [A|A][B|B] + [A_1|A][B_1|B] + \cdots,$$

d. h. die Formel (a) gilt für unfere Vorausfetzung.

2. Nun zeige ich, dass, wenn die Formel (a) für irgend eine Reihe von einfachen Faktoren gilt, aus denen [AB] befteht, fie auch noch bestehen bleiben, wenn man diefe Faktorenreihe lineal ändert (fiehe 71), d. h. statt irgend eines Faktors a fetzt $a + \beta b$, wo b einer der andern Faktoren und β eine Zahl ist. Hierbei behält (nach 72) das Produkt [AB], alfo auch die linke Seite unferer Formel, denfelben Werth. Betrachtet man nun irgend ein Glied der rechten Seite, z. B. $[A_r|A][B_r B]$, fo können a und b entweder beide in A_r vorkommen, oder beide in B_r, oder eins in A_r, das andere in B_r. In den beiden ersten Fällen bleibt fowohl der Werth von A_r als der von B_r unverändert, alfo auch das betrachtete Glied. Im letzten Falle kommt noch ein anderes Glied $[A_s|A][B_s|B]$ vor von der Art, dass A_r und A_s, im Uebrigen diefelben Faktoren enthalten, nur dass, wo das eine diefer Produkte den Faktor a enthält, das andere den Faktor b enthalte. Dann stehen B_r und B_s, da fie die jedesmal dem A_r und A_s fehlenden Faktoren enthalten, in derfelben gegenfeitigen Beziehung zu einander. Es kommt alfo a in einer der Grössen A_r und A_s vor; es mag a in A_r vorkommen. Nun fei A' die Grösse, welche aus A_r hervorgeht, indem man darin b statt a fetzt, und B' die Grösse, welche aus B_r hervorgeht, indem man darin a statt b fetzt. Dann enthält alfo A' diefelben Faktoren wie A_s und B' wie B_s; es find alfo dann A' und B' (nach 57) den Grössen A_s und B_s entweder gleich oder entgegengefetzt. Da $[A'B']$ aus $[A_r B_r]$ durch Vertauschung der beiden einfachen Faktoren a und b hervorgeht, fo ist (nach 55) $[A'B'] = -[A_r B_r]$, und dies $= -[A_s B_s]$ (nach der Annahme). Wenn alfo $A' = \mp A_s$ ist, fo ist $B' = \pm B_s$. Wenn man nun die lineale Substitution von $a + \beta b$ für a einführt, fo verwandelt fich

Hosted by Google

$[A_r|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] + [A_s|\mathcal{A}][B_s|\mathcal{B}] = [A_r|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - [A'|\mathcal{A}][B'|\mathcal{B}]$ in
$[(A_r + \beta A')|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - [A'|\mathcal{A}][(B' + \beta B_r)|\mathcal{B}]$,

weil nämlich B_r und A' kein a enthalten und alfo unverändert bleiben, während A_r in $A_r + \beta A'$ und B' in $B' + \beta B_r$ fich verwandelt. Alfo verwandelt fich jene Summe in

$[A_r|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - [A'|\mathcal{A}][B'|\mathcal{B}] + \beta[A'|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}] - \beta[A'|\mathcal{A}][B_r|\mathcal{B}]$,

d. h., da die letzten Glieder fich aufheben, der Werth jener Summe bleibt ungeändert. Es bleibt fomit die ganze rechte Seite unferer Formel bei jener linealen Substitution ungeändert, indem die Glieder entweder einzeln ungeändert bleiben oder, wenn fie geändert werden, fich zu Gliederpaaren gruppiren, deren Summe ungeändert bleibt. Da fomit beide Seiten der Formel bei linealer Substitution ungeändert bleiben, fo bleibt die Formel, wenn fie für irgend eine Faktorreihe gilt, auch bei deren linealer Aenderung bestehen.

3. Es fei endlich die Faktorreihe a, b, $\cdots$ eine ganz beliebige, doch ihr kombinatorisches Produkt [AB] nicht null, fo lässt fich (nach 163) ftets eine Reihe zu einander normaler Grössen erster Stufe a_1, a_2, $\cdots$ angeben, von der Art, dass $[ab\cdots] = [a_1 a_2 \cdots]$. Dann lässt fich aber (nach 76) die Grössenreihe a, b, $\cdots$ aus a_1, a_2, $\cdots$ durch lineale Aenderung ableiten. Nun gilt nach Beweis 1 unfere Formel für die Reihe der zu einander normalen Faktoren a_1, a_2, $\cdots$, alfo nach Beweis 2 auch für die durch fortgefetzte lineale Aenderung daraus hervorgehende Faktorreihe, alfo auch für a, b, $\cdots$ d. h. allgemein.

173. Wenn A und $\mathcal{A}$ von gleicher Stufe find, ebenfo B und $\mathcal{B}$ u. f. w., endlich L und $\mathcal{A}$, M aber von gleicher oder höherer Stufe ist wie $\mathcal{M}$ und [AB$\cdots$LM] ein nicht verschwindendes kombinatorisches Produkt von Grössen erster Stufe ist, fo ist

$$[AB\cdots LM|\mathcal{AB}\cdots\mathcal{AM}] = \sum [A_a|\mathcal{A}][B_b|\mathcal{B}]\cdots[L_l|\mathcal{A}][M_m|\mathcal{M}],$$

wo $[A_a B_b \cdots L_l M_m]$ diefelben einfachen Faktoren enthält wie [AB$\cdots$LM], nur in anderer Folge, doch in der Art, dass beide Produkte einander gleich find, wo ferner A_a eben fo viel Faktoren enthält wie A, B_b wie B u. f. w., und wo endlich

Hosted by Google

die Summe ſich auf alle möglichen verschiedenen Ausdrücke dieſer Art bezieht, ſo dass nämlich $A_aB_b\cdots L_lM_m$ und $A_{a'}B_{b'}\cdots L_{l'}M_{m'}$ als verschiedene Ausdrücke gelten, wenn wenigstens eins der Grössenpaare A_a und $A_{a'}$, B_b und $B_{b'}$, $\cdots$ aus zwei Grössen besteht, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen.

Beweis 1. Für zwei Faktoren ist der Satz in 148 bewieſen, wir können nämlich die Formel 172 auch in folgender Weiſe schreiben

$$* \quad [AB|\mathfrak{AB}] = \sum \overline{[A_a|\mathfrak{A}][B_b|\mathfrak{B}]},$$

wo A_aB_b die im Satze dargestellte Bedeutung haben, welche mit der Bedeutung der Grössenpaare AB, $A_1B_1, \cdots$ in 172 zuſammenfällt.

2. Durch wiederholte Anwendung des Satzes für zwei Faktoren gelangt man zu dem Satze für beliebig viele Faktoren. In der That kann man das Produkt $[AB\cdots LM]$ zunächst als aus den zwei Faktoren A und $[BC\cdots LM]$ bestehend anſehen. Dann wird

$$[AB\cdots LM|\mathfrak{AB}\cdots\mathfrak{M}] = [A(BC\cdots LM)|\mathfrak{A}(\mathfrak{B\Gamma}\cdots\mathfrak{M})]$$
$$= \sum \overline{[A_a|\mathfrak{A}][(BC\cdots LM)_b|\mathfrak{B\Gamma}\cdots\mathfrak{M}]},$$

wo der Index b unter der Klammer andeuten ſoll, dass der in der Klammer stehende Ausdruck als Eine Grösse, gemäss der Formel *, behandelt werden ſoll. Der gefundene Ausdruck ist aus demſelben Grunde wieder

$$= \sum \overline{[A_a|\mathfrak{A}][B_b|\mathfrak{B}][(CD\cdots LM)_c|\mathfrak{\Gamma\Delta}\cdots\mathfrak{M}]},$$

und ſetzt man dies fort, ſo erhält man ihn zuletzt

$$= \sum \overline{[A_a|\mathfrak{A}][B_b|\mathfrak{B}]\cdots[L_l|\mathfrak{L}][M_m|\mathfrak{M}]}.$$

Anm. Die geſammte Schaar der Grössenreihe $A_a, B_b\cdots M_m$ kann man auf folgende Weiſe kombinatorisch entwickeln: Man betrachtet die einfachen Faktoren des Produktes $[AB\cdots]$ als kombinatorische Elemente, entwickelt aus ihnen die multiplikativen Kombinationen zur ſo vielten Klasse, als die Stufe von A beträgt, ſo erhält man die Grössen A_a; zu jeder derſelben entwickelt man die multiplikativen Kombinationen aus den in ihr nicht vorkommenden Elementen zur ſo vielten Klasse, als die Stufe von B beträgt, ſo erhält man zu jedem A_a die ſämmtlichen zugehörigen Grössen B_b und ſo fort; endlich die letzten dieſer multiplikativen Kombinationen, die zu der Grösse M gehören, ſetzt man gleich $\mp M_m$, wobei man das Vorzeichen ſo bestimmt, dass $[A_aB_b\cdots M_m] = [AB\cdots M]$ wird. Zum Beispiel, wenn $A = ab$, $B = cd$,

Hosted by Google

$C = M = e$ ist, fo erhält man folgende Schaar von je drei Grössen, von denen jedesmal die erste eine Grösse A_a, die zweite eine zugehörige Grösse B_b, die dritte die zu beiden gehörige Grösse C_c darstellt:

ab, cd, e	ad, bc, e	bc, ad, e	be, ac, d	ce, ab, — d
ab, ce, — d	ad, be, — c	bc, ae, — d	be, ad, — c	ce, ad, b
ab, de, c	ad, ce, b	bc, de, a	be, cd, a	ce, bd, — a
ac, bd, — e	ae, bc, — d	bd, ac, — e	cd, ab, e	de, ab, c
ac, be, d	ae, bd, c	bd, ae, c	cd, ae, — b	de, ac, — b
ac, de, — b	ae, cd, — b	bd, ce, — a	cd, be, a	de, bc, a.

174. Zufatz. Wenn in dem inneren Produkte $[AB\cdots|\boldsymbol{AB}\cdots]$ die Grössen A und $\boldsymbol{A}$ von gleicher Stufe find, ebenfo B und $\boldsymbol{B}$ und fo fort, fo ist

$$[AB\cdots|\boldsymbol{AB}\cdots] = \frac{[A'B'\cdots]}{[AB\cdots]},$$

wo $A' = \sum[A_r|\boldsymbol{A}]A_r$, $B' = \sum[B_r|\boldsymbol{B}]B_r$, u. f. w., und wo die A_r die multiplikativen Kombinationen aus den einfachen Faktoren des äusseren Produktes $[AB\cdots]$ zur fo vielten Klasse find, als die Stufenzahl von A beträgt und entsprechend die B_r u. f. w.

Beweis. Nach 173 ist

$$[AB\cdots|\boldsymbol{AB}\cdots] = \sum\overline{[A_a|\boldsymbol{A}][B_b|\boldsymbol{B}]\cdots}, \text{ wo}$$
$$[A_aB_b\cdots] = [AB\cdots]$$

ist, mit den näheren in 173 angegebenen Bestimmungen.

Da nun A mit $\boldsymbol{A}$ von gleicher Stufe ist, alfo auch A_a mit $\boldsymbol{A}$, fo ist (nach 141) $[A_a|\boldsymbol{A}]$ eine Zahl und aus gleichem Grunde $[B_b|\boldsymbol{B}]$, u. f. w. Folglich können wir statt $\sum\overline{[A_a|\boldsymbol{A}][B_b|\boldsymbol{B}]\cdots}$ schreiben

$$= \sum\frac{\overline{[A_a|\boldsymbol{A}][B_b|\boldsymbol{B}]\cdots[A_aB_b\cdots]}}{[A_aB_b\cdots]}.$$

Alfo, da $[A_aB_b\cdots]$ gleich $[AB\cdots]$ ist,

$$= \sum\overline{[A_a|\boldsymbol{A}][B_b|\boldsymbol{B}]\cdots[A_aB_b\cdots]} : [AB\cdots].$$

Oder, da (nach 46) die Zahlfaktoren beliebigen Faktoren eines Produktes zugeordnet werden können,

$$= \sum\overline{([A_a|\boldsymbol{A}]A_a\cdot[B_b|\boldsymbol{B}]B_b\cdots)} : [AB\cdots].$$

Hier enthält (nach 173) jedes Produkt $[A_aB_b\cdots]$ diefelben Faktoren erster Stufe wie $[AB\cdots]$, alfo enthält in jedem derfelben A_a andere als B_b, u. f. w. Da nun aber die Produkte, in denen A_a, B_b, $\cdots$ gleiche Faktoren erster Stufe enthalten,

Hosted by Google

null ſind, ſo können wir dieſe Produkte zu dem obigen Ausdrucke hinzufügen, und erhalten dann denſelben (nach 45)

$$= [\sum [A_r|A] A_r \cdot \sum [B_r|B] B_r \cdots] : [AB\cdot\cdot],$$

$$\text{d. h.} = \frac{[A'B'\cdots]}{[AB\cdots]}.$$

175. Das innere Produkt zweier Grössen m-ter Stufe A und B, deren jede aus m einfachen Faktoren besteht, ist gleich der Determinante aus m Reihen von je m Gliedern, die man erhält, indem man nach der Ordnung jeden einfachen Faktor von A mit jedem von B zu einem inneren Produkte verknüpft, d. h. es ist

$$[abc\cdots|a'b'c'\cdots] = \text{Determ.}\begin{cases} [a|a'],\ [a|b'],\ [a|c'],\cdots \\ [b|a'],\ [b|b'],\ [b|c'],\cdots \\ [c|a'],\ [c|b'],\ [c|c'],\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$= \sum \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\cdots),$$

wo $\alpha = [a|a']$, $\alpha_1 = [a|b']$, $\alpha_2 = [a|c'],\cdots$

$\beta = [b|a']$, $\beta_1 = [b|b']$, $\beta_2 = [b|c'],\cdots$

$\gamma = [c|a']$, $\gamma_1 = [c|b']$, $\gamma_2 = [c|c'],\cdots$

u. ſ. w.

Beweis. Nach 174 iſt

$$[abc\cdots|a'b'c'\cdots] = \frac{[a_1b_1c_1\cdots]}{[abc\cdots]},$$

wo $a_1 = [a|a']a + [b|a']b + [c|a']c + \cdots = \alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots$

$b_1 = [a|b']a + [b|b']b + [c|b']c + \cdots = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \cdots$

$c_1 = [a|c']a + [b|c']b + [c|c']c + \cdots = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \cdots$

$\cdots\cdots\cdots$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$

iſt. Aber nach 63 iſt

$$[(\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdot\cdot)(\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c+\cdot\cdot)(\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c+\cdot\cdot)\cdot\cdot]$$

$$= \sum \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\cdots)\cdot[abc\cdot\cdot].$$

Alſo

$$[abc\cdots|a'b'c'\cdots] = \frac{[a_1b_1c_1\cdots]}{[abc\cdots]} = \frac{\sum \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\cdots)[abc\cdots]}{[abc\cdots]}$$

$$= \sum \mp (\alpha\beta_1\gamma_2\cdots).$$

176–179. Zuſätze. Ins Beſondere iſt

176$\cdot\cdot$ $[ab|a'b'] = [a|a'][b|b'] - [a|b'][a'|b]$,

177$\cdot\cdot$ $[ab]^2 = a^2b^2 - [a|b]^2$,

Hosted by Google

178. $[abc]^2 = a^2b^2c^2 - a^2[b|c]^2 - b^2[c|a]^2 - c^2[a|b]^2 + 2[a|b][b|c][c|a]$,

179. $[abcd]^2 = \text{Determ.} \begin{cases} a^2, & [a|b], & [a|c], & [a|d] \\ [b|a], & b^2, & [b|c], & [b|d] \\ [c|a], & [c|b], & c^2, & [c|d] \\ [d|a], & [d|b], & [d|c], & d^2, \end{cases}$

180. $[ab|c] = [a|c]b - [b|c]a$,

181. $[abc|d] = [a|d][bc] + [b|d][ca] + [c|d][ab]$,

182. $[abcd|e] = [a|e][bcd] + [b|e][cad] + [c|e][abd] + [d|e][cba]$.

Denn in 180 bis 182 kann man den zweiten Faktor des inneren Produktes (c, d oder e) als Produkt betrachten, deſſen zweiter Faktor 1 ist (alſo $c \cdot 1$, $d \cdot 1$ oder $e \cdot 1$), und kann dann No. 173 anwenden; wobei man zu beachten hat, dass nach den Geſetzen kombinatorischer Multiplikation

$$[ab] = -[ba], \quad [a \cdot bc] = [b \cdot ca] = [c \cdot ab] \text{ und}$$
$$[a \cdot bcd] = [b \cdot cad] = [c \cdot abd] = [d \cdot cba] \text{ ist.}$$

183. Wenn man aus einer Reihe von (n) Grössen erster Stufe die multiplikativen Kombinationen zu irgend einer Klasse bildet, und jede derſelben mit der ergänzenden Kombination zu einem inneren Produkte verknüpft, ſo ist die Summe dieſer Produkte null, d. h.

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = 0,$$

wenn A, $A_1, \cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus den n Grössen erster Stufe a_1, $a_2, \cdots a_n$ zu irgend einer (m-ten) Klasse, und B, $B_1, \cdots$ die ergänzenden Kombinationen ſind.

Beweis 1. Es ſei zuerst angenommen $m \geqq n - m$. Da nun A eine der multiplikativen Kombinationen von $a_1, \cdots a_n$ ist, ſo wird es die Form haben

$$A = [a_r a_s \cdots \cdots a_z],$$

wo r, s, $\cdots$ z beliebige m verſchiedene unter den Zahlen $1 \cdots n$ ſind. Da ferner B die ergänzende Kombination zu A ist, ſo muss es als Faktoren diejenigen $n - m$ unter den Grössen $a_1 \cdots a_n$ enthalten, welche unter den Grössen a_r, $a_s, \cdots a_z$ nicht vorkommen. Es ſeien dies $a_{r'}$, $a_{s'} \cdots$, $a_{u'}$, ſo dass alſo $B = (-1)^p [a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]$ ist. Ferner muss das durch $(-1)^p$ angedeutete Vorzeichen (nach 172 Anm.) ſo bestimmt werden, dass $[AB] = [a_1 \cdots a_n]$ wird, d. h. dass

Hosted by Google

* $(-1)^p[a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}] = [a_1 a_2 \cdots a_n]$

ist. Von gleicher Form find die fämmtlichen übrigen Produkte $[A_1|B_1]$ u. f. w. Sollen die Kombinationen A, B, A_1, B_1, $\cdots$ wohlgeordnete fein, fo hat man noch die Bedingungen hinzuzufügen, dass $r < s < \cdots < u < v < \cdots < z$ und $r' < s' < \cdots < u'$ fei. Fügen wir diefe Bedingung hinzu, fo wird

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = \sum (-1)^p [a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z | a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}].$$

Fassen wir hier $a_v \cdots a_z$ zu einem Faktor zufammen und fügen dem zweiten Faktor des inneren Produktes an letzter Stelle noch den Faktor 1 hinzu, fo wird die Bedingung von No. 173 erfüllt, alfo wird der obige Ausdruck

** $[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = \sum (-1)^p [a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}] \cdots [a_u|a_{u'}] \cdot [a_v a_w \cdots a_z],$

wobei noch die Gleichung (*) bestehen bleibt, und auch die Bedingungen $r' < s' < \cdots < u'$ und $v < w < \cdots < z$ geltend bleiben, hingegen die Bedingung, dass $r < s < \cdots < u$ fei, wegfällt, und die Summe fich auf alle unter jenen Bedingungen möglichen Glieder bezieht. Ich zeige nun, dass in diefer Summe alle Glieder paarweife einander entgegengefetzt find, und fich alfo heben. Es fei irgend eins diefer Glieder betrachtet, etwa

$$(-1)^p [a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}] \cdots [a_u|a_{u'}][a_v a_w \cdots a_z]$$

wo die Indices bestimmte (von einander verschiedene) Werthe haben, die den obigen Bedingungen genügen, und wo nach dem Obigen p einen folchen Werth hat, dass die Gleichung (*) erfüllt wird. Da die Indices r, r', s, s', $\cdots$ u, u' alle von einander verschieden find, fo wird irgend einer der kleinste unter ihnen fein müssen, und unter den Produkten $[a_r|a_{r'}]$, $[a_s|a_{s'}], \cdots [a_u|a_{u'}]$ wird irgend eins diefen kleinsten Index enthalten; es fei dies beispielsweife das Produkt $[a_r|a_{r'}]$. Dies angenommen, vertausche man r und r' und ändere das Zeichen, fo erhält man einen Ausdruck

*** $(-1)^{p+1}[a_{r'}|a_r][a_s|a_{s'}] \cdots [a_u|a_{u'}][a_v a_w \cdots a_z],$

von welchem ich zeigen werde, dass er gleichfalls als Glied in der obigen Summe (**) vorkommt. Sollte der Index r grösser fein als s', fo gebe man dem Faktor $[a_{r'}|a_r]$ unter den

Hosted by Google

übrigen Faktoren $[a_s|a_{s'}]\cdots[a_u|a_{u'}]$ eine folche Stellung, dass die Bedingung erfüllt wird, vermöge welcher der zweite Index in jedem dieser Faktoren kleiner fein foll als der zweite Index des nächst folgenden Faktors. Ich will annehmen, dass diefe Bedingung erfüllt fei, wenn man den Faktor $[a_{r'}|a_r]$ um q Stellen nach rechts rückt, was gestattet ist, da alle diefe Faktoren Zahlen find. Es ist nun noch zu zeigen, dass auch die durch Gleichung (*) ausgedrückte Bedingung für das fo hervorgehende Glied gilt, d. h. dass fie noch bestehen bleibt, wenn man in ihr $p+1$ statt p fetzt, auf der linken Seite $a_{r'}$ mit a_r vertauscht und diefe beiden Faktoren um q Stellen nach rechts rückt. Das Produkt, welches auf diefe Weife aus $(-1)^p[a_r a_s\cdots a_u a_v\cdots a_z a_{r'} a_{s'}\cdots a_{u'}]$ hervorgeht, heisset P; fo ist

$$P=(-1)^{p+1}[a_{r'}a_s\cdots a_u a_v\cdots a_z a_r a_{s'}\cdots a_{u'}]$$

Denn man kann in diefem Produkte P die Faktoren a_r und $a_{r'}$ gleichzeitig wieder um 9 Stellen zurückrücken, ohne dass fich (nach 58) der Werth des Produktes ändert. Ferner ist der letzte Ausdruck (nach 55), indem man a_r und $a_{r'}$ vertauscht,

$$\begin{aligned}&=-(-1)^{p+1}[a_r a_s\cdot a_u a_v\cdots a_z a_{r'}a_{s'}\cdots a_{u'}]\\&=(-1)^p[a_r a_s\cdot\cdots\cdot a_u a_v\cdots a_z a_{r'}a_{s'}\cdots a_{u'}]\\&=[a_1a_2\cdots a_n]\qquad\qquad\text{[nach *].}\end{aligned}$$

Alfo $P=[a_1a_2\cdots\cdot a_n]$. Alfo ist jener Ausdruck (***) allen Bedingungen unterworfen, denen die Glieder der Summe (**) unterworfen find, ist alfo, da jene Summe alle Glieder enthält die jenen Bedingungen genügen, felbst ein Glied jener Summe. Dies Glied hebt fich nun mit dem zuerst betrachteten Gliede auf; denn

$$\begin{aligned}&(-1)^p[a_r|a_{r'}][a_s|a_{s'}]\cdots[a_u|a_{u'}][a_v a_w\cdots a_z]\\&\quad+(-1)^{p+1}[a_{r'}|a_r][a_s|a_{s'}]\cdots[a_u|a_{u'}][a_v a_w\cdots a_z]\end{aligned}$$

ist null, da $[a_{r'}|a_r]=[a_r|a_{r'}]$ ist (nach 144) und $(-1)^{p+1}=-(-1)^p$ ist. Aber auf diefelbe Weife, wie aus dem ersteren diefer beiden Glieder das letztere hervorgeht, geht aus diefem jenes hervor. Und auf gleiche Weife findet fich zu jedem Gliede jener Summe ein ihm zugepaartes, welches fich mit ihm aufhebt; alfo ist jene Summe null, alfo auch das diefer Summe gleiche

$$[A|B]+[A_1|B_1]+\cdots\cdot=0,$$

Hosted by Google

2. Wenn $m < n - m$ ist, fo ist (nach 150), wenn noch $m(n - m - 1) = c$ gefetzt wird,

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = (-1)^c|[B|A] + (-1)^c|[B_1|A_1] + \cdots$$
$$= (-1)^c|([B|A] + [B_1|A_1] + \cdots) \quad [98].$$

Hier ist (nach Beweis 1) die in Klammer geschlossene Summe 0, alfo

$$[A|B] + [A_1|B_1] + \cdots = (-1)^c|(0) = 0 \quad [89].$$

184. Zufatz. Wenn man aus einer Reihe von 4m Grössen erster Stufe $a_1 \cdots a_{4m}$ die fämmtlichen multiplikativen Kombinationen A, B, C$\cdots$ zur 2m-ten Klasse, welche eine diefer Grössen, z. B. a_1 enthalten, bildet, und jede derfelben mit der ergänzenden Kombination zu einem inneren Produkte verknüpft, fo ist die Summe diefer Produkte null, d. h.

$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots = 0,$$

wo A, B,$\cdots$ die multiplikativen Kombinationen aus $a_1, \cdots a_{4m}$ zur 2m-ten Klasse, welche a_1 enthalten, und A', B',$\cdots$ deren ergänzende Kombinationen find.

Beweis. Da A, B,$\cdots$ die fämmtlichen a_1 enthaltenden multiplikativen Kombinationen aus 4m Elementen zur 2m-ten Klasse find, fo find ihre ergänzenden Kombinationen A', B',$\cdots$ die fämmtlichen Kombinationen aus denfelben Elementen zu derfelben Klasse, welche a_1 nicht enthalten. Ferner, da die Stufenzahlen von A, B,$\cdots$ A', B',$\cdots$ gerade find, fo ist (nach 58) $[AA'] = [A'A]$, und alfo (nach 172 Anm.), wenn A' die ergänzende Kombination von A ist, auch A die ergänzende Kombination von A', und ebenfo B die von B', fomit (nach 183)

$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots + [A'|A] + [B'|B] + \cdots = 0.$$

Aber (nach 144) $[A|A'] = [A'|A]$, $[B|B'] = [B'|B]\cdots$.

Alfo

$$2[A|A'] + 2[B|B'] + \cdots = 0, \text{ d. h.}$$
$$[A|A'] + [B|B'] + \cdots = 0.$$

185—187. Zufätze. Ins Befondere ist

185. $[ab|cd] + [ac|db] + [ad|bc] = 0,$

186. $[ab|c] + [bc|a] + [ca|b] = 0,$

187. $[abc|d] - [bcd|a] + [cda|b] - [dab|c] = 0.$

Hosted by Google

§. 4. Besondere Sätze über die innere Multiplikation zweier Grössen erster Stufe.

188. Die Bedingungsgleichungen für die innere Multiplikation zweier Grössen erster Stufe find

(a) $[e_r|e_s] = 0$, wenn $r \gtrless s$,

(b) $[e_r|e_r] = [e_s|e_s] = \cdots$,

und zwar gelten diefelben auch, wenn man ſtatt der Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ ein beliebiges vollſtändiges Normalsyſtem ſetzt.

Beweis. Die Geltung der beiden Gleichungsgruppen für die Einheiten iſt in No. 142 bewieſen. Alſo gelten ſie (nach 168) auch für jedes einfache vollſtändige Normalsyſtem. Sie gelten aber auch für jedes beliebige vollſtändige Normalsyſtem. Denn ſind a, b, zwei Grössen desſelben und iſt λ der numeriſche Werth des Normalsyſtems, ſo dass $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ geſetzt werden kann, wo a' und b' den numeriſchen Werth 1 haben, ſo iſt $[a'|b'] = 0$, alſo auch $[\lambda a'|\lambda b'] = 0$, d. h. $[a|b] = 0$ und $[a'|a'] = 1$, alſo $[a|a] = [\lambda a'|\lambda a'] = \lambda^2[a'|a'] = \lambda^2$. Ebenſo $[b|b] = \lambda^2$, alſo $[a|a] = [b|b]$. Zu zeigen iſt noch, dass die beiden obigen Gruppen die vollſtändigen Beſtimmungsgleichungen enthalten, d. h. (nach 48) dass zwiſchen den Produkten $[e_r|e_s]$ keine andere Zahlbeziehung herrſcht, als eine aus jenen beiden Gruppen ableitbare. Es laſſen ſich vermöge der beiden Gruppen alle Produkte $[e_r|e_s]$, ſofern r gleich s iſt, gleich $[e_1|e_1]$ ſetzen, während ſie verſchwinden, ſobald r von s verſchieden iſt. Hat man alſo irgend eine Bedingungsgleichung

$$\sum \overline{\alpha_{r,s}[e_r|e_s]} = 0,$$

ſo verwandelt ſie ſich in

$$\sum \overline{\alpha_{r,r}[e_1|e_1]} = 0,$$

alſo, da $[e_1|e_1]$ gleich 1 iſt, in

$$\sum \overline{\alpha_{r,r}} = 0.$$

Iſt aber letzteres der Fall, ſo geht die Gleichung

$$\sum \overline{\alpha_{r,s}[e_r|e_s]} = 0$$

ſchon aus den obigen beiden Gruppen hervor, ſomit enthalten jene beiden Gruppen das vollſtändige Syſtem der Beſtimmungsgleichungen.

Anm. Für die innere Multiplikation zweier beliebiger Grössen

Hosted by Google

von den Stufen p und q ($q >= p$) ist das System der Bestimmungsgleichungen in den beiden Gleichungsgruppen enthalten:

(a) $[E|F] = 0$, wenn E nicht mit F incident ist,

(b) $[E|EG] = [E'|E'G]$, wo E, F, G, E' kombinatorische Produkte der ursprünglichen Einheiten sind, E, E' von p-ter, F, [EG] und [E'G] von q-ter Stufe und die letzteren beiden nicht null sind.

189. $[a|b] = [b|a]$ (specieller Fall von No. 144).

190. Es ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 \cdots,$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ zu einander normal sind.

Beweis. Denn wenn $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots$ mit $\sum \overline{\alpha_r a_r}$ und $\beta_1 a + \beta_2 a_2 + \cdots$ mit $\sum \overline{\beta_r a_r}$ bezeichnet wird, so ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = [\sum \overline{\alpha_r a_r}|\sum \overline{\beta_r a_r}]$$
$$= \sum \overline{\alpha_r \beta_s}[a_r|a_s] \qquad [42]$$
$$= \sum \alpha_r \beta_r [a_r|a_r],$$

weil a_r und a_s, wenn r von s verschieden ist, nach der Annahme zu einander normal sind, also (nach 188) ihr inneres Produkt null ist. Der letzte Ausdruck ist aber

$$= \sum \overline{\alpha_r \beta_r} a_r^2 = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 + \cdots.$$

191. Es ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots|(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots,$$

wenn $a_1, a_2, \cdots$ ein einfaches Normalsystem bilden.

Beweis. Denn nach 190 ist

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots)(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots)] = \alpha_1\beta_1 a_1^2 + \alpha_2\beta_2 a_2^2 + \cdots,$$

aber, wenn $a_1, a_2, \cdots$ ein einfaches Normalsystem bilden, so ist $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = 1$, also der gefundene Ausdruck

$$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots.$$

192. Wenn $a_1, a_2, \cdots$ zu einander normal sind, so ist

$$(a_1 + a_2 + \cdots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots.$$

Beweis aus 190.

193. Es ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2[a|b] + b^2.$$

Beweis. Es ist

$$(a + b)^2 = [(a + b)|(a + b)]$$
$$= [a|a] + [a|b] + [b|a] + [b|b] \qquad [42],$$

Hosted by Google

alſo (nach 189)

$$= a^2 + 2[a|b] + b^2.$$

194. Es iſt

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[b|c] + 2[c|a] + 2[a|b].$$

Beweis wie in 193.

Anm. Die Sätze 192 – 194 ſtellen, geometriſch gedeutet, den Pythagoräiſchen Lehrſatz nebſt ſeiner Erweiterung für die Ebene wie für den Raum dar.

§. 5. Einführung der Winkel.

195. Unter $\angle AB$ (Winkel AB) verſtehe ich, wenn A und B von gleicher Stufe aber nicht null, und α und β ihre numeriſchen Werthe ſind, denjenigen Winkel zwiſchen 0 und π (dieſe Gränzen mit eingeſchloſſen), deſſen Coſinus gleich dem durch die numeriſchen Werthe dividirten inneren Produkte jener Größen iſt, d. h. ich ſetze

$$\cos. \angle AB = \frac{[A|B]}{\alpha\beta}, \quad \angle AB = 0 \cdots \pi.$$

Ferner verſtehe ich, wenn a, b, c, $\cdots$ Größen erſter Stufe ſind, und α, β, γ, $\cdots$ ihre numeriſchen Werthe, unter ſin. (abc $\cdots$) den Ausdruck, welcher numeriſch gleich $\frac{[abc\cdots]}{\alpha\beta\gamma\cdots}$ und nicht negativ iſt, d. h.

$$\text{ſin. (abc}\cdots) \geqq 0 \text{ und numeriſch } = \frac{[abc\cdots]}{\alpha\beta\gamma\cdots},$$

d. h $\text{ſin.}^2(abc\cdots) = \frac{[abc\cdots]^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdots}$.

196. Wenn a, b Größen erſter Stufe ſind, ſo iſt

$$\text{ſin. (ab)} = \text{ſin. } \angle ab.$$

Beweis. Denn nach 195 iſt

$$\text{ſin.}^2(ab) = \frac{[ab]^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad [177]$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 - [a|b]^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad [151]$$

$$= 1 - \left[\frac{a|b}{\alpha\beta}\right]^2$$

$$= 1 - \cos.^2 \angle ab \qquad [195]$$

$$= \text{ſin.}^2 \angle ab.$$

Hosted by Google

Und da nach der Definition ſin. (ab) nie negativ und ∠ab ein Winkel zwiſchen 0 und π, alſo ſin. ∠ab auch nicht negativ iſt, ſo folgt aus ſin.^{2}(ab) = ſin.^{2}∠ab, daſs ſin. (ab) = ſin. ∠ab ſei.

197. [A|B] = $\alpha\beta$ cos. ∠AB, wenn A und B von gleicher Stufe und α und β ihre numeriſchen Werthe ſind.

Beweis aus 195.

198. [ab]^2 = ($\alpha\beta$ ſin. ∠ab)^2, wo α und β die numeriſchen Werthe von a und b ſind.

Beweis. Nach 177 iſt
$$\begin{aligned}[ab]^2 &= \alpha^2\beta^2 - [a|b]^2\\ &= \alpha^2\beta^2 - (\alpha\beta\cos.\angle ab)^2 \quad [197]\\ &= \alpha^2\beta^2(1 - \cos.^2\angle ab)\\ &= \alpha^2\beta^2 \text{ſin.}^2\angle ab.\end{aligned}$$

Anm. In dieſen Formeln tritt der Gegenſatz zwiſchen dem äusseren und inneren Produkte in einfachſter Geſtalt hervor. Während das innere Produkt zweier Grössen erſter Stufe gleich dem Produkte der numeriſchen Werthe in den coſinus des Zwiſchenwinkels iſt, ſo iſt das äussere Produkt derſelben, abgeſehen vom $\mp$ Zeichen, gleich dem Produkte der numeriſchen Werthe in den ſinus des Zwiſchenwinkels.

199. Es iſt

$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \text{ſin.} \angle ab \text{ſin.} \angle cd \cos.(\angle ab \cdot cd),$$

wenn α, β, γ, δ die numeriſchen Werthe von a, b, c, d ſind.

Beweis. Der numeriſche Werth von [ab] iſt $([ab]^2)^{\frac{1}{2}}$ und der von [cd] iſt $([cd]^2)^{\frac{1}{2}}$, alſo iſt (nach 197)

$$\begin{aligned}[ab|cd] &= ([ab]^2[cd]^2)^{\frac{1}{2}} \cos.(\angle ab \cdot cd)\\ &= [(\alpha\beta \text{ſin.} \angle ab \gamma\delta \text{ſin.} \angle cd)^2]^{\frac{1}{2}} \cos.(\angle ab \cdot cd) \quad [198].\end{aligned}$$

Aber da das Produkt $\alpha\beta$ ſin. ∠ab $\gamma\delta$ ſin. ∠cd poſitiv iſt, ſo hebt ſich das fortſchreitende Potenziren dieſer Grösse durch 2 und $\frac{1}{2}$ auf, und es wird

$$[ab|cd] = \alpha\beta\gamma\delta \text{ſin.} \angle ab \text{ſin.} \angle cd \cos.(\angle ab \cdot cd).$$

200. Die normale Zurückleitung von A auf eine Grösse gleicher Stufe B iſt numeriſch gleich A cos. ∠AB.

Beweis. Wenn A′ die normale Zurückleitung von A auf B iſt, ſo iſt (nach 166)

$$\begin{aligned}A' &= \frac{[A|B]B}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta\cos.\angle AB \cdot B}{\beta^2} \quad [197]\\ &= \alpha\cos.\angle AB \cdot \frac{B}{\beta}, \text{ alſo numeriſch} = A\cos.\angle AB.\end{aligned}$$

Hosted by Google

201. Wenn a, b, c,··· zu einander normal ſind, ſo iſt für jede aus ihnen numeriſch ableitbare Grösse k

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha}\cos.\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bk + \cdots,$$

wo $\varkappa$, α, β,··· die numeriſchen Werthe von k, a, b,··· ſind.

Beweis. Es ſei $k = xa + yb + \cdots$, ſo erhalten wir durch innere Multiplikation mit a, da [b|a] u. ſ. w. null ſind,

$$[a|k] = x[a|a] = x\alpha^2 \qquad [151],$$

alſo

$$x = \frac{[a|k]}{\alpha^2} = \frac{\alpha\varkappa\cos.\angle ak}{\alpha^2}, \qquad [197]$$

$$= \frac{\varkappa}{\alpha}\cos.\angle ak.$$

Aus gleichem Grunde iſt $y = \frac{\varkappa}{\beta}\cos.\angle bk$ u. ſ. w. Dieſe Werthe von x, y,··· in die obige Formel eingeſetzt, giebt

$$k = \frac{\varkappa}{\alpha}\cos.\angle ak\cdot a + \frac{\varkappa}{\beta}\cos.\angle bk\cdot b + \cdots, \text{ d. h.}$$

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{a}{\alpha}\cos.\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bk + \cdots.$$

202. Wenn a, b zu einander normal und k und l aus ihnen numeriſch ableitbar ſind, ſo iſt

$$\cos.\angle kl = \cos.\angle ak\cos.\angle al + \cos.\angle bk\cos.\angle bl + \cdots.$$

Beweis. Nach 195 iſt, wenn $\varkappa$, λ, α, β,··· die numeriſchen Werthe von k, l, a, b,··· ſind,

$$\cos.\angle kl = \frac{[k|l]}{\varkappa\lambda} = \left[\frac{k}{\varkappa}\middle|\frac{l}{\lambda}\right] = \left[\left(\frac{a}{\alpha}\cos.\angle ak + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bk + \cdots\right)\left(\frac{a}{\alpha}\cos.\angle al + \frac{b}{\beta}\cos.\angle bl + \cdots\right)\right] \qquad [201]$$

$$= \frac{a^2}{\alpha^2}\cos.\angle ak\cos.\angle al + \frac{b^2}{\beta^2}\cos.\angle bk\cos.\angle bl + \cdots,$$

weil [a|b] u. ſ. w. null ſind. Da nun $a^2 = \alpha^2$, $b^2 = \beta^2$, u. ſ. w., ſo erhält man

$$\cos.\angle kl = \cos.\angle ak\cos.\angle al + \cos.\angle bk\cos.\angle bl + \cdots.$$

Zuſatz. Man kann dieſen Satz auch ſo ausdrücken: Statt eine Grösse erſter Stufe (k) auf eine andere l zurückzuleiten, kann man jene zuerſt auf die Grössen eines Normalſyſtems zurückleiten und dann die ſo erhaltenen Zurück-

Hosted by Google

leitungen auf l zurückleiten, und diese letzten Zurückleitungen addiren, vorausgesetzt, dass hierbei alle Zurückleitungen normale sind.

203. Wenn a, b,··· zu einander normal sind, so ist für jedes aus ihnen numerisch ableitbare k

$$1 = \cos.^2\angle ka + \cos.^2\angle kb + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man $l = k$ setzt.

204. Wenn a, b,··· zu einander normal und k und l aus ihnen numerisch ableitbar und gleichfalls zu einander normal sind, so ist

$$0 = \cos.\angle ak \cos.\angle al + \cos.\angle bk \cos.\angle bl + \cdots.$$

Beweis. Die Formel geht aus 202 hervor, wenn man $\angle lk = 90^0$ setzt.

205. Wenn $a + b + \cdots = 0$ ist, und $\alpha, \beta, \cdots$ die numerischen Werthe von a, b,··· sind, so ist

a) $\alpha : \beta : \cdots = \sin.a' : \sin b' : \cdots$,

wo a′, b′,·· die zu a, b,··· ergänzenden Kombinationen aus a, b,··· sind,

b) $\alpha \cos.\angle ax + \beta \cos.\angle bx + \cdots = 0$,

wo x eine beliebige Grösse ist,

c) $\sin.a' \cos.\angle ax + \sin.b' \cos.\angle bx + \cdots = 0$.

Beweis 1. Multiplicirt man die Gleichung

$$a + b + \cdots = 0$$

kombinatorisch mit cd····, so erhält man

$$[acd\cdots] + [bcd\cdots] = 0, \text{ also } [acd\cdot\cdot]^2 = [bcd\cdot\cdot]^2,$$

wo [acd···] das Produkt aller Grössen a, b, c,···, mit Ausnahme von b, und [bcd···] das Produkt aller Grössen, mit Ausnahme von a, ist. Somit ist (nach 195)

$$(\alpha\gamma\delta\cdots)^2 \sin.^2[acd\cdot] + (\beta\gamma\delta\cdots)^2 \sin.^2[bcd\cdots] = 0,$$

oder $$\alpha^2 \sin.^2[acd\cdots] = \beta^2 \sin.^2[bcd\cdots].$$

Nun ist cad··· die ergänzende Kombination zu b, also = b′, und bcd··· die ergänzende zu a, also = a′, also $\sin.b' = \sin.(cad\cdot\cdot)$ und $\sin.a' = \sin.(bcd\cdot\cdot)$, also, da α, β, $\sin.a'$, $\sin.b'$ positiv sind,

$$\alpha \sin.b' = \beta \sin.a', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \sin.a' : \sin.b',$$

und somit allgemein

$$\alpha : \beta : \cdots = \sin.a' : \sin.b : \cdots.$$

Hosted by Google

2. Multiplicirt man die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ innerlich mit einer beliebigen, von null verschiedenen, Grösse erster Stufe x, so erhält man

$$[a|x] + [b|x] + \cdots = 0,$$

also wenn ξ der numerische Werth von x ist, ist

$$\alpha\xi \cos.\angle ax + \beta\xi \cos.\angle bx + \cdots = 0, \text{ d. h.}$$
$$\alpha \cos.\angle ax + \beta \cos.\angle bx + \cdots = 0.$$

3. Substituirt man in die so erhaltene Gleichung die vorher gewonnenen Werthe von $\alpha : \beta : \gamma : \cdots$, so erhält man

$$\sin.a' \cos.\angle ax + \sin.b' \cos.\angle bx + \cdots = 0.$$

Anm. Die entwickelten Formeln haben nur dann eine Bedeutung, wenn zwischen den Grössen a, b, ··· keine andere Beziehung herrscht, als die durch die Gleichung $a + b + \cdots = 0$ dargestellt ist, d. h. wenn die n Grössen a, b, ··· in keinem Gebiete von niederer als $(n-1)$ter Stufe vereinigt sind. Für drei Grössen enthält die erste den bekannten Satz, dass im Dreieck die Seitenlängen sich wie die sinus der Gegenwinkel verhalten.

206—213. Aus den Formeln 172, 175—178, 184, 185 ergeben sich mit Hülfe der angegebenen Winkelbezeichnungen folgende Formeln:

206. $$\sin.\angle AB \cdot \sin.\angle \mathit{AB} \cos.(\angle AB \cdot \mathit{AB}) = \sum \cos.\angle A_r \mathit{A} \cos.\angle B_r \mathit{B},$$

wo A_r die Kombinationen aus den einfachen Faktoren von [AB], zur so vielten Klasse, als die Stufe von A beträgt, und B_r die ergänzenden Kombinationen sind.

207. $$\sin.(abc\cdots)\sin.(a'b'c'\cdots)\cos.(\angle abc\cdots a'b'c'\cdots) = \text{Determ.} \begin{Bmatrix} \cos.\angle aa', & \cos.\angle ab', & \cdots \\ \cos.\angle ba', & \cos.\angle bb', & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{Bmatrix}$$

208. $$\sin.ab \sin.cd \cos.(\angle ab \cdot cd) = \cos.ac \cos.bd - \cos.bc \cos.ad,$$

und wenn hier a und c statt c und d gesetzt wird

209. $$\sin.ab \sin.ac \cos.(\angle ab \cdot ac) = \cos.bc - \cos.ab \cos.ac,$$

eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie, ferner

210. $$\sin.^2ab = 1 - \cos.^2ab,$$

was hier als die Transformation von 177 mit aufgeführt ist.

211. $$\sin.^2[abc] = 1 - \cos.^2bc - \cos.^2ca - \cos.^2ab + 2\cos.bc \cos.ca \cos.ab.$$

Hosted by Google

212. $\text{fin.A fin.B cos.}\angle AB + \text{fin.}A_1\text{fin.}B_1\text{cos.}\angle A_1B_1 + \cdots = 0,$

wenn A, $A_1, \cdots$ die Kombinationen aus 2n Grössen erster Stufe zur n-ten Klasse, und B, $B_1, \cdots$ deren Ergänzungen ſind.

213. $\text{fin.ab fin.cd cos.}(\angle ab \cdot cd) + \text{fin.ac fin.bd cos.}(\angle ab \cdot cd) + \text{fin.ad fin.bc cos.}(\angle ad \cdot bc) = 0.$

Anm. Ebenſo würden ſich die übrigen Formeln aus §. 3 haben umgestalten lassen, wenn man noch $\frac{[abcd]}{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{cos.}\angle abcd$ gesetzt hätte u. ſ. w.

214—215. Ferner aus 193, 194 ergiebt ſich.

214. $(a + b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\,\text{cos.}\angle ab + \beta^2.$

215. $(a + b + c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\,\text{cos.}\angle bc + 2\gamma\alpha\,\text{cos.}\,ca + 2\alpha\beta\,\text{cos.}\,ab,$

wo α, β, γ die numerischen Werthe von a, b, c ſind.

Kap. 5. Anwendungen auf die Geometrie.

§. 1. Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung von Punkten und Strecken.

216. Erklärung. Wenn ein Punkt E und drei gegen einander ſenkrechte und gleich lange Linien als urſprüngliche Einheiten angenommen ſind, und α, α_1, α_2, α_3 beliebige Zahlen ſind, ſo verſtehe ich

a) unter

$$E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

den Punkt A, zu welchem man gelangt, indem man von E aus zuerſt um eine Strecke EB fortſchreitet, welche gleich $\alpha_1 e_1$ iſt, d. h. welche mit e_1 gleich oder entgegengeſetzt gerichtet iſt, je nachdem α_1 poſitiv oder negativ iſt, und deren Länge ſich zu der von e_1 wie α_1 zu 1 verhält, dann von B aus um eine Strecke BC, welche in demſelben Sinne gleich $\alpha_2 e_2$, und endlich von C aus um eine Strecke CA, welche in demſelben Sinne gleich $\alpha_3 e_3$ iſt, fortſchreitet,

b) zweitens verſtehe ich dann unter

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

eine Strecke, d. h. eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung, und zwar diejenige Strecke, welche gleiche

Hosted by Google

Länge und Richtung hat mit der von E nach dem Punkte $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ gezogenen geraden Linie,

c) drittens unter

$$\alpha(E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$$

das α-fache des Punktes $E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, und ſetze feſt, daſs für alle dieſe Grössen und ihre Verknüpfungen die in Kap. I. gegebenen Bestimmungen, und alſo auch die daraus abgeleiteten Sätze gelten.

Anm. Grössen erster Stufe ſind alſo hier die einfachen und vielfachen Punkte und die Strecken von bestimmter Länge und Richtung. Durch die Erklärungen in §. 1 ist dann die Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Theilung dieſer Grössen bestimmt, und durch die Sätze in §. 1 die Geltung der algebraiſchen Verknüpfungsgeſetze für ſie nachgewieſen und in den folgenden §§. die beſonderen Eigenſchaften, welche ihnen als extenſiven Grössen zukommen. Wir leiten hier zunächst aus dieſen formellen Bestimmungen die Konstruktionen ab, durch welche die Reſultate der verschiedenen Verknüpfungen erfolgen.

217. Wenn $A = E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ist, ſo ſind $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_1$, $\alpha_3 e_3$ die ſenkrechten Projektionen (normalen Zurückleitungen) von EA auf die 3 von E ausgehenden mit e_1, e_2, e_3 gleichgerichteten Axen.

Beweis folgt unmittelbar aus der Definition.

218. Lehrſatz aus der Geometrie. Gleichgerichtete Strecken, auf dieſelbe gerade Linie ſenkrecht projicirt, liefern gleichgerichtete Projektionen, die ſich ihrer Länge nach wie die projicirten Strecken verhalten; und umgekehrt, wenn die ſenkrechten Projektionen zweier gerader Linien auf drei gegen einander ſenkrechte Axen gleich lang und gleich gerichtet ſind, ſo ſind die projicirten Linien ſelbſt einander gleich lang und gleich gerichtet.

219. Lehrſatz aus der analytiſchen Geometrie. Wenn A, B, C drei beliebige Punkte einer geraden Linie ſind, und AB, BC, AC durch ein Stück DE dieſer Linie gemessen, beziehlich die Quotienten α, β, γ geben, wobei jeder Quotient poſitiv oder negativ genommen ist, je nachdem die gemessene Linie mit der messenden (DE) gleich oder entgegengeſetzt ist, ſo ist allemal

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

Hosted by Google

was man auch, der Kürze wegen, schreiben kann

$$AB + BC = AC.$$

220. Mehrere Strecken (von gegebener Richtung und Länge) addirt man, indem man sie, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, d. h. sie so legt, dass wo die eine aufhört, die nächst folgende anfängt, dann ist die gerade Linie vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkte der letzten der gesuchten Summe gleich lang und gleichgerichtet.

Beweis. Erstens für 2 Strecken a und b. Es sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

also (nach 6)

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + (\alpha_3 + \beta_3)e_3.$$

Ferner sei $E + a = A$, $E + b = B$, $E + (a + b) = C$, so ist (nach 216) die gerade Linie EA mit a gleich lang und gleichgerichtet, EB mit b, EC mit $a + b$. Endlich sei FG mit EA gleich lang und gleichgerichtet und GH mit EB, so ist zu beweisen, dass FH mit EC gleich lang und gleichgerichtet sei. Da FG mit EA gleich lang und gleichgerichtet ist, so gilt dies (nach 218) auch für ihre Projektionen; nach 217 sind aber die Projektionen von EA gleich und gleichgerichtet mit $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$, somit gilt dies auch von den Projektionen von FG; aus gleichem Grunde sind die Projektionen von GH gleich lang und gleichgerichtet mit $\beta_1 e_1$, $\beta_2 e_2$, $\beta_3 e_3$. Es seien nun F_1, G_1, H_1 die Projektionen von F, G, H auf die von E ausgehende mit e_1 gleichgerichtete Axe, so ist also F_1G_1 mit $\alpha_1 e_1$ gleich lang und gleichgerichtet, G_1H_1 mit $\beta_1 e_1$, d. h. F_1G_1 und G_1H_1 liefern, durch e_1 gemessen, die Quotienten α_1 und β_1, somit liefert (nach 119), da F_1, G_1, H_1 in Einer geraden Linie liegen, F_1H_1, durch e_1 gemessen, den Quotienten $\alpha_1 + \beta_1$, d. h. F_1H_1 ist mit $(\alpha_1 + \beta_1)e_1$ gleich lang und gleichgerichtet. F_1H_1 ist aber die Projektion von FH auf die durch E in der Richtung von e_1 gelegte Axe. Wendet man dieselbe Schlussfolge auch auf die übrigen Axen an, so ergiebt sich, dass die Projektionen von FH gleich lang und gleichgerichtet sind mit $(\alpha_1 + \beta_1)e_1$, $(\alpha_2 + \beta_2)e_2$, $(\alpha_3 + \beta_3)e_3$, d. h. mit den

Hosted by Google

Projektionen von EC, ſomit ist (nach 118) FH mit EC gleich lang und gleichgerichtet, d. h. mit a + b, was zu beweiſen war.

Zweitens. Hat man nun mehrere Strecken a, b, c u. ſ. w., und ist a mit FG, b mit GH, c mit HI, ···· u. ſ. w. gleich lang und gleichgerichtet, ſo ist nach dem ersten Theil des Beweiſes a + b mit FH gleich lang und gleichgerichtet, alſo auch wieder, da a + b mit FH, und c mit HI gleich lang und gleichgerichtet ist, a + b + c mit FI, u. ſ. w.

221. Das Produkt einer Strecke a mit einer Zahl α ist wieder eine Strecke (b), welche mit der ersteren (a) gleich oder entgegengeſetzt gerichtet ist, je nachdem die Zahl α poſitiv oder negativ ist, und deren Länge ſich zu der von a, wie α zu 1 verhält.

Beweis. Es ſeien E, e_1, e_2 e_3 als Einheiten genommen, und ſei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \text{ ſo ist}$$
$$b = \alpha a = \alpha(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)$$
$$= \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3.$$

Der letzte Ausdruck bedeutet aber (nach 216) eine Strecke, welche gleiche Länge und Richtung hat mit der von E nach dem Punkte $B = E + \alpha\alpha_1 e_1 + \alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$ gezogenen geraden Linie EB. Die Projektionen dieſer Linie auf die 3 von E ausgehenden mit e_1, e_2, e_3 parallelen Axen ſind (nach 217) $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2 + \alpha\alpha_3 e_3$. Ebenſo ist $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ eine Strecke, die gleiche Länge und Richtung mit der von E nach dem Punkte $A = E + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ gezogenen Linie hat, und $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ ſind die Projektionen von EA auf die genannten 3 Axen. Ist nun zuerst α poſitiv, ſo ſind $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$ beziehlich mit $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ gleichgerichtet, und verhalten ſich zu ihnen wie $\alpha : 1$, alſo gilt dasſelbe (nach 218) auch für die projicirten Linien, d. h. EB ist mit EA gleichgerichtet, und ſeine Länge verhält ſich zu der von EA, wie $\alpha : 1$; da nun b mit EB und a mit EA gleiche Länge und Richtung hat, ſo ſind auch a und b einander gleichgerichtet, und verhalten ſich ihrer Länge nach, wie $1 : \alpha$.

Ist aber α negativ $= -\beta$, ſo ſind $\alpha\alpha_1 e_1$, $\alpha\alpha_2 e_2$, $\alpha\alpha_3 e_3$, d. h. $-\beta\alpha_1 e_1$, $-\beta\alpha_2 e_2$, $-\beta\alpha_3 e_3$, die Projektionen von EB,

Hosted by Google

und ſind (nach 216) denen von EA, nämlich $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, $\alpha_3 e_3$ entgegengeſetzt gerichtet, ſomit ſind die von BE, nämlich $\beta\alpha_1 e_1$, $\beta\alpha_2 e_2$, $\beta\alpha_3 e_3$, mit denen von EA gleichgerichtet, und ihre Längen verhalten ſich, wie $\beta : 1$, alſo ſind auch BE und EA gleichgerichtet, und verhalten ſich, wie $\beta : 1$, alſo ſind EB und EA und ebenſo alſo auch b und a einander entgegengeſetzt gerichtet, während ihre Längen ſich noch wie $1 : \beta$ verhalten.

222. Die Summe $\alpha A + \beta B + \cdots$, in welcher A, B, $\cdots$ Punkte, α, β, $\cdots$ Zahlen ſind, iſt eine Strecke oder ein vielfacher Punkt, je nachdem $\alpha + \beta + \cdots$ gleich oder ungleich Null iſt; und zwar iſt im erſten Falle

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots,$$

im zweiten

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)S,$$

wo $$S - R = \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots},$$

und R ein beliebiger Punkt iſt.

Beweis. Es iſt

$$A = R + A - R, \quad B = R + B - R.$$

Setzt man dieſe Werthe in den Ausdruck $\alpha A + \beta B + \cdots$ ein, ſo erhält man

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots)R + \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots.$$

Alſo erſtens, wenn $\alpha + \beta + \cdots = 0$ iſt,

$$= \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots.$$

Iſt hingegen $\alpha + \beta + \cdots$ von Null verſchieden, etwa gleich σ, ſo wird

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta B + \cdots &= \sigma R + \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots \\ &= \sigma\left(R + \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma}\right) \\ &= \sigma S, \end{aligned}$$

wenn $$S = R + \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma},$$

d. h. $$S - R = \frac{\alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots}{\sigma}$$

geſetzt iſt.

Zuſatz. Wenn A und B Punkte ſind, ſo iſt $A - B$ die

Hosted by Google

Strecke, welche mit der geraden Linie BA gleich lang und gleichgerichtet ist.

Beweis. Nach 218 ist A — E eine Strecke, welche gleich lang und gleichgerichtet ist mit der geraden Linie EA und B — E eine mit EB gleich lange und gleichgerichtete Strecke; nun ist

$$A-B=(A-E)-(B-E), \text{ alſo}$$
$$=(A-E)+(E-B)=(E-B)+(A-E).$$

Da nun E — B und A — E Strecken ſind, die mit BE und EA beziehlich gleich lang und gleichgerichtet ſind, ſo ist ihre Summe (nach 220) mit BA gleich lang und gleichgerichtet, d. h. A — B mit BA.

Anm. Hierdurch ſind alſo die Strecken auf Differenzen von Punkten zurückgeführt, und ihre durch stetiges Aneinanderlegen gebildete Summe stellt ſich als eine Summe ſolcher Differenzen dar, in denen ſich der Endpunkt jeder Strecke mit dem Anfangspunkte der nächst folgenden aufhebt.

223. Wenn man von einem beweglichen Punkte (R) nach einer Reihe fester Punkte (A, B, ···) gerade Linien zieht, und dieſe, nach konstanten Verhältnissen ($1:\alpha$, $1:\beta$, ···) ändert (ſo dass dadurch die Linien RA′, RB′, ··· hervorgehen, welche mit RA, RB, ··· beziehlich gleich oder entgegengeſetzt gerichtet ſind, je nachdem α, β, ·· poſitiv oder negativ ſind, und ſich ihrer Länge nach zu RA, RB, ··· verhalten wie die Zahlen α, β, ·· zur Einheit), und dann die ſo erhaltenen Linien (RA′, RB′, ···), ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig aneinander legt, ſo hat die Linie (RP) vom Anfangspunkt (R) der ersten zum Endpunkt (P) der letzten folgende Eigenschaft,

1) wenn die Summe der Verhältnisszahlen (α, β, ··) null ist, ſo ist dieſe Linie [RP] von konstanter Länge und Richtung,

2) wenn die Summe der Verhältnisszahlen ungleich null ist, ſo geht dieſe Linie (RP) durch einen festen Punkt (S), welcher von dieſer Linie (RP) den ſo vielten Theil abschneidet, als jene Summe ($\alpha+\beta+\cdots$) beträgt.

Beweis. Der Satz ist nur ein anderer Wortausdruck von 222.

Anm. Der Punkt S ist bekanntlich der Schwerpunkt zwischen den Punkten A, B, ···, wenn deren Gewichte ſich wie $\alpha:\beta:\cdots\cdots$ verhalten; hier wird er naturgemäss den Namen Summenpunkt führen.

Hosted by Google

224. Der Summenpunkt S der Summe $\alpha A + \beta B + \cdots$, in welcher $\alpha + \beta + \cdots \gtrless 0$ ist, hat die Eigenschaft, dass

$$\alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots = 0$$

ist; und kein zweiter Punkt befitzt diefe Eigenschaft.

Beweis. Denn fetzt man in 222b. den Punkt $R = S$, fo wird

$$S - S = \frac{\alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots},$$

d. h. $$0 = \alpha(A - S) + \beta(B - S) + \cdots.$$

Soll diefe Gleichung noch für einen zweiten Punkt R gelten, alfo

$$0 = \alpha(A - R) + \beta(B - R) + \cdots$$

fein, fo erhält man durch Subtraktion

$$0 = \alpha(R - S) + \beta(R - S) + \cdots$$
$$= (\alpha + \beta + \cdots)(R - S),$$

alfo, da $\alpha + \beta + \cdots$ (nach Hyp.) ungleich null ist,

$$0 = R - S,$$

alfo $R = S$, d. h. es giebt keinen zweiten von S verschiedenen Punkt, der jene Eigenschaft hat.

225. Die Summe zweier einfachen Punkte ist gleich ihrer doppelten Mitte, und die Summe zweier vielfachen Punkte ist, wenn die Koefficienten gleich bezeichnet find, ein vielfacher Punkt, dessen Koefficient die Summe der Koefficienten der Summanden ist, und dessen Ort zwischen den Orten der Summanden fo liegt, dass er von ihnen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Koefficienten absteht, hingegen wenn die Koefficienten entgegengefetzt bezeichnet und numerisch nicht gleich find, ein vielfacher Punkt, dessen Koefficient die algebraische Summe der Koefficienten der Summanden ist, und dessen Ort in der Verlängerung der geraden Linie, welche die Orte der Summanden verbindet, fo liegt, dass er von diefen Orten im umgekehrten Verhältnisse ihrer Koefficienten absteht.

Beweis liegt unmittelbar in 222.

226. Die Summe eines einfachen Punktes und einer Strecke ist der Endpunkt der geraden Linie, welche diefer Strecke gleich lang und gleichgerichtet ist, und deren Anfangspunkt der gegebene Punkt ist.

Hosted by Google

Beweis. Es ſei die gerade Linie AB gleich lang und gleichgerichtet mit der Strecke p, ſo ist (nach 222 Zuſ.)

$$B - A = p.$$

Alſo $$A + p = A + B - A = B.$$

227. Die Summe eines α-fachen Punktes (αA) und einer Strecke (p) ist der α-fache Endpunkt einer geraden Linie (AB), deren α-faches mit dieſer Strecke (p) gleich lang und gleichgerichtet und deren Anfangspunkt (A) der gegebene Punkt ist.

Beweis. $\alpha A + p = \alpha\left(A + \frac{p}{\alpha}\right)$, alſo wenn das α-fache von AB mit p gleich lang und gleichgerichtet ist, alſo AB mit $\frac{p}{\alpha}$, ſo ist

$$B - A = \frac{p}{\alpha},$$

und alſo $\alpha A + p = \alpha(A + B - A) = \alpha B$.

Anm. Die Addition der Punkte ist zuerst (1827) von Moebius in ſeinen barycentrischen Kalkül gelehrt worden. Die Addition der Strecken scheint zuerst von Bellavitis in mehreren Auffätzen (1835, 1837) der Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto veröffentlicht zu ſein. Ganz unabhängig davon ist die Bearbeitung meiner Ausdehnungslehre von 1844 (§. 24, §. 101—102), in welcher auch zuerst der Zuſammenhang zwischen beiden Additionen ans Licht gestellt ist. Es fehlt jedoch ſowohl in jenen Werken als auch in dieſem der Nachweis, dass es keine andere Addition der Punkte und Strecken giebt, als die hier angegebene, und dennoch erscheint dieſer Nachweis nothwendig, wenn jene Addition als eine wirkliche Addition jener Grössen, und nicht blos als eine abgekürzte Schreibart aufgefasst werden ſoll, wie letzteres Moebius will. Es ist daher zu zeigen, dass der allgemeine Begriff der Addition, wenn er ins Beſondere auf Punkte (oder auch auf Strecken von gegebener Länge und Richtung) angewandt werden ſoll, keine andere als die oben dargestellte Addition liefern kann. Zu dem Ende ist zunächst die allgemeine Bestimmung festzuhalten, dass keine Verknüpfung geometrischer Gegenstände als ſolche an einen bestimmten Ort im Raume gebunden ſein darf; oder, um dieſe Bestimmung rein mathematisch auszudrücken: „Alle Verknüpfungen räumlicher Grössen müssen von der Art ſein, dass jede Gleichung, welche zwischen einem Verein von Punkten statt findet, auch bestehen bleiben muss, wenn man statt dieſer Punkte die entsprechenden Punkte eines kongruenten Vereines ſetzt.“ Die Addition und Subtraktion ist nun dadurch bestimmt, dass erstens die 4 Grundformeln

Hosted by Google

1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = a + b + c$,
3) $a + b - b = a$,
4) $a - b + b = a$

gelten; und dass ausserdem die durch die Verknüpfung entstehenden Grössen in möglichst weitem Umfang von gleicher Gattung sein müssen, wie die verknüpften. Diese letztere Bestimmung muss noch individualisirt werden. Da nach der dritten Grundformel, auch wenn A und B Punkte sind,

$$A + B - B = A,$$

also ein Punkt, und nach der ersten und dritten

$$A + B - A = B,$$

also auch ein Punkt ist, so liegt die Annahme nahe, dass auch $A + B - C$ als Punkt zu setzen ist. Doch genügt es, diese Annahme nur für den Fall zu machen, dass C die Mitte zwischen A und B ist. Wir machen also, um der angeführten Bestimmung zu genügen, die Annahme, „dass wenn C die Mitte zwischen den Punkten A und B ist, allemal $A + B - C$ wieder ein Punkt sei.“ Hiermit sind die nothwendigen Annahmen erschöpft. Zunächst folgt aus dem Gelten der 4 Grundformeln das Gelten aller allgemeinen Additions- und Subtraktionsgesetze. Demnächst beweise ich, dass wenn der Punkt C die Mitte zwischen den Punkten A und B ist, $A + B - C = C$ sei. Es sei $A + B - C = X$ gesetzt, so kann X nicht von C verschieden sein. Denn angenommen, X wäre von C verschieden, so verlängere man XC um sich selbst bis Y, so dass $XC = CY$ wird. Dreht man nun die Figur, welche die Punkte A, B, C, X enthält, innerhalb einer Ebene, in welcher diese Figur liegt, um den Punkt C herum, bis sie einen Winkel von 180^0 beschrieben hat, so fällt nun A dahin, wo vorher B, B dahin, wo vorher A lag, und X fällt auf Y, d. h. der Verein A, B, C, X ist kongruent dem Vereine B, A, C, Y. Da nun nach der Annahme

$$A + B - C = X$$

war, so muss nach der obigen Bedingung, welcher alle geometrischen Verknüpfungen unterliegen, diese Gleichung auch noch bestehen bleiben, wenn man statt A, B, C, X beziehlich B, A, C, Y setzt, also

$$B + A - C = Y.$$

Also hat man

$$Y = B + A - C = A + B - C \text{ (nach Grundformel 1)}$$
$$= X \text{ (nach Annahme)},$$

also $Y = X$. Es entstand aber Y aus X dadurch, dass man XC um sich selbst verlängerte bis Y; soll also Y mit X zusammen fallen, so muss X in C fallen, d. h. es ist $X = C$, also $A + B - C = C$.

Bringt man in dieser Gleichung C auf die rechte Seite, so erhält man

$$A + B = 2C,$$

d. h. „die Summe zweier Punkte ist das Doppelte des in der Mitte

Hosted by Google

zwischen beiden liegenden Punktes.“ Es seien nun AB und CD zwei beliebige gerade Linien von gleicher Länge und Richtung, so ist das Viereck ABDC ein Parallelogramm. Die Diagonalen mögen sich in E schneiden. Da nun die Diagonalen eines Parallelogramms sich halbiren, so ist E sowohl die Mitte zwischen A und D, als auch zwischen B und C, d. h. es ist

$$A + D = 2E = B + C, \text{ also } A + D = B + C.$$

Bringt man in dieser letzten Gleichung D und B auf die andere Seite, so erhält man

$$A - B = C - D.$$

Umgekehrt, wenn diese letzte Gleichung gilt, so gilt auch die vorhergehende $A + D = B + C$, d. h. die Mitte zwischen A und D muss zugleich Mitte zwischen B und C sein, d. h. das Viereck ABDC muss ein Parallelogramm, also AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet sein. Daraus folgt der Satz: „Eine Differenz $A - B$ zweier Punkte ist einer Differenz $C - D$ zweier anderer Punkte dann und nur dann gleich, wenn AB und CD gleich lange und gleichgerichtete Linien sind.“ Nennt man der Kürze wegen die Differenz $A - B$ oder $-B + A$ eine Strecke, B ihren Anfangspunkt, A ihren Endpunkt, so folgt sogleich der Satz: „Strecken (von gegebener Richtung und Länge) addirt man, indem man sie (ohne ihre Richtung und Länge zu verändern) stetig, d. h. so aneinander legt, dass der Endpunkt einer jeden mit dem Anfangspunkte der nächstfolgenden zusammen fällt, dann ist die Strecke, welche den Anfangspunkt der ersten Strecke zu ihrem Anfangspunkt und den Endpunkt der letzten zu ihrem Endpunkte hat, die Summe, jener Strecken.“ Denn in der That, es sei z. B. die erste Strecke gleich $-A + B$, die zweite gleich $-B + C$, die dritte gleich $-C + D$, so ist die Summe $= -A + B - B + C - C + D = -A + D$, was zu beweisen war.

Für die Division einer Strecke durch eine ganze positive Zahl ist noch die Bestimmung zu machen, dass der Quotient wieder eine Strecke sei (wobei unter Strecke hier immer die Differenz zweier Punkte, also eine Strecke von gegebener Länge und Richtung verstanden ist). Dann folgt nach der bekannten Schlussweise, dass das Produkt einer Strecke in eine beliebige ganze oder gebrochene rationale oder irrationale Zahl a wieder eine Strecke ist, welche der gegebenen gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem a positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der Länge der gegebenen Linie wie a zu 1 verhält. Hierdurch löst sich dann die allgemeine Aufgabe, die Summe $aA + bB + \cdots$ zu finden, wo a, b, $\cdots$ Zahlgrössen, A, B, $\cdots$ Punkte sind. Nämlich für jeden beliebigen Punkt R ist

$$aA + bB + \cdots = (a + b + \cdots)R + a(A - R) + b(B - R) + \cdots.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $a + b + \cdots$ null ist, oder nicht. Im ersteren Falle wird

Hosted by Google

$$aA + bB + \cdots = a(A - R) + b(B - R) + \cdots,$$

alſo gleich einer Strecke, welche nach dem Obigen konſtruirbar iſt. Zweitens wenn $a + b + \cdots = s \gtrless 0$ iſt, ſo wird

$$aA + bB + \cdots = sR + a(A - R) + b(B - R) + \cdots.$$

Hier iſt $a(A - R) + b(B R) + \cdots$ eine Strecke; der s-te Theil dieſer Strecke ſei ſo gelegt, dass R ſein Anfangspunkt iſt; dann ſei ſein Endpunkt mit S bezeichnet, ſo iſt

$$a(A - R) + b(B - R) + \cdots = s(S - R).$$

Dieſer Werth in die obige Gleichung eingeſetzt, giebt

$$\begin{aligned} aA + bB + \cdots &= sR + s(S - R) \\ &= s(R + S - R) \\ &= sS, \end{aligned}$$

wodurch die Aufgabe vollſtändig gelöst, und der Begriff der Addition einfacher und vielfacher Punkte und Strecken vollkommen bestimmt iſt, und zwar in Harmonie mit den im Haupttexte gegebenen Bestimmungen.

§. 2. Räumliche Gebiete.

228. Erklärung. Unter einem unendlich entfernten Punkte ſeien die Richtungen einer geraden Linie, unter einer unendlich entfernten geraden Linie die ſämmtlichen Richtungen einer Ebene, unter einer unendlich entfernten Ebene die ſämmtlichen Richtungen des Raumes verſtanden, d. h. es ſei von zwei parallelen geraden Linien geſagt, dass ſie einen unendlich entfernten Punkt gemein haben, von zwei parallelen Ebenen, dass ſie eine unendlich entfernte gerade Linie gemein haben, und von allen unendlich entfernten Punkten und geraden Linien, dass ſie in einer unendlich entfernten Ebene liegen.

Um die räumlichen Grössen erſter Stufe, d. h. die einfachen oder vielfachen Punkte und die Strecken (von gegebener Länge und Richtung) auf gleiche Weiſe behandeln zu können, will ich ſagen, der Ort einer Strecke ſei der unendlich entfernte Punkt, welchen die dieſer Strecke parallelen Linien gemein haben, oder auch, es ſei jene Strecke eine Grösse erſter Stufe, welche in dieſen Linien in unendlicher Entfernung liege. Auch will ich der Einfachheit wegen, um den Ausdruck räumliche Grössen erſter Stufe durch einen einfacheren zu erſetzen, ſowohl die einfachen und vielfachen

Hosted by Google

Punkte als auch die Strecken kurzweg Punkte nennen, und zwar die letzteren unendlich entfernte.

Anm. Zum Wefen der räumlichen Grössen, wie der Grössen überhaupt, gehört ein bestimmter metrischer Werth, vermöge dessen fie (in bestimmten Verhältnissen) vermehrt oder vermindert werden können. Diefer wird bei den einfachen und vielfachen Punkten durch den Zahlkoefficienten dargestellt, bei den Strecken durch ihre Länge. Es würde an fich noch möglich fein, unendlich entfernte Punkte anzunehmen, deren metrischer Werth nicht durch die Länge einer Strecke, fondern durch einen Zahlkoefficienten dargestellt wäre, d. h. welche aus dem vielfachen Punkte αA dadurch hervorginge, dass man, ohne α zu ändern, den Punkt A ins Unendliche verlegte. Allein was dadurch hervorginge, würde, wie man leicht fieht, ganz den Charakter des Unendlichen an fich tragen, infofern es durch Hinzufügung einer endlichen Grösse (eines endlich entfernten Punktes, oder auch einer Strecke) gar nicht verändert würde. Mit folchem Unendlichen darf aber überhaupt gar nicht gerechnet werden, weil kein algebraisches Gefetz für das Unendliche gilt, und die Analyfis des Unendlichen überhaupt nur dann zu richtigen Refultaten führen kann, wenn man das Falsche, was man durch Annahme des Unendlichen hineingebracht hat, noch vor der Ableitung irgend eines Refultates wieder herausschafft. Die Strecke dagegen, obgleich man fich der Bequemlichkeit wegen den Ausdruck gestatten darf, dass ihr Ort unendlich entfernt fei, ist doch eine endliche Grösse, indem fie durch Hinzufügung jeder von Null verschiedenen Grösse fich ändert.

229. Alle Strecken des Raumes lassen fich aus beliebigen 3 Strecken, welche nicht Einer Ebene parallel find, numerisch ableiten.

Beweis. Es feien a, b, c dr Strecken, welche nicht einer Ebene parallel find, und e eine beliebige Strecke, von der gezeigt werden foll, dass fie aus a, b, c numerisch ableitbar ist. Man ziehe von einem beliebigen Punkte D die mit a, b, c, e, gleich langen und gleichgerichteten Linien DA, DB, DC, DE, fo ist (nach 222 Zuf.) $A - D = a$, $B - D = b$, $C - D = c$, $E - D = e$. Ferner ziehe man durch E die Parallele mit DC, welche die Ebene ABD in F treffe, durch F die Parallele mit DB, welche DA in G treffe, fo ist $DG \parallel DA$, $GF \parallel DB$, $FE \parallel DC$. Es möge fich $DG : DA = \alpha : 1$, $GF : DB = \beta : 1$, $FE : DC = \gamma : 1$ algebraisch (d. h. auch dem Vorzeichen nach) verhalten, fo ist (nach 221)

Hosted by Google

$$G - D = \alpha(A - D) = \alpha a,$$
$$F - G = \beta(B - D) = \beta b,$$
$$E - F = \gamma(C - D) = \gamma c.$$

Alſo addirt

$$E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c, \text{ d. h. } e = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

230. Alle Strecken einer Ebene laſſen ſich aus beliebigen 2 einander nicht parallelen Strecken der Ebene numerisch ableiten.

Beweis. Es ſeien a, b zwei nicht parallele Strecken einer Ebene und d eine beliebige Strecke der Ebene, von der gezeigt werden ſoll, daſs ſie aus a und b numerisch ableitbar ist. Man ziehe von einem beliebigen Punkte C der Ebene die mit a, b, d gleich langen und gleichgerichteten Linien CA, CB, CD, ziehe durch D eine Parallele mit CB, welche CA in E treffen, ſo ist $CE \| CA$, $ED \| CB$ Es verhalte ſich algebraisch $CE : CA = \alpha : 1$, $ED : CB = \beta : 1$, ſo ist nach

$$E - C = \alpha(A - C) = \alpha a,$$
$$D - E = \beta(B - C) = \beta b,$$

alſo

$$D - C = \alpha a + \beta b, \text{ d. h. } d = \alpha a + \beta b.$$

231. Wenn zwiſchen 3 Strecken eine Zahlbeziehung herrſcht, ſo ſind ſie Einer Ebene parallel.

Beweis. Es ſeien a, b, c die 3 Strecken und

$$c = \alpha a + \beta b$$

ihre Zahlbeziehung. Sollten a und b parallel ſein, ſo würde auch c ihnen parallel ſein, und es alſo unendlich viele Ebenen geben, mit welchen a, b, c zugleich parallel ſind. Ist a nicht parallel b, ſo ziehe man von einem beliebigen Punkte D eine Linie DA, welche mit a parallel ist und ſich zu a verhält wie $\alpha : 1$, und von A eine Linie AB, welche mit b parallel ist und ſich zu b verhält wie $\beta : 1$, ſo ist

$$A - D = \alpha a,$$
$$B - A = \beta b.$$

Alſo addirt

$$B - D = \alpha a + \beta b = c.$$

Folglich ist c eben ſo wie a und b der Ebene ABD parallel.

Hosted by Google

232. Alle Punkte des Raumes laſſen ſich numerisch ableiten aus beliebigen 4 Punkten, welche nicht in Einer Ebene liegen; ins Beſondere

a) aus einem endlich entfernten Punkte und drei nicht Einer Ebene parallelen Strecken,

b) aus 2 endlich entfernten, nicht zuſammenfallenden Punkten und 2 Strecken, welche nicht einer durch jene 2 Punkte gelegten Ebene parallel ſind,

c) aus 3 endlich entfernten Punkten, die nicht in Einer geraden Linie liegen und aus einer Strecke, die der durch die 3 Punkte gelegten Ebene nicht parallel iſt,

d) aus 4 endlich entfernten Punkten, die nicht in Einer Ebene liegen.

Beweis a. Es ſeien a, b, c drei nicht Einer Ebene parallele Strecken und $d' = \delta D$ ein endlich entfernter Punkt, D ſein Ort und $e' = \varepsilon E$ ein beliebiger endlich entfernter Punkt und E ſein Ort; und ſei zu zeigen, dass e' aus a, b, c, d' numerisch ableitbar ſei. Nach 229 iſt die Strecke E — D aus a, b, c numerisch ableitbar; es ſei

$$E - D = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

ſo iſt

$$E = D + \alpha a + \beta b + \gamma c, \text{ d. h. } \frac{e'}{\varepsilon} = \frac{d'}{\delta} + \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

alſo

$$e' = \frac{\varepsilon}{\delta} d' + \varepsilon\alpha a + \varepsilon\beta b + \varepsilon\gamma c,$$

d. h. e' aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. Iſt der abzuleitende Punkt ein unendlich entfernter, d. h. eine Strecke, ſo iſt dieſe (nach 229) ſchon aus a, b, c, alſo auch aus a, b, c, d' numerisch ableitbar ($= \alpha a + \beta b + \gamma c + 0d$).

b. Es ſeien a, b zwei Strecken, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ zwei endlich entfernte Punkte, C und D ihre Orte, und ſei vorausgeſetzt, dass ſich durch C und D keine mit a und b parallele Ebene legen laſſe. Man ſetze $C - D = c$, ſo ſind a, b, c 3 nicht Einer Ebene parallele Strecken, folglich jeder Punkt e' (nach Beweis a) aus a, b, c, d' numerisch ableitbar. Setzt man in den Ausdruck dieſer Ableitung ſtatt c ſeinen Werth

Hosted by Google

$C - D$, d. h. $\frac{c'}{\gamma} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a, b, c', d' numerisch abgeleitet ist.

c) Es sei a eine Strecke, $b' = \beta B$, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ 3 endlich entfernte Punkte, B, C, D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass a nicht mit der Ebene BCD parallel sei. Man setze $B - D = b$, so ist (nach Beweis b) jeder Punkt e' aus a, b, c', d' numerisch ableitber. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt b seinen Werth $B - D$, d. h. $\frac{b'}{\beta} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a, b', c', d' numerisch abgeleitet ist.

d) Es seien $a' = \alpha A$, $b' = \beta B$, $c' = \gamma C$, $d' = \delta D$ vier endlich entfernte Punkte, A, B, C, D ihre Orte, und sei vorausgesetzt, dass diese Punkte nicht in einer Ebene liegen. Man setzte $A - D = a$, so ist (nach Beweis c) jeder Punkt e' aus a, b', c', d' numerisch ableitbar. Setzt man in dem Ausdrucke dieser Ableitung statt a seinen Werth $\frac{a'}{\alpha} - \frac{d'}{\delta}$, so erhält man einen Ausdruck, durch welchen e' aus a', b', c', d' numerisch abgeleitet ist.

Anm. Das erste der 4 im Satze bezeichneten Ableitungssysteme ist, wenn die 3 Strecken gleich lang sind, das gewöhnliche Parallelkoordinatensystem, das letzte ist, wenn die Punkte einfach sind, das barycentrische von Möbius, wenn sie beliebig sind, das allgemeinste lineale Koordinatensystem, wie es von Plücker und anderen behandelt ist.

233. Alle Punkte der Ebene lassen sich aus beliebigen 3 nicht in gerader Linie liegenden Punkten derselben numerisch ableiten.

Beweis wie in 232.

234. Alle Punkte der geraden Linie lassen sich aus beliebigen zwei räumlich verschiedenen Punkten derselben numerisch ableiten.

Beweis wie in 232.

235. Wenn 3 Punkte in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so liegen sie in einer geraden Linie.

Hosted by Google

Beweis. Es seien a, b, c die 3 Punkte, und

$$a = \beta b + \gamma c$$

ihre Zahlbeziehung. Sind b und c unendlich entfernt, so ist (in 231) gezeigt, dass dann a, b, c drei Einer Ebene parallele Strecken sind, d. h. (nach 228) dass a, b, c unendlich entfernte Punkte sind, die in Einer unendlich entfernten Ebene liegen. Sind hingegen b und c nicht beide zugleich unendlich entfernt, so verbinde man sie durch die gerade Linie DE, und nehme D und E als zwei einfache, endlich entfernte Punkte dieser geraden Linie an. Dann sind (nach 234) b und c, da sie in der durch D und E gelegten geraden Linie liegen, aus D und E numerisch ableitbar, also auch $a = \beta b + \gamma c$. Es sei $a = \delta D + \varepsilon E$. Ist nun $\delta + \varepsilon = 0$, also $\varepsilon = -\delta$, so ist $a = \delta(D - E)$. Aber $\delta(D - E)$ ist eine mit DE parallele Strecke, d. h. ein unendlich entfernter Punkt der Linie DE, also liegen dann a, b, c in DE. Ist aber $\delta + \varepsilon = \sigma$, von Null verschieden, so ist

$$a = \delta D + \varepsilon E = \sigma D + \varepsilon(E - D),$$

d. h. $a = \sigma A$, wo $A = D + \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D)$ ist, d. h. $D - A = \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D)$. Also ist $D - A$ mit $E - D$ parallel, d. h. A ein Punkt der Linie DE, also auch in diesem Falle b, c, d in einer geraden Linie.

Anm. Der letzte Theil des Beweises thut nur dar, dass der Schwerpunkt zweier Punkte mit beliebigen Gewichten in der diese Punkte verbindenden geraden Linie liegt.

236. Wenn 4 Punkte in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so liegen sie in Einer Ebene.

Beweis. Es seien a, b, c, d 4 Punkte und

$$a = \beta b + \gamma c + \delta d$$

die Zahlbeziehung. Sind zuerst b, c, d alle drei zugleich unendlich entfernt, so ist zu zeigen, dass a in der unendlich entfernten Ebene liegt, d. h. auch unendlich entfernt, d. h. eine Strecke sei. Dies folgt aus 228, da dann b, c, d also auch ihre Vielfachen Strecken sind, und somit auch (nach 220) ihre Summe. Sind b, c, d nicht alle drei zugleich unendlich entfernt, so sei DEF die durch sie gelegte Ebene und D, E,

Hosted by Google

F drei einfache, endlich entfernte Punkte dieſer Ebene. Dann laſſen ſich (nach 233) b, c, d aus D, E, F numerisch ableiten, alſo auch $\beta b + \gamma c + \delta d$, d. h. a. Es ſei

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F.$$

Iſt zuerſt $\delta + \varepsilon + \zeta = 0$, ſo iſt

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F - (\delta + \varepsilon + \zeta) D = \varepsilon (E - D) + \zeta (F - D),$$

alſo a aus E — D und F — D numerisch ableitbar, d. h. (nach 231) die Strecken a, D — E und F — D ſind Einer Ebene parallel, folglich iſt a der Ebene DEF parallel, d. h. ein unendlich entfernter Punkt dieſer Ebene.

Iſt $\delta + \varepsilon + \zeta = \sigma$ ungleich null, ſo iſt

$$a = \delta D + \varepsilon E + \zeta F = \sigma D + \varepsilon (E - D) + \zeta (F - D)$$

$$= \sigma A, \text{ wenn } A = D + \frac{\varepsilon}{\sigma}(E - D) + \frac{\zeta}{\sigma}(F - D)$$

iſt, alſo iſt D — A (nach 231) mit der Ebene DEF parallel, d. h. A ein Punkt der Ebene DEF, alſo auch a ein Punkt dieſer Ebene.

237. Das räumliche Gebiet erſter Stufe iſt ein Punkt (als Ort betrachtet), das zweiter Stufe eine unbegränzte gerade Linie, das dritter Stufe eine unbegränzte Ebene, das vierter Stufe der unbegränzte Raum.

Beweis. Ein Gebiet n-ter Stufe iſt (nach 14) die Geſammtheit der Grössen, welche aus n Grössen numerisch ableitbar ſind, vorausgeſetzt, dass jene Grössen ſich nicht ſämmtlich aus weniger als n Grössen numerisch ableiten laſſen. Nun ſind (nach 232) alle Punkte des Raumes aus vier Grössen erſter Stufe numerisch ableitbar; nach 236 bilden die aus drei ſolcher Grössen ableitbaren Punkte eine Ebene, folglich laſſen ſich die Punkte des Raumes nicht aus weniger als 4 Grössen erſter Stufe ableiten. Alſo iſt der Raum ein Gebiet 4-ter Stufe. Ebenſo folgt aus 233 und aus 235, dass das Gebiet 3-ter Stufe eine Ebene, und aus 234 und daraus, dass aus einem Punkt nur örtlich identische Punkte ableitbar ſind, ſolgt, dass das Gebiet 2-ter Stufe eine gerade Linie, ſo wie das Gebiet erſter Stufe ein Punkt ſei.

238. Aufgabe. Die Ableitzahlen (Koordinaten), durch welche ein Punkt (p) aus 4 nicht in einer Ebene liegenden

Hosted by Google

Punkten (a, b, c, d) hervorgeht, auszudrücken durch die Ableitzahlen, durch welche derſelbe Punkt (p) aus 4 neuen Punkten a′, b′, c′, d′ ableitbar ist; vorausgeſetzt, dass dieſe 4 neuen Punkte durch die 4 alten ausgedrückt ſind.

Auflöſung. Es ſei

1) $a' = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$,
2) $b' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \delta' d$,
3) $c' = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c + \delta'' d$,
4) $d' = \alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d$,
5) $p = x' a + y' b + z' c + u' d$,
6) $p = x a' + y b' + z c' + u d'$.

Man ſetze in 6) für a′, b′, c′, d′, p die Werthe aus 1) bis 5) ſo erhält man, nach a, b, c, d geordnet,

7) $x' a + y' b + z' c + u' d$
$= (x a + y\alpha' + z\alpha'' + u\alpha''') a + (x\beta + y\beta' + z\beta'' + u\beta''') b \cdots$.

Da hier a, b, c, d nicht in einer Ebene liegen, ſo ſtehen ſie (nach 236) in keiner Zahlbeziehung zu einander. Folglich ſind (nach 29) in der gefundenen Gleichung die entſprechenden Koefficienten gleich, alſo

$$x' = x\alpha + y\alpha' + z\alpha'' + u\alpha'''$$
$$y' = x\beta + y\beta' + x\beta'' + u\beta'''$$
$$z' = x\gamma + y\gamma' + z\gamma'' + u\gamma'''$$
$$u' = x\delta + y\delta' + z\delta'' + u\delta'''$$

Anm. Dies ist die Auflöſung des allgemeinsten Problems der Koordinatenverwandlung.

§. 3. Kombinatorische Multiplikation der Punkte.

239. Erklärung. Das Parallelogramm, in welchem AB und BC zwei Seiten ſind, werde ich der Kürze wegen das Parallelogramm ABC nennen, und zwar werde ich, wenn es auf dieſe Weiſe benannt ist, AB ſeine erste Seite, BC ſeine zweite Seite nennen. Ferner alle Parallelogramme, deren erste Seite der Strecke a und deren zweite Seite der Strecke b gleich lang und gleichgerichtet ſind, werde ich die Parallelogramme ab nennen. Zwei Parallelogramme ABC und DEF, welche in parallelen Ebenen liegen, werde ich dann und nur dann als gleichbezeichnet betrachten, wenn man ſie durch

Hosted by Google

parallele Fortbewegung ihrer Ebenen und durch Bewegung der Parallelogramme innerhalb ihrer Ebenen in eine ſolche Lage bringen kann, dass, während AB und DE in derſelben geraden Linie nach derſelben Richtung hin liegen, C und F auf ein und derſelben Seite dieſer geraden Linie ſich befinden.

240. Erklärung. Den Spat (das Parallelepipedum), in welchem AB, BC, CD drei nicht in einer Ebene liegende Kanten ſind, werde ich der Kürze wegen den Spat (das Parallelepipedum) ABCD nennen, AB ſeine erste, BC ſeine zweite, CD ſeine dritte Kante. Und alle Spate (Parallelepipeda), deren erste Kante der Strecke a, deren zweite der Strecke b, und deren dritte Kante der Strecke c gleich lang und gleichgerichtet ſind, werde ich die Spate (Parallelepipeda) abc nennen. Zwei Spate ABCD und EFGH werde ich dann und nur dann als gleichbezeichnet betrachten, wenn man ſie in eine ſolche Lage bringen kann, dass, während ABC und EFG gleichbezeichnete Parallelogramm derſelben Ebene werden, D und H auf ein und derſelben Seite dieſer Ebene liegen.

Zuſatz. Die Spate (Parallelepipeda) abc, bca, cab ſind einander gleich (auch dem Zeichen nach).

241. Lehrſatz. Zwei Parallelogramme, deren erste und deren zweite Seiten gleich lang und gleichgerichtet ſind, ſind einander gleich (auch dem Zeichen nach), und liegen in parallelen*) Ebenen. Zwei Spate (Parallelepipeda), deren entſprechende (erste, zweite, dritte) Kanten gleich lang und gleichgerichtet ſind, ſind einander gleich (auch dem Zeichen nach); d. h. alle durch dasſelbe Symbol ab bezeichneten Parallelogramme und ebenſo alle durch dasſelbe Symbol abc bezeichneten Spate ſind einander gleich (auch dem Zeichen nach).

242. Erklärung. Von zwei Parallelogrammen, die in parallelen Ebenen liegen und ebenſo von zwei beliebigen Spaten (Parallelepipeda) ſage ich, dass ſie ſich wie 2 Zahlen α und β verhalten, wenn ſie einander gleich- oder entgegengeſetzt bezeichnet ſind, je nachdem α und β es ſind, und ſie ſich, abgeſehen vom Zeichen, wie α zu β verhalten (vgl. 221).

*) Zu den Parallelen iſt überall das Identiſche mit hinzugerechnet.

Hosted by Google

243. Lehnſatz. Zwei Parallelogramme ABC und ABD (von derſelben Grundſeite AB) ſind dann und nur dann gleich (auch dem Zeichen nach), wenn CD mit AB parallel ist.

244. Lehnſatz. Zwei Spate (Parallelepipeda) ABCD und ABCE (von derſelben Grundfläche ABC) ſind dann und nur dann gleich (auch dem Zeichen nach), wenn DE mit der Ebene ABC parallel ist.

Anm. Nach dieſen vorbereitenden Sätzen, welche aus der Geometrie entlehnt ſind, können wir nun den Begriff des kombinatorischen Produktes von Punkten aus dem allgemeinen Begriffe des kombinatorischen Produktes direkt ableiten.

245. Das kombinatorische Produkt zweier Punkte ist dann und nur dann null, wenn die beiden Punkte zuſammenfallen, das kombinatorische Produkt dreier Punkte, wenn ſie in gerader Linie liegen, das kombinatorische Produkt von vier Punkten, wenn ſie in einer Ebene liegen, das kombinatorische Produkt von fünf Punkten ist immer null.

Beweis. Nach 61 und 66 ist das kombinatorische Produkt zweier oder mehrerer Grössen dann und nur dann null, wenn ſie in einer Zahlbeziehung zu einander stehen; nach 221 stehen zwei Punkte dann und nur dann in einer Zahlbeziehung, wenn ſie zuſammenfallen, drei Punkte (nach 234 und 235), wenn ſie in einer geraden Linie liegen, vier Punkte (nach 233, 236), wenn ſie in einer Ebene liegen, und nach 232 stehen fünf Punkte stets in einer Zahlbeziehung. Alſo bewieſen.

246. Wenn A ein endlich entfernter Punkt, b, c, d unendlich entfernte Punkte, d. h. Strecken ſind, ſo folgt

aus $[Ab] = 0$, die Gleichung $b = 0$,
aus $[Abc] = 0$, die Gleichung $[bc] = 0$,
aus $[Abcd] = 0$, die Gleichung $[bcd] = 0$.

Beweis. Es ſei $[Abcd] = 0$. Angenommen nun, $[bcd]$ ſei ungleich null, ſo können (nach 61) b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Da aber $[Abcd] = 0$ ist, ſo muss zwischen A, b, c, d eine Zahlbeziehung herrschen, und da b, c, d in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, ſo müsste (nach 2) A aus b, c, d numerisch ableitbar ſein.

Hosted by Google

Aber aus den unendlich entfernten Punkten oder Strecken b, c, d gehen durch numerische Ableitung (nach 220) nur Strecken, d. h. Punkte der unendlich entfernten Ebene hervor, alfo nicht der endlich entfernte Punkt A. Somit ist die Annahme, dass [bcd] von null verschieden fei, mit der Vorausfetzung im Widerfpruch, d. h. [bcd] muss null fein. Ganz ebenfo ergeben fich die übrigen Theile des Satzes.

247. Ein kombinatorisches Produkt [AB] zweier einfachen Punkte A und B ist einem kombinatorischen Produkte [CD] zweier einfachen Punkte C und D dann und nur dann gleich, wenn die unendlichen geraden Linien AB und CD zufammenfallen, und AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet ist.

Beweis 1. Es feien die unendlichen geraden Linien AB und CD zufammenfallend, und AB mit CD gleich lang und gleichgerichtet, fo ist zu beweifen, dass $[AB] = [CD]$ fei. Da AB und CD gleich lang und gleichgerichtet find, fo ist (nach 222 Zuf.)

* $B - A = D - C.$

Ferner, da A, B, C in einer geraden Linie liegen (Hypothefis), fo find $B - A$ und $C - A$ Strecken einer und derfelben geraden Linie, ftehen alfo (nach 221) in einer Zahlbeziehung zu einander. Es fei

** $C - A = \alpha(B - A).$

Nun ist

$$\begin{aligned} [CD] &= [C(D - C)] && [67] \\ &= [C(B - A)] && [*] \\ &= [(A + C - A)(B - A)] \\ &= [(A + \alpha(B - A))(B - A)] && [**] \\ &= [A(B - A)] && [67] \\ &= [AB] && [67]. \end{aligned}$$

2. Es fei vorausgefetzt

$$[AB] = [CD],$$

fo ist zu beweifen, dass A, B, C, D in einer geraden Linie liegen und AB und CD gleich lang und gleichgerichtet find. Wenn $[AB] = [CD]$ ist, fo müssen (nach 76) C und D aus A und B durch lineale Umwandlung ableitbar fein. Die ein-

Hosted by Google

fache lineale Umwandlung zweier Grössen besteht (nach 71) darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches der andern addirt wird, also z. B. A und B sich verwandeln in A und $B + \alpha A$. Die so hervorgehende neue Grösse ist, also aus den beiden ursprünglichen Grössen numerisch abgeleitet, liegt also (nach 235) in der jene Grössen verbindenden geraden Linie, somit werden aus A und B durch fortgesetzte lineale Umwandlung nur Punkte der geraden Linie AB hervorgehen; somit liegen C und D in der geraden Linie AB. Nun sei E ein Punkt der geraden Linie AB von der Art, dass CE mit AB gleich lang und gleichgerichtet sei, so ist (nach Bew. 1)

$$[CE] = [AB],$$

und nach der Voraussetzung

$$[AB] = [CD],$$

also auch

$$[CE] = [CD]; \text{ folglich}$$
$$0 = [CD] - [CE] = [C(D - E)].$$

Somit (nach 246)

$$D - E = 0, \text{ d. h. } D = E.$$

Da nun nach der Annahme CE mit AB gleich lang und gleichgerichtet ist, so ist auch das mit CE identische CD mit AB gleich lang und gleichgerichtet.

248. Zusatz. Wenn A, B, C und D einfache Punkte sind, so folgt aus der Gleichung

$$[AB] = [CD],$$

die Gleichung

$$A - B = C - D,$$

aber nicht umgekehrt, aus dieser jene.

249. Erklärung. Wir nennen das Produkt [AB] einen Linientheil, und sagen, derselbe sei ein Theil der unbegränzten geraden Linie AB, und er sei mit der begränzten geraden Linie AB gleich lang und gleichgerichtet.

250. Zusatz. Zwei Linientheile werden also dann und nur dann gleichgesetzt, wenn sie gleich lang, gleichgerichtet und Theile derselben unbegränzten geraden Linie sind.

251. Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes in eine Strecke ist ein Linientheil, welcher in der durch

Hosted by Google

den Punkt parallel der Strecke gezogenen geraden Linie liegt, und der Strecke gleich lang und gleichgerichtet ist.

Beweis Es sei A ein einfacher Punkt und p eine Strecke. Man ziehe durch A eine gerade Linie AB, welche mit p gleich lang und gleichgerichtet ist, so ist (nach 222 Zus.)

$$p = B - A, \text{ also } [Ap] = [A(B - A)] = [AB] \quad [67]$$

und [AB] ist ein Linientheil, welcher in der geraden Linie AB, also in der durch A mit p parallel gezogenen geraden Linie liegt, und mit AB, also auch mit p, gleich lang und gleichgerichtet ist.

252. Das Produkt eines Linientheiles [AB] mit einer Zahl α ist ein Linientheil, welcher mit jenem in derselben unbegränzten geraden Linie liegt, und sich zu ihm algebraisch wie $\alpha : 1$ verhält.

Beweis. $\alpha[AB] = \alpha[A(B - A)]$, [67]

$= [A\alpha(B - A)]$. [40]

Das letztere Produkt ist (nach 251) ein Linientheil, welcher in der durch A mit $\alpha(B - A)$ parallel gezogenen geraden Linie, d. h. in der geraden Linie AB liegt, und welcher mit $\alpha(B - A)$ gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h. (nach 221) sich zu AB wie $\alpha : 1$ verhält.

253. Wenn A und B einfache Punkte, α und β Zahlen sind, so ist $[\alpha A \cdot \beta B]$ ein Linientheil, der in der unbegränzten geraden Linie AB liegt und sich zu der begränzten geraden Linie AB algebraisch $\alpha\beta$ zu 1 verhält.

Beweis. $[\alpha A \cdot \beta B] = \alpha\beta[AB]$ (nach 46), also (nach 252) ein Linientheil der unbegränzten geraden Linie AB, welcher sich zu der begränzten AB algebraisch wie $\alpha\beta : 1$ verhält.

254. Zwei von Null verschiedene kombinatorische Produkte [ab] und [cd] je zweier Strecken a und b, c und d, sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Parallelogramme ab und cd gleich an Inhalt und gleichbezeichnet sind und in parallelen Ebenen liegen.

Beweis. In 72 und 76 ist bewiesen, dass zwei kombinatorische Produkte [ab] und [cd] dann und nur dann einander gleich sind, wenn c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar sind; und zwar bestand die einfache lineale

Hosted by Google

Aenderung zweier Grössen (nach 71) darin, dass zu einer derfelben ein Vielfaches der andern addirt wurde, während diefe andere unverändert blieb, d. h. alfo, dass a und b, wenn α und β beliebige Zahlen find, entweder in a und $b + \alpha a$, oder in $a + \beta b$ und b übergingen. Nun fei AB mit a, BC mit b gleich lang und gleichgerichtet, und ändere fich b in $b' = b + \alpha a$, ferner fei CD parallel mit AB gezogen und verhalte fich zu AB algebraisch wie $\alpha : 1$, fo ist (nach 222) $B - A = a$, $C - B = b$, $D - C = \alpha a$. Alfo

$$D - B = D - C + C - B = \alpha a + b = b',$$

d. h. BD ist mit b' gleich lang und gleichgerichtet. Ferner da AB und CD parallel find, fo find (nach 243) die Parallelogramme ABC und ABD einander gleich (auch dem Zeichen nach), und liegen in einer Ebene. Alfo find auch die Parallelogramme ab und ab' gleichbezeichnet und in derfelben Ebene liegend. Dasfelbe gilt, wenn fich a und b in $a + \beta b$ und b ändern. Alfo ergiebt fich, dass, wenn aus a und b durch einfache lineale Aenderung c und d hervorgehen, auch die Parallelogramme ab und cd gleich (auch dem Zeichen nach) find und in parallelen Ebenen liegen. Dasfelbe gilt alfo auch, wenn c und d aus a und b durch mehrmalige Anwendung einer einfachen linearen Aenderung, d. h. durch eine beliebige lineale Aenderung hervorgehen. Somit ergiebt fich:

Erstens. Wenn $[ab] = [cd]$ ist, fo müssen c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar fein (76); und wenn c und d aus a und b durch lineale Aenderung ableitbar find, fo müssen die Parallelogramme ab und cd gleich (auch dem Zeichen nach) fein und in parallelen Ebenen liegen.

Zweitens. Wenn umgekehrt vorausgefetzt wird, dass ab und cd gleiche (auch gleichbezeichnete) Parallelogramme in parallelen Ebenen find, fo müssen, da a, b, c, d dann einer und derfelben Ebene parallel find, c und d (nach 230) aus a und b numerisch ableitbar fein, folglich stehen (nach 63) die kombinatorischen Produkte [ab] und [cd] in einer Zahlbeziehung zu einander.

Es fei $[cd] = \alpha[ab]$ der Ausdruck diefer Zahlbeziehung. Setzen wir $\alpha b = b'$, fo wird $[cd] = [a \cdot \alpha b] = [ab']$. Alfo find

Hosted by Google

(nach Beweis 1) die Parallelogramme cd und ab′ gleich und gleichbezeichnet, alſo da auch cd und ab nach der Vorausſetzung gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme ſind, ſo ſind auch ab und ab′ gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme. Nun ſei AB mit a, BC mit b, BD mit b′ gleich lang und gleichgerichtet, ſo iſt das Parallelogramm ABC eins der mit ab bezeichneten und ABD eins der mit ab′ bezeichneten Parallelogramme. Alſo ABC mit ABD gleich und gleichbezeichnet, folglich da ABC und ABD auch in einer Ebene liegen, ſo liegen (nach 243) C und D in einer mit AB parallelen Linie. Nun ſind BC und BD beide mit b parallel, alſo auch untereinander, alſo da ſie einen Punkt (B) gemein haben, ſo liegen ſie in einer geraden Linie, ſomit fallen C und D, da D auch in der durch C mit AB parallel gezogenen geraden Linie liegt, zuſammen, alſo ſind BC und BD identisch, alſo ſind b und b′, von denen das erſte mit BC, das zweite mit BD gleich lang und gleichgerichtet iſt, auch unter einander gleich lang und gleichgerichtet; folglich, da auch $\alpha b = b'$ geſetzt war, ſo iſt $\alpha = 1$. Nun war

$$[cd] = \alpha[ab]$$

geſetzt, alſo, da $\alpha = 1$ iſt,

$$[cd] = [ab].$$

255. Zwei von null verſchiedene kombinatoriſche Produkte [ABC] und [DEF] je dreier einfacher Punkte A, B, C und D, E, F ſind dann und nur dann einander gleich, wenn die Parallelogramme ABC und DEF gleich und gleichbezeichnet ſind und in einer und derſelben Ebene liegen.

Beweis 1. Es ſeien ABC und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme einer und derſelben Ebene, ſo iſt zu beweiſen, daſs $[ABC] = [DEF]$ ſei. Es ſeien AB mit a, BC mit b, DE mit c, EF mit d gleich lang und gleichgerichtet, d. h. $B - A = a$, $C - B = b$, $E - D = c$, $F - E = d$, * ſo iſt (nach 244)

$$** \quad [ab] = [cd].$$

Da ferner D in der Ebene ABC liegt, und ebenſo $B - A = a$ und $C - B = b$ Strecken dieſer Ebene ſind, ſo muss (nach 230) $D - A$ aus a und b numeriſch ableitbar ſein. Es ſei

Hosted by Google

*** $D - A = \alpha a + \beta b$,

fo ist

$$\begin{aligned}
[DEF] &= [DE(F - E)] = [D(E - D)(F - E)] && [67]\\
&= [Dcd] && [*]\\
&= [D(cd)] && [80]\\
&= [D(ab)] && [**]\\
&= [\alpha a + \beta b + A)ab] && [***, 80]\\
&= [Aab] && [67]\\
&= [A(a + A)(b + A)] && [67]\\
&= [ABC] && [*].
\end{aligned}$$

2. Es fei umgekehrt vorausgefetzt, dass

$$[ABC] = [DEF]$$

ist. Dann müssen (nach 76) D, E, F aus A, B, C durch lineale Aenderung, alfo auch numerisch ableitbar fein. Dann aber müssen (nach 236) D, E, F in der Ebene ABC liegen. Nun fei in der geraden Linie BC ein Punkt G von der Art angenommen, dass ABG und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme find, fo ist (nach Bew. 1), da ABG und DEF in ein und derfelben Ebene (ABC) liegen,

$$[ABG] = [DEF].$$

Aber auch nach der Vorausfetzung

$$[ABC] = [DEF].$$

Alfo $[ABG] = [ABC]$. Da nun G ein Punkt in BC ist, fo ist $G - B$ aus $C - B$ numerisch ableitbar, es fei $G - B = \alpha(C - B)$, alfo $G = B + \alpha(C - B)$, fo ist $[ABC] = [ABG] = [AB(B + \alpha(C - B))] = [AB\alpha(C - B)] = \alpha[ABC]$ [67, 40]. Alfo $\alpha = 1$. Somit, da $G - B = \alpha(C - B)$ war, $G - B = C - B$, d. h. $G = C$; oder die Punkte G und C fallen zufammen; alfo fallen auch die Parallelogramme ABG und ABC zufammen. Folglich, da ABG und DEF gleiche und gleichbezeichnete Parallelogramme derfelben Ebene find, fo gilt dies auch von ABC und DEF.

256. Zufatz. Wenn A, B, C, D, E, F einfache Punkte find, fo folgt aus der Gleichung

$$[ABC] = [DEF]$$

auch die Gleichung

$$[(B - A)(C - B)] = [(E - D)(F - E)];$$

hingegen umgekehrt, aus letzterer die erstere nur dann, wenn

Hosted by Google

noch die Bedingung hinzutritt, dass die Ebenen ABC und DEF nicht bloss parallel, fondern auch identisch find.

257. Erklärung. Wir nennen das Produkt [ABC] einen Flächentheil und den Flächeninhalt des Parallelogramms ABC feinen Inhalt, und fagen, der Flächentheil ABC liege in der Ebene ABC.

Anm. Die genauere Benennung für das Produkt [ABC] würde Ebenentheil ſtatt Flächentheil ſein. Allein der erstere Ausdruck ist wegen des Gleichklangs ſeines Plurals „die Ebenentheile“ mit dem Ausdrucke „die ebenen Theile“ zu verwerfen.

258. Zuſatz. Zwei Flächentheile ſind dann und nur dann einander gleich, wenn ſie in derſelben Ebene liegen, und ihre Inhalte gleich und gleichbezeichnet ſind.

Anm. Man hätte als Inhalt des Flächentheiles [ABC] auch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ſetzen können. Aber es wird ſich in der Folge zeigen, dass dann der Inhalt des inneren Quadrates einer Strecke nur die Hälfte von dem Inhalte des Quadrates dieſer Strecke ſein würde, während beides bei unſerer Benennung in Uebereinstimmung ist.

259. Das kombinatorische Produkt zweier einfacher Punkte A, B und einer Strecke c ist ein Flächentheil, welcher in der durch AB mit c parallel gelegten Ebene liegt, und dessen Inhalt gleich dem eines Parallelogrammes ABC ist, in welchem BC mit c gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h. $[ABc] = [ABC]$, wenn $c = C - B$.

Beweis. $[ABc] = [AB(C - B)] = [ABC]$ [67].

260. Das kombinatorische Produkt eines einfachen Punktes A mit 2 Strecken b und c ist ein Flächentheil, welcher in der durch A mit b und c parallel gelegten Ebene liegt, und zum Inhalt den Flächeninhalt eines Parallelogrammes (ABC) hat, dessen erste Seite (AB) mit b, und dessen zweite Seite (BC) mit c gleich lang und gleichgerichtet ist, d. h.

$[Abc] = [ABC]$, wenn $b = B - A$, $c = C - B$ ist.

Beweis.

$$[Abc] = [A(B - A)(C - B)] = [AB(C - B)] \quad [67]$$
$$= [ABC] \quad [67].$$

261 a. Das Produkt $\alpha[ABC]$ eines Flächentheils [ABC] mit einer Zahl α ist ein Flächentheil derſelben Ebene, dessen Inhalt ſich zu dem von ABC wie $\alpha : 1$ verhält.

Hosted by Google

Beweis. $\alpha[ABC] = \alpha[AB(C - B)]$ [67]
$= [AB \cdot \alpha(C - B)]$ [46]
$= [AB(D - B)]$,
wenn BD mit BC parallel ist, und sich zu ihm, wie $\alpha : 1$ verhält. Dies ist wieder (nach 67)
$= [ABD]$,
d. h. gleich einem Flächentheil derselben Ebene (ABC), dessen Inhalt dem Flächeninhalte des Parallelogramms ABD gleich ist. Da aber BD und BC parallel sind und sich algebraisch wie $\alpha : 1$ verhalten, so verhalten sich auch die Parallelogramme ABD und ABC wie $\alpha : 1$, d. h. die Inhalte von $\alpha[ABC]$ und $[ABC]$ wie $\alpha : 1$.

261 b. Wenn A, B, C einfache Punkte, und α, β, γ Zahlen sind, so ist $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C]$ ein Flächentheil der Ebene ABC, dessen Inhalt zu dem des Parallelogramms ABC sich algebraisch wie $\alpha\beta\gamma : 1$ verhält.

Beweis. $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C] = \alpha\beta\gamma[ABC]$ (No. 46), also nach 261 bewiesen.

262. Zwei von null verschiedene kombinatorische Produkte [abc] und [def] je dreier Strecken a, b, c und d, e, f sind dann und nur dann einander gleich, wenn die Spate (Parallelepipeda) abc und def gleich und gleichbezeichnet sind.

Beweis 1. Es sei vorausgesetzt, dass
$[abc] = [def]$
sei, so ist zu zeigen, dass die Spate abc und def gleich und gleichbezeichnet sind. Da $[abc] = [def]$ ist, so müssen (nach 76) d, e, f aus a, b, c durch lineale Aenderung hervorgehen. Nun können wir zeigen, dass durch einfache lineale Aenderung der 3 Seiten a, b, c eines Spates abc stets ein gleicher und gleichbezeichneter Spat hervorgehe. Die einfache lineale Aenderung der 3 Grössen a, b, c besteht (nach 71) darin, dass zu einer derselben ein Vielfaches von einer der beiden andern hinzuaddirt wird, während diese beiden andern ungeändert bleiben. Es möge zuerst zu der dritten c ein Vielfaches von irgend einer der beiden andern, z. B. von a hinzutreten, also a, b, c sich ändern in a, b, c′, wo $c' = c + \alpha a$

Hosted by Google

ist. Dann seien AB, BC, CD, DE beziehlich gleich lang und gleichgerichtet mit a, b, c, αa, d. h.

$$B - A = a,\ C - B = b,\ D - C = c,\ E - D = \alpha a,$$

so ist

$$E - C = E - D + D - C = \alpha a + c = c',$$

also CE mit c′ gleich lang und gleichgerichtet. Ferner da DE mit a, also auch mit AB parallel, und folglich auch mit der Ebene ABC ist, so sind (nach 244) die Spate ABCD und ABCE gleich und gleichbezeichnet, d. h. die Spate abc und abc′, d. h. der Spat abc bleibt gleich und gleichbezeichnet, wenn zu der dritten Seite ein Vielfaches von einer der beiden andern hinzuaddirt wird. Nun ist ferner (nach 240 Zus.) abc $=$ bca $=$ cab, und ebenso abc′ $=$ bc′a $=$ c′ab. Also auch da abc $=$ abc′ war, bca $=$ bc′a und cab $=$ c′ab, d. h. ein Spat bleibt gleich und gleichbezeichnet, wenn die zweite Kante, und ebenso wenn die erste Kante sich dadurch ändert, dass zu ihr ein Vielfaches von einer der beiden andern Kanten hinzuaddirt wird. Somit bleibt überhaupt ein Spat bei fortgesetzt wiederholter einfacher linealer Aenderung seiner Kanten, d. h. bei beliebiger linealer Aenderung gleich und gleichbezeichnet. Also da nach dem Obigen d, e, f aus a, b, c durch lineale Aenderung ableitbar sind, so muss nun auch der Spat def mit abc gleich und gleichbezeichnet sein.

Beweis 2. Es sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die Spate def und abc gleich und gleichbezeichnet seien, so ist zu beweisen, dass [def] $=$ [abc] ist. Da angenommen ist, dass die kombinatorischen Produkte von null verschieden sind, so sind namentlich a, b, c nicht Einer Ebene parallel, also (nach 229) d, e, f aus ihnen numerisch ableitbar, also auch (nach 63) das Produkt [def] aus [abc] numerisch ableitbar. Es sei [def] $= \alpha$[abc], also wenn $\alpha c = c'$ gesetzt wird, [def] $=$ [abc′], folglich (nach Beweis 1) die Spate def und abc′ gleich; nun waren die Spate def und abc nach der Voraussetzung gleich. Also die Spate abc und abc′ gleich. Es seien AB, BC, CD, CD′ beziehlich gleich lang und gleichgerichtet mit a, b, c, c′. Also die Spate

$$ABCD = abc,\ ABCD' = abc', \text{ und somit}$$
$$ABCD = ABCD'.$$

Hosted by Google

Folglich liegen (nach 244) D und D′ in einer mit der Ebene ABC parallelen Ebene, D und D′ liegen aber auch in der geraden Linie CD, da CD mit c′, d. h. mit αc, alſo auch mit c, d. h. mit CD parallel ist. Folglich liegen D und D′ in dem Durchschnittspunkte jener Ebene und dieſer Geraden, d. h. fallen zuſammen. Alſo ſind CD und CD′ identisch, alſo $c = c'$, alſo, vermöge der Gleichung $c' = \alpha c$, $\alpha = 1$; ſomit verwandelt ſich die Gleichung $[def] = \alpha[abc]$ in

$$[def] = [abc].$$

263. Zwei von null verschiedene kombinatorische Produkte [ABCD] und [EFGH] von je vier einfachen Punkten A, B, C, D und E, F, G, H ſind dann und nur dann einander gleich, wenn die Spate (Parallelepipeda) ABCD und EFGH gleich (und gleichbezeichnet) ſind.

Beweis 1. Es ſeien ABCD und EFGH gleiche und gleichbezeichnete Spate, und ſeien AB, BC, CD, EF, FG, GH beziehlich mit b, c, d, f, g, h gleichlang und gleichgerichtet, d. h. $B - A = b$ u. ſ. w., ſo ist (nach 262)

$$* \quad [bcd] = [fgh].$$

Da ferner aus b, c, d (nach 229) alle Strecken des Raumes numerisch ableitbar ſind, ſo muss auch die Strecke $E - A$ es ſein; es ſei

$$E - A = \beta b + \gamma c + \delta d, \text{ d. h. } E = A + \beta b + \gamma c + \delta d.$$

Dann erhält man

$$[EFGH] = [EFG(H - G)] = [EF(G - F)(H - G)]$$
$$= [E(F - E)(G - F)(H - G)] \quad [67].$$

Alſo, da $F - E = f$, $G - F = g$, $H - G = h$ ist, ſo erhält man den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= [Efgh] = [E(fgh)] \quad [79]$$
$$= [E(bcd)] \quad [*]$$

Ferner ist der gefundene Ausdruck

$$= [Ebcd] \quad [79]$$
$$= [(A + \beta b + \gamma c + \delta d)bcd] = [Abcd] \quad [67]$$
$$= [A(B - A)(C - B)(D - C),$$

wenn wir statt b, c, d ihre Werthe ſetzen, und hieraus erhält man mit Anwendung von 67

$$= [AB(C - B)(D - C)] = [ABC(D - C)] = [ABCD].$$

Hosted by Google

Alſo

$$[EFGH] = [ABCD].$$

Beweis 2. Es ſei umgekehrt vorausgeſetzt, dass

$$[ABCD] = [EFGH]$$

ist, und ſei in der geraden Linie CD ein Punkt D′ angenommen von der Art, dass der Spat ABCD′ mit EFGH gleich (und gleichbezeichnet) ſei, ſo ist (nach Beweis 1)

$$[ABCD'] = [EFGH].$$

Alſo auch, da $[EFGH] = [ABCD]$ vorausgeſetzt ist,

$$[ABCD'] = [ABCD].$$

Da nun $D - C$ und $D' - C$ parallel ſind, ſo ist $D' - C$ aus $D - C$ numerisch ableitbar. Es ſei

$$D' - C = \alpha(D - C),$$

ſo ist

$$[ABCD] = [ABCD'] = [ABC(D' - C)] = [ABC\alpha(D - C)] = [ABC\alpha D] \quad [67]$$
$$= \alpha[ABCD] \quad [40].$$

Alſo, da $[ABCD]$ nicht null ist, $\alpha = 1$, alſo geht aus der Gleichung $(D' - C) = \alpha(D - C)$ die Gleichung

$$D' - C = D - C$$

hervor, alſo $D' = D$, d. h. D und D′ fallen zuſammen, folglich auch die Spate ABCD und ABCD′, und da das Spat ABCD′ gleich und gleichbezeichnet mit EFGH war, ſo ſind auch die Spate ABCD und EFGH gleich und gleichbezeichnet.

264. Zuſatz. Die Gleichungen

$$[ABCD] = [EFGH]$$

und

$$[(B - A)(C - B)(D - C)] = [(F - E)(G - F)(H - G)],$$

oder auch

$$[(B - A)(C - A)(D - A)] = [(F - E)(G - E)(H - E)]$$

ſind einander erſetzend, d. h. aus jeder von ihnen folgen die beiden andern.

Beweis. Die Gleichung

$$[ABCD] = [EFGH]$$

gilt (nach 263) dann und nur dann, wenn die Spate ABCD und EFGH einander gleich und gleichbezeichnet ſind. Ebenſo gilt (nach 262) die Gleichung

Hosted by Google

$$[(B-A)(C-B)(D-C)] = [(F-E)(G-F)(H-G)]$$

dann und nur dann, wenn das Spat, deſſen drei Kanten mit AB, BC, CD gleich lang und gleichgerichtet ſind, dem Spate, deſſen Kanten mit EF, FG, GH gleich lang und gleichgerichtet ſind, d. h. der Spat ABCD mit EFGH inhaltsgleich und gleichbezeichnet iſt. Folglich ſind beide Gleichungen ſtets in denſelben Fällen geltend. Endlich, die dritte Gleichung iſt nur eine Transformation der zweiten, denn

$$[(B-A)(C-B)(D-C)]$$
$$= [(B-A)(C-B)(D-C+C-B+B-A) \quad [67]$$
$$= [(B-A)(C-B)(D-A)] = [(B-A)(C-B+B-A)(D-A)] \quad [67]$$
$$= [(B-A)(C-A)(D-A)],$$

und aus gleichem Grunde iſt

$$[(F-E)(G-F)(H-G)] = [(F-E)(G-E)(H-E)].$$

Alſo ſind die zweite und dritte Gleichung gleichbedeutend.

265. Erklärung. Wir nennen das Produkt [ABCD] von vier einfachen Punkten einen Körpertheil und den Kubikinhalt des Spates ABCD (mit Beobachtung des Vorzeichens $(\mp)$) ſeinen Inhalt.

266. Das kombinatoriſche Produkt dreier einfacher Punkte A, B, C und einer Strecke d iſt ein Körpertheil, deſſen Inhalt gleich dem eines Spates ABCD iſt, in welchem CD mit d gleich lang und gleichgerichtet iſt, d. h.

$$[ABCd] = [ABCD], \text{ wenn } d = D - C.$$

Beweis. $[ABCd] = [ABC(D-C)] = [ABCD]$ [67].

267. Das kombinatoriſche Produkt zweier einfacher Punkte A, B und zweier Strecken c und d iſt dem Spate (Parallelepipedum) ABCD, in welchem BC mit c, CD mit d gleich lang und gleichgerichtet ſind, inhaltsgleich, d. h.

$$[ABcd] = [ABCD], \text{ wenn } c = C - B,\ d = D - C.$$

Beweis. $[ABcd]$
$= [AB(C-B)(D-C)] = [ABC(D-C)] = [ABCD]$ [67].

268. Das kombinatoriſche Produkt eines einfachen Punktes A und dreier Strecken b, c, d iſt dem Spate bcd inhaltsgleich, oder

Hosted by Google

$$[Abcd] = [ABCD],$$

wenn $b = B - A$, $c = C - B$, $d = D - C$.

Beweis.

$$[Abcd] = [A(B-A)(C-B)(D-CB)] = [AB(C-B)(D-C)]$$
$$= [ABC(D-C)] = [ABCD] \quad [67].$$

269. Das Produkt $\alpha[ABCD]$ eines Körpertheils $[ABCD]$ und einer Zahl ist ein Körpertheil, dessen Inhalt sich zu dem von $[ABCD]$ wie $\alpha : 1$ verhält.

Beweis. $\alpha[ABCD] = \alpha[ABC(D-C)]$ [67]
$= [ABC \cdot \alpha(D-C)]$ [40]
$= [ABC(E-C)]$,

wenn CE mit CD parallel ist und sich zu ihm wie $\alpha : 1$ verhält. Dies ist wieder (nach 67)

$$= [ABCE].$$

Da aber CE und CD parallel sind und sich wie $\alpha : 1$ verhalten, so verhalten sich auch die Spate ABCE und ABCD algebraisch wie $\alpha : 1$, d. h. die Inhalte von $\alpha[ABCD]$ und $[ABCD]$ wie $\alpha : 1$.

270. Wenn A, B, C, D einfache Punkte, und α, β, γ, δ Zahlen sind, so ist $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C \cdot \delta D]$ ein Körpertheil, der sich zu ABCD wie $\alpha\beta\gamma\delta$ zu 1 verhält.

Beweis. $[\alpha A \cdot \beta B \cdot \gamma C \cdot \delta D] = \alpha\beta\gamma\delta[ABCD]$ (nach 46), also (nach 269) bewiesen.

Anm. Blicken wir zurück auf die verschiedenen kombinatorischen Produkte, deren Begriff wir näher bestimmt haben, so ergab sich für 2, 3, 4 einfache Punkte das einfache, zweifache, sechsfache des dazwischen liegenden Linien-, Flächen-, Körper-Theiles, und die zugehörigen Gebiete waren die unbegränzte gerade Linie, Ebene, der unbegränzte Raum. Ferner ebenso wie der unendlich entfernte Punkt als Strecke von bestimmter Länge und Richtung erschien, so der unendlich entfernte Linientheil als begränzte Ebene von bestimmtem Flächeninhalt und bestimmten Richtungen, so der unendlich entfernte Flächentheil als Körperraum von bestimmtem Inhalte. Wenn zu einer Strecke oder zu einem Produkt zweier oder dreier Strecken ein Punkt als erster Faktor hinzutrat, so lieferte dies Produkt denselben Inhalt und dieselben Richtungen, als wenn der Punkt nicht hinzutrat. Durch das Hinzutreten des Punktes trat zu den bisherigen Bestimmungen (Inhalt und Richtungen) noch im ersten Falle die durch den Punkt mit der Strecke parallel gelegte Linie, im zweiten die durch den Punkt mit den beiden Strecken parallel gelegte Ebene hinzu, welche

Hosted by Google

die Gebiete jener Grössen bilden, und so verwandelte sich die Strecke in einen Linientheil, die Fläche von bestimmtem Inhalt und bestimmten Richtungen in das, was wir einen Flächentheil genannt haben. Das Produkt dreier Strecken wird durch das Hinzutreten des Punktes nur formell geändert.

271. Wenn A, B, C, D, E, F Punkte, und a, b, c, d Strecken sind, so bedeutet

1) $A \equiv B$,

dass A mit B zusammenfällt,

2) $[AB] \equiv [CD]$,

dass die unbegränzten geraden Linien AB und CD,

3) $[ABC] \equiv [DEF]$,

dass die unbegränzten Ebenen ABC und DEF zusammenfallen,

4) $a \equiv b$,

dass a mit b parallel,

5) $[ab] \equiv [cd]$,

dass die Ebene, welche die Richtungen a und b enthält, der Ebene parallel ist, welche die Richtungen c und d enthält.

Beweis. Nach No. 2 bedeutet die Kongruenz zweier extensiver Grössen $p \equiv q$, dass p und q in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und keine von beiden null ist. Wenn das nun 1) für A und B gilt, so müssen (nach 221) ihre Orte zusammenfallen, wenn es 2) für [AB] und [CD] gilt, so müssen (nach 247) die unbegränzten geraden Linien AB und CD zusammenfallen, wenn es für [ABC] und [DEF] gilt, so müssen (nach 255) die Ebenen ABC und DEF zusammenfallen. Endlich 4) und 5) folgen aus 1) und 2), wenn man die Punkte in unendliche Entfernung rückt.

§. 4. Addition von Linien und Flächen.

272. Zwei Linientheile derselben Ebene geben zur Summe wieder einen Linientheil derselben Ebene, und zwei Flächentheile geben zur Summe wieder einen Flächentheil.

Beweis. Da der Linientheil (nach 249) ein kombinatorisches Produkt zweier Punkte, und (nach 251) der Flächentheil ein kombinatorisches Produkt dreier Punkte, und die Punkte (nach 228) Grössen erster Stufe sind, so sind (nach

Hosted by Google

77 b) der Linientheil und der Flächentheil beziehlich einfache Grössen zweiter und dritter Stufe. Da ferner alle Punkte der Ebene ſich aus dreien, aber nicht aus weniger Punkten derſelben numerisch ableiten lassen (233), ſo ist (nach 14) die Ebene ein Gebiet dritter Stufe, und ebenſo (nach 232 und 14) der Raum ein Gebiet vierter Stufe. Nach 88 geben die Grössen (n — 1)-ter Stufe in einem Hauptgebiete n-ter Stufe zur Summe eine einfache (d. h. als kombinatorisches Produkt darstellbare) Grösse (n — 1)-ter Stufe desselben Hauptgebietes, alſo die Linientheile einer und derſelben Ebene einen Linientheil derſelben Ebene, die Flächentheile einen Flächentheil.

Zuſatz. Dasſelbe gilt alſo auch für mehr als zwei Linientheile derſelben Ebene, und für mehr als zwei Flächentheile.

273. Zwei endlich entfernte Linientheile, deren Linien ſich schneiden, geben zur Summe einen endlich entfernten Linientheil, dessen Linie durch denſelben Durchschnittspunkt geht, und welcher der Diagonale eines Parallelogrammes gleich lang und gleichgerichtet ist, dessen von derſelben Ecke ausgehende Seiten den ſummirten Linientheilen gleich lang und gleichgerichtet ſind.

Beweis. Es ſei A der Durchschnittspunkt der beiden Linien, und ſeien [AB] und [AC] die beiden Linientheile, wo A, B, C einfache Punkte ſind, ſo ist

$$[AB] + [AC] = [A(B + C)] = 2[AE],$$

wenn E die Mitte zwischen B und C ist. Aber AE ist die halbe Diagonale des Parallelogramms CAB, alſo 2AE die ganze.

274. Zwei endlich entfernte, gleichgerichtete Linientheile geben zur Summe wieder einen ebenſo gerichteten Linientheil, dessen Länge die Summe ist aus den Längen der Summanden, und dessen gerade Linie zwischen den geraden Linien der Summanden liegt und von dieſen Linien im umgekehrten Verhältnisse der Längen der Summanden absteht.

Beweis. Es ſeien [Ap] und [Bq], wo A und B einfache Punkte, p und q gleichgerichtete Strecken ſind, dieſe Linientheile, und ſei $1 : \alpha$ das Verhältniss ihrer Längen, d. h. (nach 251) das Verhältniss von p zu q, alſo $q = \alpha p$, ſo ist

Hosted by Google

$$[Ap] + [Bq] = [Ap] + [B \cdot \alpha p] = [Ap] + \alpha[Bp] \quad [40]$$
$$= [(A + \alpha B)p] = [(1 + \alpha)S \cdot p] \quad [225],$$

wenn S der Summenpunkt von A und αB ist,

$$= [S \cdot (1 + \alpha)p] \quad [40]$$
$$= [S[p + \alpha p)] = [S(p + q)],$$

d. h. die Summe ist ein mit den Summanden gleichgerichteter Linientheil, dessen Länge $(p + q)$ die Summe aus den Längen der Summanden ist, und dessen Linie durch S geht. S liegt aber (nach 225) in der geraden Linie AB, und steht von A und B in dem Verhältnisse von $\alpha : 1$, d. h. im umgekehrten Verhältnisse der Summanden (p und q) ab, alfo steht auch die gerade Linie $S(p + q)$ von den geraden Linien Sp und Sq in diefem Verhältnisse ab.

275. Zwei endlich entfernte, entgegengefetzt gerichtete, aber nicht gleich lange Linientheile geben zur Summe einen endlich entfernten Linientheil, welcher dem grösseren der Summanden gleichgerichtet ist, dessen Länge die Differenz der Längen der Summanden ist, und dessen Linie ausserhalb der Linien der Summanden (auf der Seite des grösseren Summanden) liegt, und von diefer Linie im umgekehrten Verhältnisse der Längen der Summanden absteht.

Beweis wie in 274, nur dass man $-\alpha$ statt α fetzt.

276. Die Summe zweier entgegengefetzt gerichteter und gleich langer Linientheile AB und CD ist ein Streckenprodukt, dessen Inhalt gleich und gleichbezeichnet dem eines Parallelogrammes ABCD ist, welches den einen Linientheil (gleich viel, welchen) zur Grundfeite, und den andern zur Deckfeite hat.

Beweis. Wenn AB mit CD gleich lang und entgegengefetzt gerichtet ist, fo ist (nach 222 Zuf.)

$$B - A = C - D.$$

Alfo ist

$$[AB] + [CD] = [A(B - A)] + [(C - D)D] \quad [67]$$
$$= [A(B - A)] + [(B - A)D] \quad [\text{Hyp.}]$$
$$= -[(B - A)A] + [(B - A)D] \quad [55]$$
$$= [(B - A)(D - A],$$

d. h. gleich einem Streckenprodukt, dessen Inhalt gleich dem

Hosted by Google

eines Parallelogrammes ist, dessen erste Seite mit AB, und dessen zweite Seite mit AD gleich lang und gleichgerichtet ist. Dies ist aber das Parallelogramm ABCD, also bewiesen.

277. Die Summe eines endlich entfernten Linientheiles [AB] und eines kombinatorischen Produktes [ab] zweier Strecken a und b, welche einer durch den Linientheil [AB] gelegten Ebene parallel sind, ist ein endlich entfernter Linientheil [CD] derselben Ebene, welcher mit dem ersteren gleich lang und gleichgerichtet ist, und so liegt, dass das Parallelogramm ABCD, welches den ersten Linientheil zur Grundseite, den zweiten zur Deckseite hat, dem kombinatorischen Produkte [ab] entgegengesetzt (d. h. inhaltsgleich, aber entgegengesetzt bezeichnet) sei.

Beweis. Bezeichnen wir das mit ABCD gleiche Streckenprodukt mit P, so ist nach dem vorigen Satze

$$[AB] + [DC] = P,$$

also

$$[CD] = [AB] - P$$
$$= [AB] + [ab],$$

da nach Hypothesis

$$-P = [ab] \text{ ist.}$$

278. Die Summe zweier kombinatorischer Produkte [ab] und [cd] von je zwei Strecken ist wieder ein kombinatorisches Produkt zweier Strecken, und zwar in der Art, dass, wenn jene in Form zweier Parallelogramme über derselben (oder gleich langer und gleichgerichteter) Grundseite dargestellt sind, die Summe sich als Parallelogramm über derselben (oder gleich langer und gleichgerichteter) Grundseite darstellen lässt, in welchem die zweite Seite die Streckensumme der zweiten Seiten jener Parallelogramme ist.

Beweis. Man lege eine Ebene mit a und b parallel, eine andere mit c und d parallel; es sei e eine Strecke, welche mit der Durchschnittslinie beider Ebenen (und wenn sie sich nicht schneiden mit einer beliebigen Linie derselben) parallel ist. Dann kann man (nach 254) [ab] auf die Form [ef] und [cd] auf die Form [eg] bringen, und es ist dann

$$[ab] + [cd] = [ef] + [eg] = [e(f + g)],$$

und dies war die verlangte Form der Summe.

Hosted by Google

279. Zwei endlich entfernte Flächentheile, deren Ebenen ſich schneiden, geben zur Summe einen Flächentheil, dessen Ebene durch die Durchschnittskante jener Ebenen geht, und zwar, wenn die Summanden als Parallelogramme von gemeinschaftlicher Grundſeite dargestellt ſind, ſo lässt ſich die Summe als Parallelogramm darstellen, welches dieſelbe Grundſeite hat, und in welchem die zweite Seite die Streckenſumme aus den zweiten Seiten der Summanden ist, oder anders ausgedrückt: Die Summanden ſind gleich den Projektionen der Summe auf die beiden Ebenen der Summanden, wenn auf jede Ebene parallel der andern projicirt wird.

Beweis. Es ſeien A und B zwei einfache Punkte in der Durchschnittskante jener Ebenen, und c und d zwei Strecken von der Art, dass die beiden zu addirenden Flächentheile gleich [ABc] und [ABd] ſeien, ſo ist

$$[ABc] + [ABd] = [AB(c + d)]$$

d. h. die Summe ist dargestellt durch ein Parallelogramm, in welchem AB Grundſeite, und $c + d$ die zweite Seite ist.

280. Die Summe zweier paralleler und gleichbezeichneter (endlich entfernter) Flächentheile (E_1 und E_2) ist ein ihnen paralleler und gleichbezeichneter Flächentheil, dessen Inhalt die Summe ist aus den Inhalten der Summanden, und dessen Ebene zwischen denen der Summanden ſo liegt, dass ſie von ihnen im umgekehrten Verhältnisse der Inhalte der Summanden absteht.

Beweis. Es ſei $E_1 = [Abc]$, wo A ein Produkt, b und c Strecken ſind, und ſei von A auf die Ebene von E_2 ein Loth AD gefällt, ſo ist [Dbc], da beide Ebenen parallel ſind, ein Flächentheil der Ebene von E_2, steht alſo zu E_2 in einer Zahlbeziehung. Es ſei $E_2 = \alpha[Dbc]$, ſo ist

$$E_1 + E_2 = [Abc] + \alpha[Dbc] = [(A + \alpha D)bc]$$
$$= [(1 + \alpha)Sbc],$$

wo S (nach 225) in AD liegt, und von A und D im Verhältnisse $\alpha : 1$ absteht. Folglich ist die Ebene der Summe eine durch S mit b und c, alſo auch mit den Ebenen von E_1 und E_2 parallel gelegte Ebene, welche von dieſen letzteren im Verhältnisse $\alpha : 1$ absteht, d. h. im umgekehrten Verhältnisse

Hosted by Google

der Inhalte (bc und αbc). Der Inhalt der Summe ist (nach 260) gleich dem Inhalte von $(1 + \alpha)bc$, d. h. $= bc + \alpha bc$, d. h. gleich der Summe der Inhalte der Summanden.

281. Die Summe zweier paralleler und entgegengefetzt bezeichneter aber nicht inhaltsgleicher (endlich entfernter) Flächentheile E_1 und E_2 ist ein ihnen paralleler dem grösseren gleichbezeichneter Flächentheil, deſſen Inhalt die Differenz der Inhalte der Summanden (E_1 und E_2) ist, und deſſen Ebene ausserhalb der beiden Ebenen der Summanden ſo liegt, dass ſie von dieſen Ebenen im umgekehrten Verhältnisse der Summanden absteht.

Beweis wie in 277, nur dass statt α gefetzt wird $-\alpha$.

282. Die Summe zweier paralleler, entgegengefetzt bezeichneter aber inhaltsgleicher (endlich entfernter) Flächentheile E_1 und E_2 ist gleich einem kombinatorischen Produkte dreier Strecken, und zwar ist der Inhalt dieſes Produktes gleich, aber entgegengefetzt bezeichnet dem eines Prisma's, welches E_1 als Grundfläche hat und deſſen Deckfläche in der Ebene von E_2 liegt.

Beweis. Es ſei $E_1 = [Abc]$, $E_2 = -[Dbc]$, ſo ist

$$E_1 + E_2 = [Abc] - [Dbc] = [(A - D)bc]$$
$$= -[(D - A)bc].$$

Aber $[(D - A)bc]$ ist (nach 58) $= [bc(D - A)]$, und dies letztere ist (nach 262) dem Inhalte eines Spates gleich, deſſen erste Seite mit b, deſſen zweite Seite mit c und deſſen dritte Seite mit $(D - A)$ gleich und gleichgerichtet ist, alſo deſſen Grundfläche Abc ist und deſſen Deckfläche durch D geht, alſo bewieſen.

283. Die Summe eines endlich entfernten Flächentheils E_1 und eines kombinatorischen Produktes P dreier Strecken, ist ein dem ersten parallel gelegener, inhaltsgleicher und gleichbezeichneter Flächentheil E_2, welcher ſo liegt, dass der Spat (Parallelepipedum), welcher den ersteren Flächentheil zur Grundfläche hat, dem gegebenen kombinatorischen Produkte P der drei Strecken inhaltsgleich und gleichbezeichnet ist.

Beweis. Nach 282 ist

$$E_1 - E_2 = -P, \text{ alſo}$$
$$E_2 = E_1 + P.$$

Hosted by Google

284. Die Summe dreier Flächentheile (E_1, E_2, E_3), deren Ebenen ſich in einem Eckpunkte (D) ſchneiden, iſt ein Flächentheil (E_4), deſſen Ebene durch denſelben Eckpunkt (D) geht; und ſo beſchaffen iſt, dass, wenn man dieſen Flächentheil (E_4) nach und nach auf jede der drei Ebenen parallel der Durchſchnittslinie der beiden andern projicirt, dieſe Projektionen den Summanden (E_1, E_2, E_3) gleich ſind.

Beweis. Es ſeien die Kanten, in welchen ſich beziehlich die Ebenen E_2 und E_3, E_3 und E_1, E_1 und E_2 ſchneiden, den drei Richtungen a, b, c parallel, ſo iſt zunächſt zu beweiſen, dass E_1, E_2, E_3 die Projection von E_4 auf die Ebenen E_1, E_2, E_3 nach den Richtungen a, b, c ſeien. Um dies zuerſt für E_1 zu beweiſen, ſei $E_2 + E_3 = E'$ geſetzt, ſo iſt a (nach der Annahme) mit der Durchſchnittskante der beiden Ebenen E_2 und E_3 parallel; alſo auch (nach 279) mit E'. Projicirt man nun E_4 auf die Ebene E_1 nach der Richtung a, ſo iſt, da a mit E' parallel und $E_4 = E' + E_1$ iſt, dieſe Projection $= E_1$ (nach 279). Auf gleiche Weiſe folgt, dass die Projection von E_4 auf die Ebene E_2 nach der Richtung b, gleich E_2, und die auf die Ebene E_3 nach der Richtung c, gleich E_3 iſt. Endlich muss auch E_4 durch D gehen; denn (nach 279) haben E', E_2 und E_3, vermöge der Gleichung $E' = E_2 + E_3$, dieſelbe Kante gemein, alſo auch den Punkt D, der (nach der Hypotheſis) in E_2 und E_3 liegt; ferner haben nach demſelben Satze E_4, E', E_1, vermöge der Gleichung $E_4 = E' + E_1$, dieſelbe Kante gemein, alſo auch den Punkt D, der, wie wir bewieſen, in E' und nach der Vorausſetzung auch in E_1 liegt, d. h. E_4 geht auch durch D.

285. Eine Summe S von Linientheilen lässt ſich ſtets auf eine Summe zweier Linientheile zurückführen, und zwar kann man für den einen dieſer beiden Linientheile einen Punkt (A), durch welchen die Linie desſelben gehen ſoll, und für den andern eine Ebene BCD, in welcher die Linie desſelben liegen ſoll, willkürlich annehmen, nur dass der Punkt A nicht innerhalb der Ebene BCD liegen darf.

Beweis. Da A, B, C, D nicht in einer Ebene liegen, ſo kann man aus ihnen (nach 232) alle Punkte des Raumes

Hosted by Google

numerisch ableiten, und alſo auch die Punkte, durch deren Multiplikation zu je zweien die Linientheile entſtanden ſind, deren Summe S ist. Löst man, nachdem man dieſe Ableitungsausdrücke eingeführt hat, alle Klammern auf, und ſetzt (nach 55) $[BA] = -[AB]$, $[CA] = -[AC]$, $[DA] = -[AD]$, $[CB] = -[BC]$, $[DB] = -[BD]$, $[DC] = -[CD]$, ſo erhält man einen Ausdruck der Form

$$S = \alpha[AB] + \beta[AC] + \gamma[AD] + \delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD],$$

wo α, β, γ, δ, ε, ζ Zahlen ſind. Dies ist aber

$$= [A(\alpha B + \beta C + \gamma D)] + \delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD].$$

Ersteres giebt (nach 222 und 253) einen Linientheil, und $\delta[BC] + \varepsilon[BD] + \zeta[CD]$ giebt (nach 272 Zuſ.) einen (endlich oder unendlich entfernten) Linientheil der Ebene BCD, alſo bewieſen.

286. Eine Summe S von Linientheilen ist dann und nur dann wieder ein Linientheil, wenn

$$[SS] = 0$$

ist.

Beweis 1. Wenn S ein Linientheil $= [AB]$ ist, ſo ist

$$[SS] = [ABAB] = 0 \qquad [60].$$

2. Wenn $[SS] = 0$ ist, ſo ſei S (nach 285) zurückgeführt auf 2 Linientheile, und $S = [AB] + [CD]$, ſo wird

$$0 = [SS] = [(AB + CD)(AB + CD)] = [ABCD] + [CDAB],$$

da [ABAB] und [CDCD] (nach 60) null ſind. Es ist aber (nach 58) $[CDAB] = [ABCD]$, alſo

$$0 = 2[ABCD], \text{ oder } 0 = [ABCD],$$

d. h. A, B, C, D liegen in Einer Ebene (nach 236), alſo ist (nach 272) AB + CD ein Linientheil.

Anm. Man ſieht, wie für die Statik der Schwerpunkt als Summe von Punkten, die statiſche Kraft als Linientheil, die Reſultate der statiſchen Kräfte als Summe der Linientheile, das statiſche Moment als Flächentheil erſcheint, und ſchon daraus wird man entnehmen können, welche fruchtreiche Anwendung die hier ſich entwickelnde Analyſe für die Statik und Mechanik geſtatte, was ich in einem ſpäteren Werke zu zeigen gedenke.

Hosted by Google

§. 5. Planimetrische und stereometrische Multiplikation.

287. Wenn a, b, ··· die Stufenzahlen eines reinen Produktes P (114), n die des Hauptgebietes, ν die Stufenzahl des verbindenden, g die des gemeinschaftlichen Gebietes (15) und p die des Produktes ist, und $n - a = a'$, $n - b = b'$, ···, $n - g = g'$ gefetzt wird, fo ist,

1) wenn das Produkt P ein progressives ist, P dann und nur dann von null verschieden, wenn

$$\nu = a + b + \cdots$$

ist, und zwar ist dann $p = \nu$,

2) wenn das Produkt P ein regressives ist, fo ist P dann und nur dann von null verschieden, wenn

$$g' = a' + b' + \cdots$$

ist, und zwar ist dann $p = g$.

Beweis 1. Wenn das Produkt P ein progressives ist, fo kann man die Faktoren (nach 119 b) in lauter Faktoren erster Stufe auflöfen; die Anzahl diefer Faktoren erster Stufe ist (nach 77) $a + b + \cdots$, ihr Produkt ist (nach 61 und 66) dann und nur dann von null verschieden, wenn die Faktoren erster Stufe in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, d. h. (nach 23) wenn das verbindende Gebiet von $(a + b + \cdots)$-ter Stufe, alfo $\nu = a + b + \cdots$ ist. Dann ist die Stufe des Produktes (nach 77) $= a + b + \cdots$, d. h. $= \nu$.

2. Wenn das Produkt P ein regressives ist, fo gilt der Satz zunächst für zwei Faktoren. Denn nach 109 ist P dann und nur dann von null verschieden, wenn $g = a + b - n$, d. h. $n - g = n - a + n - b$, alfo

$$g' = a' + b'$$

ist. Nach 95 ist ferner $p = a + b - n$, alfo $= g$. Somit gilt der Satz für zwei Faktoren. Aus ihm erhält man aber durch wiederholte Anwendung den Satz für beliebig viele Faktoren.

Anm. Diefer Satz hätte nach 119 b folgen follen, und ist dort nur durch ein Verfehen ausgelassen.

288. Erklärung. Unter der planimetrischen Multiplikation verstehe ich die auf eine Ebene bezügliche, unter

Hosted by Google

der stereometrischen die auf den Raum (als Gebiet vierter Stufe) bezügliche Multiplikation.

289. Das planimetrische Produkt zweier Linientheile [AB] und [AC], deren Linien ſich in endlicher Entfernung schneiden, ist ein Punkt, dessen Ort der Durchschnittspunkt (A) jener Linien, und dessen Koefficient, wenn A, B, C einfache Punkte ſind, gleich dem Inhalte des Parallelogramms ABC ist, d. h.

$$[AB \cdot AC] = [ABC]A.$$

Beweis nach 104.

Anm. Da bei der planimetrischen Multiplikation (gemäss 94) ein Flächentheil als Einheit angenommen werden muss, ſo ist der Koefficient [ABC] eine Zahl, alſo [ABC]A in der That ein (einfacher oder vielfacher) Punkt.

290. Das planimetrische Produkt zweier paralleler Linientheile [AB] und [CD] ist eine Strecke, welche den beiden Linien parallel ist, und welche ſich zur Strecke AB algebraisch wie das Parallelogramm BCD zur Einheit verhält.

Beweis. Da AB mit CD parallel ist, ſo stehen (nach 221) die Strecken $A - B$ und $C - D$ in einer Zahlbeziehung. Es ſei $C - D = \alpha(A - B)$, ſo wird

$$\begin{aligned}
[AB \cdot CD] &= [(A - B)B \cdot (C - D)D] && [67]\\
&= \alpha[(A - B)B \cdot (A - B)D] && [\text{Annahme}]\\
&= \alpha[(A - B)BD](A - B) && [104]\\
&= [(C - D)BD](A - B) && [\text{Annahme}]\\
&= [CBD](A - B) && [67]\\
&= [BCD](B - A) && [55],
\end{aligned}$$

d. h. [AB·CD] ist gleich einer Strecke, die mit AB parallel ist, und ſich zu AB algebraisch verhält wie [BCD] zu 1.

291. Das planimetrische Produkt eines Linientheiles [AB] und eines Punktes C ist, wenn A, B, C einfache Punkte ſind, gleich dem Inhalte des Parallalogramms ABC, alſo null nur dann, wenn A, B, C in gerader Linie liegen.

Beweis nach 255.

292. Das planimetrische Produkt dreier Linientheile [AB], [AC], [BC], welche die Seiten eines Dreiecks bilden, ist, wenn A, B, C einfache Punkte ſind, 4mal ſo gross als

Hosted by Google

das Quadrat dieſes Dreiecks, oder gleich dem Quadrate des Parallelogramms ABC, d. h.

$$[AB \cdot AC \cdot BC] = [ABC]^2.$$

Beweis. Es ſei $[ABC] = \alpha$. Dann ſetze man $A_1 = A : \alpha$, ſo iſt $[A_1BC] = 1$, alſo (nach 112)

$$[A_1B \cdot A_1C \cdot BC] = 1,$$

alſo

$$[AB \cdot AC \cdot BC] = \alpha^2 = [ABC]^2.$$

Anm. Wir hätten die Formel auch ſchreiben können:
$[AB \cdot BC \cdot CA] = [ABC]^2$.

293. Das planimetriſche Produkt zweier Grössen erſter oder zweiter Stufe iſt dann und nur dann null, wenn die Grössen incident ſind, d. h. zweier Punkte, wenn ihre Orte zuſammenfallen, zweier Linientheile, wenn ihre Linien zuſammenfallen, eines Linientheiles und eines Punktes, wenn der Ort des Punktes in die Linie (jenes Linientheiles) fällt.

Beweis nach 287.

294. Das planimetriſche Produkt zweier nicht incidenter Linientheile iſt dem Durchſchnittspunkte ihrer Linien kongruent, d. h.

$$[AB \cdot AC] \equiv A.$$

Beweis. $[AB \cdot AC] = [ABC]A$ (ſ. o.), alſo da $[ABC]$ eine Zahl iſt, $\equiv A$ (nach 2).

295. Das planimetriſche Produkt dreier Linientheile iſt dann und nur dann null, wenn ihre Linien ſich in einem (endlich oder unendlich entfernten) Punkte treffen.

Beweis nach 287.

296. Das ſtereometriſche Produkt zweier Flächentheile $[ABC]$ und ABD, deren Ebenen ſich in endlicher Entfernung ſchneiden, iſt ein Theil dieſer Durchſchnittslinie, und zwar verhält ſich derſelbe, wenn A, B, C, D einfache Punkte ſind, zu AB algebraiſch wie der Spat (das Parallelepipedum) ABCD zur Einheit.

Beweis. $[ABC \cdot ABD] = [ABCD][AB]$ [104].

Anm. Da bei der ſtereometriſchen Multiplikation (nach 94, 288) ein Körpertheil als Einheit genommen iſt, ſo iſt $[ABCD]$ eine Zahl, und alſo $[ABCD][AB]$ in der That ein Linientheil.

Hosted by Google

297. Das stereometrische Produkt zweier Flächentheile [ABC] und [DEF], deren Ebenen parallel sind, ist ein Produkt zweier Strecken, welche diesen Ebenen parallel sind, und zwar verhält sich der Inhalt dieses Produktes, wenn A, B, C, D, E, F einfache Punkte sind, zu dem des Parallelogramms ABC algebraisch wie der Spat (das Parallelepipedum) ADEF zur Einheit.

Beweis.

$[ABC \cdot DEF] = [A(B-A)(C-A) \cdot D(E-D)(F-D)]$ [67].

Da nun nach der Annahme die Ebenen ABC und DEF parallel sind, so sind (nach 230) $E-D$ und $F-D$ aus $B-A$ und $C-A$ ableitbar, also auch das Produkt der ersteren aus dem der letzteren. Es sei $B-A$ mit p und $C-A$ mit q bezeichnet, so ist $[(E-D)(F-D)]$ aus [pq] ableitbar, und sei $= \alpha[pq]$, so ist

$$\begin{aligned} [ABC \cdot DEF] &= [Apq \cdot \alpha Dpq] = \alpha[Apq \cdot Dpq] && [40] \\ &= \alpha[ADpq][pq] && [107] \\ &= [AD(E-D)(F-D)][pq] && [\text{Annahme}] \\ &= [ADEF][pq] && [67]. \end{aligned}$$

298. Das stereometrische Produkt zweier Linientheile [AB] und [CD], und ebenso das eines Flächentheiles [ABC] und eines Punktes, ist, wenn A, B, C, D einfache Punkte sind, gleich dem Spate ABCD.

Beweis. $[AB \cdot CD] = [ABC \cdot D] = [ABCD]$ [80].

299. Das stereometrische Produkt dreier Flächentheile [ABC], [ABD], [ACD], welche sich in einem endlich entfernten Punkte A schneiden, ist ein vielfacher Punkt, dessen Ort der Durchschnittspunkt A ist, und zwar, wenn A, B, C, D die einfachen Ecken eines Tetraeders sind, so ist der zu jenem Punkte gehörige Koefficient gleich dem Inhalte des Spates (Parallelepipedums) ABCD.

Beweis. Es sei $[ABCD] = \alpha$, und sei $B_1 = B : \alpha$, so ist $[AB_1CD] = 1$, also (nach 112)

$[AB_1C \cdot AB_1D \cdot ACD] = A$, also

$[ABC \cdot ABD \cdot ACD] = \alpha^2 A = [ABCD]^2 A$.

300. Das stereometrische Produkt von vier Flächentheilen [ABC], [ABD], [ACD], [BCD] ist, wenn A, B, C,

Hosted by Google

D die einfachen Ecken eines Tetraeders ſind, gleich der dritten Potenz des Spates (Parallelepipedums) ABCD.

Beweis. Es ſei $[ABCD] = \alpha$, und ſei $A_1 = A : \alpha$, ſo ist $[A_1BCD] = 1$, alſo (nach 112)

$$[A_1BC \cdot A_1BD \cdot A_1CD \cdot BCD] = 1, \text{ alſo}$$
$$[ABC \cdot ABD \cdot ACD \cdot BCD] = \alpha^3 = [ABCD]^3.$$

301. Das stereometrische Produkt zweier Linientheile ist dann und nur dann null, wenn ihre Linien in einer Ebene liegen; das stereometrische Produkt zweier Grössen, welche von erster, zweiter oder dritter Stufe, aber nicht beide zugleich von zweiter Stufe ſind, ist dann und nur dann null, wenn die Grössen incident ſind, alſo zweier Punkte, wenn ihre Orte zuſammenfallen, zweier Flächentheile, wenn ihre Ebenen zuſammenfallen, eines Punktes und eines Linien- oder Flächentheiles, wenn der Punkt in der Linie oder Ebene des letzteren liegt, eines Linientheiles und eines Flächentheiles, wenn die Linie des ersteren in der Ebene des letzteren liegt.

Beweis No. 287.

302. Das stereometrische Produkt zweier nicht incidenter Flächentheile ist der Durchschnittslinie ihrer Ebenen kongruent.

Beweis. Es ſeien a, b, c, d vielfache Punkte, ſo ist

$$[abc \cdot abd] = [abcd][ab]$$
$$\equiv [ab],$$

da [abcd] eine Zahl ist.

303. Das stereometrische Produkt eines Flächentheiles und eines Linientheiles, der nicht in der Ebene des ersteren liegt, ist dem Durchschnittspunkte der Ebene und der Linie kongruent.

Beweis. $[abc \cdot ad] = [abcd]\ a$
$$\equiv a,$$

wo wieder a, b, c, d vielfache Punkte ſind.

304. Ich bezeichne bei der planimetrischen Multiplikation das Produkt [ab] zweier Strecken a und b, wenn das Parallelogramm ab gleich dem als Einheit angenommenen Flächeninhalte ist, mit U, und ebenſo bezeichne ich bei der stereometrischen Multiplikation das Produkt [abc] dreier Strecken

Hosted by Google

a, b und c, wenn der Spat (Parallelepipedum) abc gleich dem als Einheit angenommenen Körperraume ist, mit U. Wenn beide unterschieden werden ſollen, ſo werde ich jenes mit U_2, dieſes mit U_3 bezeichnen.

305. Wenn a ein vielfacher Punkt, AB ein Linientheil, ABC ein Flächentheil ist, und A, B, C, einfache Punkte ſind, ſo ist

[aU] der Koefficient von a,

[ABU] gleich der mit AB gleich langen und gleichgerichteten Strecke $= (B - A)$, und

[ABCU] gleich dem mit dem Parallelogramm ABC gleichen und parallel gelegenen Streckenprodukte

$$= [(B - A)(C - A)].$$

Beweis. Es ſei $a = \alpha A$ und $U = [bcd]$, wo b, c, d (nach 304) Strecken ſind, und der Spat bcd gleich 1 ist, ſo ist

$$[aU] = [\alpha Abcd] = \alpha[Abcd] = \alpha,$$

da [Abcd] (nach 268) mit [bcd] inhaltsgleich und gleich bezeichnet, alſo gleich 1 ist. Ferner

$$[ABU] = [AB \cdot bcd] = [A(B - A) \cdot bcd] \qquad [67].$$

Da hier $B - A$ als Strecke aus b, c, d numerisch ableitbar ist (nach 229), ſo ist (nach 108)

$$[A(B - A) \cdot bcd] = [Abcd][B - A] = [B - A],$$

da $[Abcd] = 1$ ist. Ferner

$$[ABCU] = [ABC \cdot bcd] = [A(B - A)(C - A) \cdot bcd] \quad [67].$$

Da hier $B - A$ und $C - A$ Strecken, alſo aus b, c, d numerisch ableitbar ſind (nach 229), ſo ist $[(B - A)(C - A)]$ dem [bcd] untergeordnet, alſo

$$[A(B - A)(C - A) \cdot bcd] = [Abcd][B - A)(C - A)] \quad [108]$$
$$= [(B - A)(C - A)],$$

da $[Abcd] = 1$ ist.

Anm. Dieſe Grössen (aU), [ABU], [ABCU] ſind es, welche ich in der ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre von 1844 (pag. 159) die Ausdehnungen der Grössen a, [AB], [ABC] genannt, und dafür eine eigene Bezeichnung eingeführt habe, die nunmehr durch die Anwendung der unendlich entfernten Einheit (U) überflüssig gemacht worden ist.

Hosted by Google

§. 6. Besondere Gesetze für ein gleich Null gesetztes planimetrisches Produkt. Ebene Kurven.

306. Die Gleichung eines Punktes x, der mit den Punkten a, b in einer geraden Linie liegt, ist

$$[xab] = 0.$$

Beweis. Denn (nach 245) ist [xab] dann und nur dann null, wenn x mit a, b in einer geraden Linie liegt.

Anm. Da es bei den gleich null gesetzten Produkten nie auf den metrischen Werth der Faktoren ankommt, so brauchen einfache und vielfache und unendlich entfernte Punkte nicht mehr unterschieden zu werden, und ich will deshalb für dieselben überall die gleiche Bezeichnung durch kleine lateinische Buchstaben wählen, während ich zur Bezeichnung der Linientheile, oder, da es hier auf ihre Grösse nicht ankommt, der geraden Linien, die grossen lateinischen Buchstaben wähle.

307. Die Gleichung einer geraden Linie X, die mit den geraden Linien A und B durch denselben Punkt geht, ist

$$[XAB] = 0.$$

Beweis nach 301.

308. Die Stufenzahl eines planimetrischen Produktes aus beliebig vielen Faktoren, mögen dieselben nun Grössen erster oder zweiter Stufe sein, ist der Summe der Stufenzahlen aller Faktoren kongruent in Bezug auf den Modul. 3.

Beweis nach 96.

309. Wenn $\mathfrak{P}_{n,x}$ ein planimetrisches Produkt nullter Stufe ist, welches den Punkt x n-mal, und ausserdem nur konstante Punkte und Linien als Faktoren enthält, so ist

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0,$$

wenn ihr nicht jeder Punkt x genügt, die Punkt-Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung, d. h. es drückt die Gleichung aus, dass der Punkt x in einer algebraischen Kurve n-ter Ordnung liegt.

Beweis. Es seien a, b, c drei beliebige, nicht in gerader Linie liegende Punkte, z. B. a ein einfacher Punkt, b und c zwei gegeneinander senkrechte und gleich lange Strecken (unendlich entfernte Punkte), so sind alle Punkte der Ebene

Hosted by Google

aus a, b, c numerisch ableitbar, alſo namentlich der Punkt x; es ſei

$$x = x_1 a + x_2 b + x_3 c.$$

Führt man dieſen Ausdruck ſtatt x in die Gleichung

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$$

ein, und löst die ſämmtlichen Klammern, welche nun in dem Produkte $\mathfrak{P}_{n,x}$ den Ausdruck $(x_1 a + x_2 b + x_3 c)$ einſchliessen, auf, ſo erhält man eine in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung n-ten Grades, deren Glieder alle die Form $\mathfrak{A} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} x_3^{\mathfrak{c}}$ haben, wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = n$ ist, und wo $\mathfrak{A}$ ein Produkt konstanter Linien und Punkte, und zwar ein Produkt nullter Stufe ist, da die Stufenzahlen der Faktoren nicht geändert ſind. Alſo ist $\mathfrak{A}$ als Grösse nullter Stufe eine Zahl, und die Gleichung alſo eine gewöhnliche Zahlgleichung geworden, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogen vom n-ten Grade ist. Es ſind aber, wenn a ein einfacher Punkt und b und c zu einander ſenkrechte gleich lange Linien ſind, $\frac{x_2}{x_1}$ und $\frac{x_3}{x_1}$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes x, alſo, wenn die Gleichung nicht identisch $= 0$ ist, die durch ſie dargestellte Kurve eine algebraische Kurve von n-ter Ordnung.

310. Wenn $\mathfrak{P}(n,X)$ ein planimetrisches Produkt nullter Stufe ist, welches die gerade Linie X n-mal und ausserdem nur konstante Punkte und Linien als Faktoren enthält, ſo ist

$$\mathfrak{P}(n,X) = 0$$

die Linien-Gleichung einer algebraischen Kurve n-ter Klasse, oder einfacher ausgedrückt, ſo ist der geometrische Ort für die Linie X, welche dieſer Gleichung genügt, ein Ort n-ten Grades.

Beweis genau wie in 309.

311. Wenn $\mathfrak{P}_{n,x}$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches den Punkt x n-mal, und ausserdem nur konstante Punkte, Linien und Ebenen als Faktoren enthält, ſo ist

$$\mathfrak{P}_{n,x} = 0$$

die Punktgleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Ordnung, oder einfacher ausgedrückt, ſo ist der geometrische Ort

Hosted by Google

des Punktes x, welcher der obigen Gleichung genügt, ein Ort n-ten Grades; vorausgefetzt jedoch, dass nicht jeder Punkt x der obigen Gleichung genügt.

Beweis. Es feien a, b, c, d vier beliebige Punkte, die nicht in Einer Ebene liegen, z. B. a ein einfacher Punkt, b, c, d drei gegeneinander fenkrechte und gleich lange Strecken (unendlich entfernte Punkte), fo lässt fich (nach 232) x aus a, b, c, d numerisch ableiten. Es fei

$$x = x_1 a + x_2 b = x_3 c + x_4 d,$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 Zahlen find. Führt man diefen Ausdruck statt x in dem Produkt $P_{n,x}$ überall ein, und lösst die Klammern auf, fo erhält man lauter Glieder der Form $\mathfrak{A} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} x_3^{\mathfrak{c}} x_4^{\mathfrak{d}}$, wo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = n$, und $\mathfrak{A}$ ein Produkt nullter Stufe, alfo eine Zahl ist. Somit ist die entstehende Gleichung eine Zahlgleichung, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4 homogen vom n-ten Grade ist; falls nicht etwa die fämmtlichen Koefficienten $\mathfrak{A}$ u. f. w. Null find, d. h. der Gleichung durch jeden Punkt x genügt wird, was oben ausgeschlossen war. Nun find $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}$, $\frac{x_4}{x_1}$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes x, weil nämlich $x = x_1\left(a + \frac{x_2}{x_1} b + \frac{x_3}{x_1} c + \frac{x_4}{x_1} d\right)$, alfo $x \equiv a + \frac{x_2}{x_1} b + \frac{x_3}{x_1} c + \frac{x_4}{x_1} d$ ist. Somit ist der geometrische Ort von x eine Oberfläche n-ter Ordnung.

312. Wenn $\mathfrak{P}(n, \xi)$ ein stereometrisches Produkt nullter Stufe ist, welches die Ebene ξ n-mal als Faktor enthält, und ausserdem nur konstante Punkte, Linien und Ebenen, fo ist

$$\mathfrak{P}(n, \xi) = 0$$

die Ebenen-Gleichung einer algebraischen Oberfläche n-ter Klasse; vorausgefetzt, dass nicht jede Ebene ξ der Gleichung genügt.

Beweis wie in 311.

313. Ein planimetrisches und ebenfo ein stereometrisches Produkt bleibt fich felbst kongruent, wenn man statt eines beliebigen Faktors desfelben einen ihm kongruenten fetzt, oder

Hosted by Google

ihn mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl (einer Grösse nullter Stufe) multiplicirt oder dividirt.

Beweis. Zwei Grössen A und B heissen (nach 2) kongruent, wenn zwischen ihnen eine Gleichung der Form $A = nB$ besteht, in welcher n eine beliebige von Null verschiedene Zahl (positive, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale) bedeutet. Setzt man nun in einem Produkte $P(A)$, welches den Faktor A enthält, statt A eine ihr kongruente Grösse nA, so wird $P(nA)$ (nach 40) $= nP(A)$, also mit $P(A)$ kongruent.

Anm. Ein Produkt nullter Stufe ist nach dem angeführten Begriffe dann und nur dann einem anderen kongruent, wenn sie entweder beide zugleich null, oder beide zugleich von Null verschieden sind. Somit schliesst der Satz dies ein, dass wenn man in einem Produkte nullter Stufe statt eines beliebigen Faktors einen ihm kongruenten setzt, das Produkt null bleibt, wenn es null war, und von Null verschieden bleibt, wenn es von Null verschieden war. Da es in der ganzen folgenden Behandlung nur auf die Kongruenz ankommt, so werde ich statt der Linientheile und der Flächentheile überall gerade Linie und Ebene setzen.

314. Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst kongruent, wenn die beiden Faktoren, aus denen es besteht, vertauscht, d. h. $[AB] \equiv [BA]$, was auch A und B für Grössen seien.

Beweis nach 120.

315. Ein planimetrisches Produkt dreier Punkte oder dreier Linien, ebenso ein stereometrisches von vier Punkten oder Ebenen bleibt sich selbst kongruent, wenn man seine Faktoren beliebig ordnet und zusammenfasst.

Beweis. Denn da das Produkt dann (nach 114) ein reines ist, so gelten für dasselbe die Sätze 120, 119 a.

316. Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt bleibt sich selbst gleich, wenn man zwei unmittelbar auf einander folgende, einander incidente Faktoren desselben (namentlich eine gerade Linie, oder eine Ebene und einen in ihr liegenden Punkt) vertauscht.

Beweis nach 123.

317. Ein planimetrisches, und ebenso ein stereometrisches Produkt nullter Stufe bleibt sich selbst kongruent, wenn

Hosted by Google

man die Ordnung der Faktoren umkehrt, oder die Reihe beliebig vieler letzter Faktoren in eine Klammer schliesst und umkehrt.

Beweis nach 126.

318. Ein stereometrisches Produkt von drei oder vier Punkten, oder von drei oder vier Ebenen, oder von zwei Punkten und einer Geraden, oder von zwei Ebenen und einer Geraden bleibt sich selbst kongruent, wenn man seine Faktoren beliebig ordnet und zusammenfasst.

Beweis. Denn da das Produkt dann (nach 114) jedesmal ein reines ist, so sind hier die Sätze 119 a und 120 anwendbar.

319. Ein stereometrisches Produkt [aBC] von einem Punkte a und zwei geraden Linien B und C, welche sich schneiden, bleibt sich selbst kongruent, wenn man diese geraden Linien vertauscht, d. h.

$$[aBC] \equiv [aCB], \text{ wenn B und C sich schneiden.}$$

Beweis nach 124 e.

Anm. Hiermit sind alle Fälle der Vertauschbarkeit für planimetrische und stereometrische Produkte erschöpft. (Vergl. 124.)

320. Wenn in einem planimetrischen Produkte der Form [xaBcD···] d. h. in welchem auf den Punkt x abwechselnd Punkte und gerade Linien folgen, oder in dem planimetrischen Produkte [XBcD···], in welchem auf die Linie X abwechselnd Linien und Punkte folgen, kein Faktor dem nächstfolgenden incident ist, so ist dasselbe von Null verschieden.

Beweis. Angenommen sei, dass von den Grössen x, a, B, c, D··· keine zwei aufeinander folgende incident seien, dann sind x und a zwei nicht incidente Punkte, ihr Produkt also eine von Null verschiedene, gerade Linie, diese gerade Linie ist nicht mit B incident, da a nicht in B liegt, also ist ihr Produkt [xaB] ein von Null verschiedener Punkt der geraden Linie B; dieser kann nicht mit c zusammenfallen, da c nicht in B liegt, also ist ihr Produkt [xaBc] eine von Null verschiedene, durch c gehende gerade Linie, diese kann nicht mit D zusammenfallen, da c nicht in D liegt, also ist ihr Produkt [xaBcD] ein von Null verschiedener Punkt der gera-

Hosted by Google

den Linie D u. f. w. Setzt man $xa = X$, fo geht der zweite Theil des Satzes hervor.

321. Wenn in einem stereometrischen Produkte der Form

$$[xa\beta c\delta \cdots],$$

d. h. in welchem auf den Punkt x abwechfelnd Punkte und Ebenen (die hier mit griechischen Buchstaben bezeichnet find) folgen, oder in dem stereometrischen Produkte

$$[\xi\beta c\delta \cdots],$$

in welchem auf die Ebene ξ abwechfelnd Ebenen und Punkte folgen, kein Faktor dem nächstfolgenden incident ist, fo ist dasfelbe von Null verschieden.

Beweis wie in 320.

322. Wenn in einem stereometrischen Produkte der Form

$$[xABC\cdots] \text{ oder } [\xi BC\cdots],$$

d. h. in welchem auf den Punkt x oder die Ebene ξ lauter gerade Linien als Faktoren folgen, die beiden ersten Faktoren einander nicht incident find, und keine der Linien die nächstfolgende schneidet, fo ist dasfelbe von Null verschieden.

Beweis. Da x nicht in der geraden Linie A liegt, fo ist [xA] von Null verschieden, und zwar der durch x und A gelegten Ebene kongruent; in diefer Ebene kann die gerade Linie B nicht liegen, da fie fonst die gerade Linie A derfelben Ebene (wenn auch in unendlicher Entfernung) schneiden müsste, gegen die Annahme, alfo ist das Produkt [xAB] der Ebene [xA] und der geraden Linie B von Null verschieden, und zwar (nach 303) kongruent dem Durchschnittspunkte beider; da diefer in B liegt, alfo nicht in C (da B und C fich nicht schneiden), fo ist das Produkt [xABC] eine von Null verschiedene durch C gehende Ebene u. f. w. Der zweite Theil des Satzes folgt, wenn man $[xA] = \xi$ fetzt.

Anm. Die angeführten Sätze reichen hin, um die vorher aufgestellten Formeln für Kurven und Oberflächen mit der grössten Leichtigkeit zu diskutiren, wozu ich die folgenden zwei Beispiele wähle.

323. Die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die fünf Punkte a, b, c, d, e geht, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, ist

Hosted by Google

$$[xa(cd)(ab\cdot de)(bc)ex] = 0, \text{ oder}$$
$$[xaBc_1Dex] = 0,$$

wo $B = [cd]$, $c_1 = [ab\cdot de]$, $D = [bc]$ ist.

Beweis. Das Produkt der linken Seite ist, da die Summe der Stufenzahlen 12 durch 3 theilbar ist, von nullter Stufe. Dass nicht jeder Punkt x der Gleichung genügt, davon überzeugt man ſich leicht. Zieht man z. B. eine Linie ap, die nicht durch e geht, und nimmt an, x ſolle in dieſer geraden Linie liegen, aber nicht in a, ſo ist $[xa] \equiv [pa]$, ſomit können wir (nach 313) statt xa in der obigen Gleichung pa einſetzen, und erhalten

$$[paBc_1Dex] = 0,$$

d. h. der Punkt x muss in der geraden Linie liegen, die durch den Punkt $[paBc_1D]$, welcher q heisset, und durch den Punkt e geht; zugleich ſoll er nach der Annahme in der geraden Linie ap liegen, alſo zugleich in qe und ap, dieſe beiden geraden Linien ſind nothwendig verschieden, da e nicht in ap liegt, alſo treffen ſie ſich nur in einem Punkte, d. h. die gerade Linie ap enthält ausser dem Punkte p nur Einen Punkt, der der obigen Gleichung genügt. Alſo genügt ihr nicht jeder Punkt. Somit ist der geometrische Ort für x (nach 309) eine Kurve zweiter Ordnung, alſo ein Kegelschnitt. Es ist nur noch zu zeigen, dass er durch die fünf Punkte a,··· e geht, d. h. dass wenn x mit irgend einem der fünf Punkte a····e zuſammenfällt, die Gleichung erfüllt wird. Fällt x mit a zuſammen, ſo wird $xa = 0$, alſo auch das ganze Produkt, dasſelbe gilt für $x \equiv e$, wenn man die Gleichung (nach 317) in der Form

$$[xeDc_1Bax] = 0 \qquad [104]$$

schreibt. Wird $x \equiv c$, ſo wird $[ca(cd)] \equiv [cad]c$, und dies ist wieder $\equiv c$, da [cad] eine von Null verschiedene Zahl ist, alſo ist

$$\begin{aligned}[ca(cd)(ab\cdot de)(bc)ec] &\equiv [c(ab\cdot de)(bc)ce] \\ &\equiv [(ab\cdot de)c(bc)ce] \qquad [314] \\ &\equiv [(ab\cdot de)(bc)cce] \qquad [123] \\ &\equiv [(ab\cdot debc][cce], \text{ da } [(ab\cdot de)bc] \text{ von}\end{aligned}$$

nullter Stufe, d. h. eine Zahl ist. Hier ist [ccc] (nach 60)

Hosted by Google

$= 0$, alfo auch das ganze Produkt null. Wird $x \equiv d$, fo wird $[da \cdot cd] \equiv [da \cdot dc]$ (No. 314) $= [dac]d$ (No. 104) $\equiv d$. Somit wird dann

$$\begin{aligned}[da(cd)(ab \cdot de)(bc)ed] &\equiv [d(ab \cdot de)(bc)ed] \\ &\equiv [ab(de)d(bc)ed] && [314] \\ &\equiv [abd(de)(bc)ed] && [123] \\ &\equiv [abd][(de)(bc)(de)], && [40]\end{aligned}$$

weil [abd] eine Zahl ist. Aber $[de \cdot bc \cdot de]$ ist null (nach 295), alfo das ganze Produkt $= 0$. Wird $x \equiv b$, fo ergiebt fich, auf gleiche Weife aus der umgekehrten Gleichungsform, dass der Gleichung genügt wird. Somit find alle fünf Punkte $a \cdots e$ Punkte des Kegelschnittes.

324. Wenn A, B, C drei gerade Linien im Raume find, von denen keine zwei fich schneiden, fo ist

$$[xABCx] = 0$$

die Gleichung derjenigen Fläche zweiter Ordnung, auf welcher die drei geraden Linien A, B, C liegen.

Beweis. Die Summe der Stufenzahlen ist 8, alfo durch 4 theilbar, alfo das Produkt als stereometrisches von nullter Stufe. Nicht jeder Punkt x genügt ihr. Denn legt man durch die gerade Linie A eine Ebene α, und nimmt an, der Punkt x liegt in diefer Ebene, aber ausserhalb A, fo ist $[xA] \equiv \alpha$, alfo $[xABC] \equiv [\alpha BC]$, und zwar von Null verschieden (nach 322). Es ist aber αB ein Punkt und $[\alpha BC]$ die durch diefen Punkt und die gerade Linie C gelegte Ebene. Die Gleichung

$$[\alpha BCx] = 0$$

fagt aus, dass der Punkt x in diefer Ebene liegen muss, er liegt aber nach der Annahme auch in der Ebene α, alfo in beiden zugleich. Beide Ebenen fallen aber nicht zufammen, da fonst A und C in diefer Ebene liegen, alfo fich schneiden müssten gegen die Annahme. Alfo muss x dann in der Durchschnittskante beider Ebenen liegen, um der Gleichung zu genügen. Somit genügt ihr nicht jeder Punkt. Da nun das obige Produkt von nullter Stufe ist, x zweimal als Faktor enthält, und nicht durch jeden Punkt x erfüllt wird, fo ist (nach 311) der Ort von x eine Oberfläche zweiter Ordnung. In ihr liegen A und C, denn wenn x in A liegt, fo wird

Hosted by Google

$[xA] = 0$, alſo das Produkt null, ebenſo wenn x in C liegt. Liegt endlich x in B, ſo hat man

$$[xABCx] \equiv [AxBCx] \quad [314]$$
$$\equiv [ABxCx] \quad [123]$$
$$\equiv [AB][xCx],$$

da [AB] von nullter Stufe iſt; endlich xCx (nach 60) null, alſo das Produkt gleich null, d. h. jeder Punkt x, der in C liegt, genügt der Gleichung.

Anm. Für den umgekehrten Satz, dass jede algebraische Kurve der Ebene ſich in Form eines gleich null geſetzten planimetrischen Produktes darstellen lässt, kommt es darauf an, jede algebraische Funktion der Koordinaten eines Punktes in Form eines planimetrischen Produktes darzustellen. Dieſe Aufgabe wird gelöst ſein, wenn bei irgend einer Methode, die Zahlen räumlich darzustellen, ſo wohl das Produkt als auch die Summe zweier räumlich dargestellter Zahlen durch ein planimetrisches Produkt dargestellt werden können. Das Entsprechende gilt für die algebraischen Oberflächen. Für den ersten Fall wollen wir die Entwickelung ſo weit führen, dass aus jeder gegebenen algebraischen Gleichung ſogleich die entsprechende planimetrische abgeleſen werden kann.

325. Es ſei c ein einfacher Punkt, a und b ſeien zwei nicht parallele Strecken, und x ein beliebiger einfacher Punkt der Ebene cab, und zwar ſei $x = x_1a + x_2b + c$. Es ſei $d = a + b + c$ (d. h. d ſei in einem Parallelogramme, dessen eine Ecke c ist, und dessen von dieſer Ecke ausgehende Seiten mit a und b gleich lang und gleichgerichtet ſind, die der Ecke c gegenüberliegende Ecke). Wenn dann (x_1) und (x_2) diejenigen Punkte der Diagonale cd ſind, für welche die Gleichungen

$$[c(x_1)] : [cd] = x_1, \quad [c(x_2)] : [cd] = x_2$$

gelten, ſo ist

$$(x_1) \equiv [xbC], \; (x_2) \equiv [xaC] \text{ und } [(x_1)b] = [xb], \; [(x_2)a] = xa,$$

wo der Kürze wegen [cd] mit C bezeichnet ist.

Beweis. Nach 221 iſt, da die Punkte c, (x_1), d in gerader Linie liegen, und $c(x_1) : cd = x_1 : 1$ ſich verhält,

$$(x_1) - c = x_1(d - c) = x_1(a + b),$$

da (nach Hyp.) $d = a + b + c$ war, alſo

$$(x_1) = x_1a + x_1b + c, \text{ folglich}$$
$$[(x_1)b] = [(x_1a + c)b] \quad [67]$$

und

$$[xb] = [(x_1a + x_2b + c)b] \quad [\text{Hyp.}]$$
$$= [(x_1a + c)b] \quad [67].$$

Folglich $[(x_1)b] = [xb]$.

Hosted by Google

Hier ist [xb] eine gerade Linie, welche durch x mit b parallel gezogen ist; in dieſer Linie liegt nach der letzten Gleichung der Punkt (x_1); es liegt derſelbe aber nach der Vorausſetzung auch in der Geraden cd oder C, alſo im Durchſchnitt beider, folglich iſt

$$(x_1) \equiv [xbC].$$

Aus gleichem Grunde iſt $[(x_2)a] = xa$ und $(x_2) \equiv [xaC]$.

326. Wenn a, b, c, d dieſelbe Bedeutung wie im vorigen Satze haben, und p, q zwei beliebige Zahlen ſind und man, ähnlich wie im vorigen Satze, unter (p), (q), (pq) diejenigen Punkte der geraden Linie cd verſteht, für welche die Gleichungen

(a) $[c(p)]:[cd]=p$, $[c(q)]:[cd]=q$, $[c(pq)]:[cd]=pq$

gelten, ſo iſt, wenn der Kürze wegen

(b) $[da] = A$, $[db] = B$, $[dc] = C$

geſetzt ſind,

$$(pq) \equiv [(p)aBc((q)b)aC] \equiv [(p)bAc((q)a)bC]$$
$$[(pq)a] \equiv [(p)aBc((q)b)a]$$
$$[(pq)b] \equiv [(p)bAc((q)a)b].$$

Beweis. Setzt man in die dritte der Gleichungen (a) für p und q ihre Werthe aus den beiden erſten, ſo erhält man die Proportion

$$[c(pq)] : [c(p)] = [c(q)] : [cd].$$

Aus dieſer Proportion und daraus, dass die fünf Punkte c, d, (p), (q), (pq) in gerader Linie liegen, folgt ſogleich, wenn wir den Punkt (pq) der Kürze wegen mit r bezeichnen, dass c der Aehnlichkeitspunkt der beiden Punktvereine r, (q) und (p), d iſt. Zieht man daher über den Grundſeiten r(q) und (p)d die parallelen Dreiecke r(q)e und (p)df, ſo iſt c auch Aehnlichkeitspunkt dieſer Dreiecke, folglich liegen die entſprechenden Punkte e und f mit c in gerader Linie, wodurch r gefunden werden kann. Nimmt man ins Beſondere re und (p)f parallel mit a, und (q)e und df parallel mit b, ſo wird

$$f \equiv [(p)a \cdot db] \equiv [(p)aB],$$

da $[db] = B$ geſetzt war; ferner

$$e \equiv [fc \cdot (q)b],\ r \equiv [ea \cdot cd] \equiv [eaC],$$

Hosted by Google

da $[dc] \equiv C$ gefetzt war, und endlich

$$[ra] \equiv [ea],$$

was fich alles unmittelbar ergiebt, wenn man die betreffende Figur zeichnet. Setzt man in die letzten beiden Gleichungen die Werthe aus den beiden ersten ein, fo erhält man

$$r \equiv [(p)aBc((q)b)aC]$$
$$[ra] \equiv [(p)aBc((q)b)a],$$

und fetzt man in der obigen Beweisführung überall b statt a und umgekehrt, und A statt B, fo erhält man

$$r \equiv [(p)bAc((q)a)bC]$$
$$[rb] \equiv [(p)bAc((q)a)b],$$

und dies find, da $r = (pq)$ ist, die zu erweifenden Gleichungen.

327. Wenn a, b, c, d, A, B, C die Bedeutung haben wie im vorigen Satze und p, q, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Zahlen find, jedoch mit der Beschränkung, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ von Null verschieden fei, wenn ferner

$$(a) \quad r = \frac{\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$$

ist, und wie vorher (p), (q), (r) diejenigen Punkte der geraden Linie $[cd] \equiv C$ find, welche den Gleichungen

$$(b) \quad [c(p)] : C = p, \quad [c(q)] : C = q, \quad [c(r)] : C = r$$

genügen, fo ist

$$(r) \equiv [(p)a((q)b)(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Beweis. Substituirt man in der Gleichung $\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})r$ statt p, q, r ihre Werthe aus b, fo erhält man

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})[c(r)] = \mathfrak{a}[c(p)] + \mathfrak{b}[c(q)],$$

oder, da alles in derfelben geraden Linie liegt,

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})((r) - c) = \mathfrak{a}((p) - c) + \mathfrak{b}((q) - c) \quad [222],$$

alfo

$$* \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(r) = \mathfrak{a}(p) + \mathfrak{b}(q),$$

d. h. (r) ist der Schwerpunkt zwischen den vielfachen Punkten $\mathfrak{a}(p)$ und $\mathfrak{b}(q)$. Zieht man nun von (q) die Parallele mit b, und von (p) die Parallele mit a, welche fich in e schneiden, und ebenfo von d und c die Parallelen mit b und a, welche fich in f schneiden, fo find die Dreiecke dfc und (q)e(p) parallel, und alfo ähnlich, und es ist dann $d - f = b$ und

Hosted by Google

$f - c = a$. Wenn alſo $(q) - e = m(d - f)$ iſt, wo m eine Zahl bedeutet, ſo iſt $e - (p) = m(f - c)$, d. h. es iſt dann $(q) - e = mb$, $e - (p) = ma$. Ferner, wenn man zu der obigen Gleichung (*) auf beiden Seiten $-(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})e$ hinzufügt, ſo erhält man

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})((r) - e) = \mathfrak{a}((p) - e) + \mathfrak{b}((q) - e) = -m\mathfrak{a}a + m\mathfrak{b}b$$
$$= -m(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b).$$

Multiplicirt man beide Seiten planimetriſch mit e, ſo erhält man (nach 67)

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})[e(r)] = -m[e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)], \text{ alſo}$$
$$[e(r)] \equiv [e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)] \qquad [2],$$

d. h. (r) liegt in der geraden Linie $[e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)]$, aber (nach der Annahme) auch in der geraden Linie C, alſo im Durchſchnitt beider Linien, d. h.

$$(r) \equiv [e(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Nun iſt aber nach der angegebenen Konſtruktion e der Durchſchnitt der geraden Linie $[(p)a]$ und $[(q)b]$, alſo $e \equiv [(p)a \cdot (q)b]$, folglich

$$(r) \equiv [(p)a((q)b)(\mathfrak{a}a - \mathfrak{b}b)C].$$

Anm. Wenn auf die angegebene Weiſe die Zahlen durch Punkte der geraden Linie cd dargeſtellt ſind, ſo läſst ſich nach den beiden vorigen Sätzen ſowohl die Summe als auch das Produkt zweier Zahlen, alſo auch jede beliebige ganze Funktion von Zahlen durch ein planimetriſches Produkt darſtellen, welches aus den Punkten a, b, c, d und aus den die gegebenen Zahlen darſtellenden Punkten zuſammengeſetzt iſt. Hiermit wäre ſchon der Satz bewieſen, dass jede algebraiſche Kurve in der Ebene ſich durch ein gleich Null geſetztes planimetriſches Produkt darſtellen läſst. Doch ſoll im Folgenden noch gezeigt werden, wie man unmittelbar aus der gegebenen algebraiſchen Gleichung der Kurve jenes planimetriſche Produkt herleiten kann.

328. Wenn a und b Strecken ſind, c ein einfacher Punkt und $d = a + b + c$, $A \equiv [da]$, $B \equiv [db]$, $C \equiv [dc]$, $x = x_1 a + x_2 b + c$ iſt, ſo iſt die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = \mathfrak{a}x_1^m x_2^n + \mathfrak{b}x_1^p x_2^q + \mathfrak{c}x_1^r x_2^s + \cdots + \mathfrak{f}x_1^v x_2^w = 0,$$

in welcher die Summe der Koefficienten von null verſchieden iſt, für alle endlich entfernten Punkte x, gleichbedeutend der Gleichung

$$[Pc] = 0,$$

wo, wenn die Glieder von $f(x_1, x_2)$ ſo geordnet ſind, dass

Hosted by Google

die Summen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c},\cdots$ alle von Null verschieden ſind,

(a) $P \equiv [LL_1a_1CaL_2a_2CaL_3a_3Ca\cdots\cdots L_ka_k]$

(b) $a_1=\mathfrak{a}a-\mathfrak{b}b$, $a_2=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})a-\mathfrak{c}b$, $a_k=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots+\mathfrak{i})a-\mathfrak{k}b$

(c) $L \equiv [xb\mathfrak{R}^nCa\mathfrak{R}_1^{m-1}]$

(d) $L_1 \equiv [xa\mathfrak{R}_1^pCb\mathfrak{R}^{q-1}]$, $L_2 \equiv [xa\mathfrak{R}_1^rCb\mathfrak{R}^{s-1}],\cdots$
$L_k \equiv [xa\mathfrak{R}_1^vCb\mathfrak{R}^{w-1}]$

ist, und $\mathfrak{R}$ die Reihe der fortschreitenden Faktoren A, c, xa, b und $\mathfrak{R}_1$ die Reihe der fortschreitenden Faktoren B, c, xb, a bezeichnet, ſo dass alſo für jede Linie X,

(e) $[X\mathfrak{R}] \equiv [XAc(xa)b]$, $[X\mathfrak{R}_1] \equiv [XBc(xb)a]$ ist.

Beweis. Bezeichnen wir, wenn p eine beliebige Zahl ist, mit (p) denjenigen Punkt der Linie cd, für welchen

* $[c(p)] : [cd] = p$

ist, ſo erhalten wir (nach 323)

** $[(x_1)b] = [xb]$, $[(x_2)a] = [xa]$,

und (nach 324), wenn p eine beliebige Zahl ist,

$$[(px_2)b] \equiv [(p)bAc((x_2)a)b] \equiv [(p)bAc(xa)b] \quad [**]$$
$$\equiv [(p)b\mathfrak{R}] \quad [e].$$

Tritt zu px_2 noch ein Faktor x_2 hinzu, ſo tritt zu $(p)b\mathfrak{R}$ noch einmal die Faktorreihe $\mathfrak{R}$ hinzu u. ſ. w., alſo iſt

*** $[(px_2^n)\cdot b] \equiv [(p)b\mathfrak{R}^n]$;

und ebenſo erhält man, indem man x_2 und b mit x_1 und a, alſo $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1$ vertauscht,

**** $[(px_1^n)a] \equiv [(p)a\mathfrak{R}_1^n]$.

Alſo wenn $p = x_1$ iſt, alſo $[(p)b] \equiv [(x_1)b] \equiv [xb]$ (nach *), ſo wird

$$[(x_1x_2^n)\cdot b] \equiv [xb\mathfrak{R}^n].$$

Indem wir dieſen Ausdruck mit C multipliciren, erhalten wir den Punkt $(x_1x_2^n)$, d. h.

$$[(x_1x_2^n)] \equiv [xb\mathfrak{R}^nC].$$

Führt man daher $x_1x_2^n$ ſtatt p in die Formel *** ein, indem man zugleich $m-1$ ſtatt n ſetzt, ſo erhält man

$$[(x_1^mx_2^n)\cdot a] \equiv [xb\mathfrak{R}^nCa\mathfrak{R}_1^{m-1}] \equiv L \quad [c].$$

Ebenſo findet man

$$[(x_1^px_2^q)\cdot a] \equiv [xb\mathfrak{R}^qCa\mathfrak{R}_1^{p-1}],$$

oder, indem man a mit b, alſo auch x_1 mit x_2, p mit q, $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1$ umwechſelt,

Hosted by Google

$$[(x_1^p x_2^q)\cdot b] \equiv [xa\mathfrak{R}_1^p Cb\mathfrak{R}^{q-1}] \equiv L_1,$$

und ebenſo

$$[(x_1^r x_2^s)\cdot b] \equiv L_2$$
$$[(x_1^v x_2^w)\cdot b] \equiv L_k.$$

Um nun den Ausdruck für $(ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q) : (a + b)$ zu finden, hat man nur in 325 $x_1^m x_2^n$ und $x_1^p x_2^q$ statt p und q und alſo L und L_1 statt (p)a und (q)b zu ſetzen, und erhält

$$(ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q) : (a + b)) \equiv [LL_1(aa - bb)C]$$
$$\equiv [LL_1a_1C] \cdot [b].$$

Um ferner den Ausdruck für $(ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q + cx_1^r x_2^s) : (a + b + c)$ zu finden, hat man nur in 325 den Ausdruck $(a_1x_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q) : (a + b)$ statt p, und $x_1^r x_2^s$ statt q, und alſo L_2 statt (q)b und zugleich $a + b$ statt a, und c statt b zu ſetzen, und erhält

$$((ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q + cx_1^r x_2^s) : (a + b + c)) \equiv [LL_1a_1CaL_2a_2C],$$

da $(a + b)a - cb = a_2$ geſetzt war u. ſ. f.; endlich

$$((ax_1^m x_2^n + bx_1^p x_2^q + cx_1^r x_2^s + \cdots + fx_1^v x_2^w) : (a+b+c+\cdots+f)$$
$$\equiv [LL_1a_1CaL_2a_2C\cdots\cdots L_ka_kC]$$
$$\equiv [PC] \qquad [a].$$

Alſo

$$(f(x_1, x_2) : (a + b + c + \cdots f)) \equiv [PC].$$

Iſt nun $f(x_1, x_2) = 0$, ſo hat man $(0) \equiv [PC]$. Aber (nach *) iſt $[c(0)] : [cd] = 0$, alſo der Dividend $[c(0)]$ gleich Null, d. h. der Punkt (0) fällt mit c zuſammen, ſomit erhalten wir dann $c \equiv [PC]$, d. h. c iſt der Durchſchnittspunkt der geraden Linie P und C; er liegt alſo auch in P, d. h. (nach 293)

$$[Pc] = 0.$$

Umgekehrt, wenn dieſe letzte Gleichung erfüllt wird, ſo liegt c in P, aber (nach Hypotheſis) auch in C, alſo iſt $c \equiv [PC]$, d. h. der zu der Zahl $f(x_1, x_2) : (a + b + \cdots)$ gehörige Punkt liegt in c, d. h. jene Zahl iſt null, alſo ihr Zähler $f(x_1, x_2) = 0$.

329. Wenn alle übrigen Vorausſetzungen des vorigen Satzes beſtehen bleiben, aber jetzt angenommen wird, daſs die Summe der Koefficienten $(a + b + \cdots + f)$ null ſei, ſo iſt die Gleichung

$$f(x_1, x_2) = 0,$$

Hosted by Google

gleichbedeutend der Gleichung

$$[LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots\cdots L_{k-1}a_{k-1}L_kC] = 0,$$

wo die einzelnen Buchstaben dieſelbe Bedeutung haben, wie im vorigen Satze, und die Glieder in $f(x_1, x_2)$ auch hier ſo geordnet ſind, dass die Summen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \cdots$ alle, mit Ausnahme der letzten $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \cdots + \mathfrak{f})$, von Null verſchieden ſind.

Beweis. Man kann durch Diviſion mit dem Koefficienten des letzten Gliedes die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ auf die Form bringen, dass der Koefficient $(\mathfrak{f})$ des letzten Gliedes 1 wird; dann ist die Summe der übrigen Koefficienten -1. Es ſei das letzte Glied $-h$ und die Summe der übrigen ſei g, ſo ist die Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ gleichbedeutend der Gleichung $g - h = 0$, oder

$$g = h.$$

Dann ist nach der Entwickelung des vorigen Satzes

$$(g) \equiv [LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots L_{k-1}a_{k-1}C]$$
$$(h) \equiv [L_kC].$$

Da nun $g = h$ ist, ſo ſind auch die Punkte (g) und (h) kongruent, alſo

$$[LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots\cdots L_{k-1}a_{k-1}C] \equiv [L_kC].$$

Dieſe Kongruenz ſagt aus, dass der durch die linke Seite dargeſtellte Punkt in dem Durchſchnitte der Linien L_k und C liege, alſo namentlich auch in L_k liege, d. h. (nach 293)

$$[LL_1a_1CaL_2a_2Ca\cdots L_{k-1}a_{k-1}CL_k] = 0$$

ſei. Hier kann man (nach 315) auch die beiden letzten Faktoren vertauſchen, wodurch die zu erweiſende Gleichung hervorgeht; umgekehrt folgt aus dieſer letzten Gleichung wieder $g = h$, alſo $f(x_1, x_2) = 0$.

Anm. Es ist leicht zu erſehen, dass man in den vorhergehenden Sätzen, ſtatt a und b als Strecken und c als einfachen Punkt anzunehmen, auch allgemeiner a, b und c als drei beliebige, nicht in Einer geraden Linie liegende Punkte hätte annehmen können, wobei dann die Bedingung, dass x ein endlich entfernter Punkt ſein ſollte, erſetzt wird durch die andere, dass x nicht in der geraden Linie ab liege. Der Grund für die Zuläſſigkeit dieſer Verallgemeinerung liegt darin, dass (nach 110) die Geſetze der auf ein Hauptgebiet bezüglichen Multiplikation alle unverändert beſtehen bleiben, wenn man ſtatt der urſprünglichen Einheiten a, b, c drei andere aus ihnen

Hosted by Google

numerisch ableitbare wählt, wobei die dort aufgeführte Bedingung, dass das kombinatorische Produkt jener ſowohl als dieſer Einheiten 1 ſei, hier, wo es nur auf die Kongruenz ankommt, wegfällt. Betrachtet man die Formen der Gleichungen in 328, ſo zeigt ſich leicht, dass die planimetrische Gleichung $[Pc] = 0$ in Bezug auf x vom ſo vielten Grade ist, als die Summe aller Exponenten in der algebraischen Gleichung $f = 0$ beträgt; denn die Faktorenreihen $\mathfrak{R}$ enthielten den Punkt x nur je einmal, und die Grössen L waren daher mit den Gliedern der Funktion f nach der Reihe von gleichem Grade. Das Produkt [Pc], welches jede dieſer Grössen L einmal als Faktor enthält, und ausserdem nur konstante Faktoren, ist daher in Bezug auf x vom ſo vielten Grade, als die Summe der Gradzahlen aller Glieder von f beträgt, alſo, ſobald f mehr als ein variables Glied enthält, von höherem Grade als f. Es ſei n der Grad der Funktion f, und $n + p$ der Grad des Produktes [Pc]. Da nun die Gleichungen $[Pc] = 0$ und $f = 0$ (nach 328) für alle Punkte x, die nicht in der (unendlich entfernten) Geraden ab liegen, ganz gleichbedeutend ſind, ſo kann die Differenz des Grades nur darin liegen, dass die Gleichung $[Pc] = 0$ noch p Linien darstellt, welche in ab fallen. Um dieſe Verhältnisse genauer zu überschauen, führe ich statt x den Punkt y ein, und ſetze $y = ua + vb + wc$, wo u, v, w Zahlen ſind, und ſetze die ursprünglichen Koordinaten von x beziehlich gleich $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$. Dann wird $y = xw$, alſo $y \equiv x$, falls nicht w null ist. Dieſer Fall, wo $w = 0$ ist, ist aber derſelbe, wo $y = ua + vb$, d. h. y ein Punkt der Linie ab ist, alſo derſelbe, welcher in 328 ausgeschlossen war. In allen dort zugelassenen Fällen wird alſo das Produkt, welches aus [Pc] hervorgeht, indem man hierin y statt x ſetzt, und welches ich mit Q bezeichnen will, mit [Pc] kongruent (nach 313). Multiplicirt man die Funktion n-ten Grades f mit w^n, ſo geht aus f, da die darin enthaltenen Variabeln $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ waren, eine homogene Funktion n-ten Grades hervor, welche ich mit F bezeichnen will, und welche für dieſelben Fälle null wird, für welche f null wurde. Alſo ist für den Fall, dass y nicht in ab liegt, d. h. w nicht null ist, die Gleichung $Q = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $F = 0$. Da aber die erstere vom $n + p$-ten, die letztere vom n-ten Grade ist, ſo muss die Gleichung $Q = 0$ in allen Fällen der Gleichung $w^p F = 0$ gleichbedeutend ſein, alſo

$$Q \equiv w^p F \equiv [aby]^p F,$$

letzteres, weil aus $y = ua + vb + wc$ folgt $w \equiv [aby]$. Es muss alſo Q durch $[aby]^p$ theilbar ſein. Es käme daher darauf an, das planimetrische Produkt Q in ein kongruentes Produkt zu verwandeln, welches von dieſen Faktoren [aby] befreit ſei. Allein

Hosted by Google

da dieſe Reduktion, wenn ſie überhaupt ausführbar ist, in der Regel auf grosse Schwierigkeiten stösst, ſo ist es zweckmässig, zuerst die algebraische Gleichung durch Veränderung des Koordinatenſystemes ſo umzugestalten, dass ſie möglichst wenig variable Glieder enthält, ehe man zur Ableitung der planimetrischen Formel schreitet. So z. B. lässt ſich die Gleichung dritten Grades auf die Form $pqr = ms^3$ bringen, wo p, q, r, s lineare Funktionen der Koordinaten ſind, und m eine konstante Zahl bezeichnet. Verlegt man dann durch Projektion die gerade Linie, deren Gleichung $s = 0$ ist, ins Unendliche, ſo wird die Gleichung

$$pqr = m,$$

welche nach den obigen Regeln umgewandelt, eine geometrische Gleichung dritten Grades liefert von der Form

$$[xaBc(xb)aCdEfx] = 0,$$

und welche bei jeder Projektion bestehen bleibt, alſo auch, wenn man der ins Unendliche verlegten Linie durch Projektion wieder die ursprüngliche Lage giebt. Es hat keine Schwierigkeit, die hier entwickelten Principien auch auf die Oberflächen im Raume zu übertragen; doch muss ich, um hier nicht zu weitläuftig zu werden, auf meine Abhandlungen in Crelle's Journal, namentlich auf Band 49, pag. 1 u. f. verweiſen.

§. 7. Innere Multiplikation in der Geometrie.

330. Erklärung. Für die innere Multiplikation nehme ich als ursprüngliche Einheiten im Raume stets drei zu einander ſenkrechte und gleich lange Strecken (e_1, e_2, e_3), in der Ebene deren zwei (e_1 und e_2) an, und zwar nehme ich die Längen dieſer Strecken als Einheit der Längen an, und $[e_1e_2e_3]$ und in der Ebene $[e_1e_2]$ als Einheit der Körper- oder Flächenräume.

Anm. Hierdurch ſind alſo alle von dem Begriffe der inneren Multiplikation abhängigen Erklärungen und Sätze (No. 137 – 215) auch auf die Geometrie übertragen.

331. Für die Ebene fällt der Begriff der Länge mit dem des numerischen Werthes, der Begriff des Senkrechten mit dem des Normalen, und der Begriff der Drehung um den Winkel α mit dem der circulären Aenderung um den Winkel α zuſammen, wobei der Winkel als poſitiv anzunehmen ist, wenn ſein zweiter Schenkel vom ersten aus nach derſelben Seite liegt, wie die zweite Einheit (e_2) von der ersten (e_1) aus.

Hosted by Google

Beweis 1. Alle im Satze genannten analytischen Begriffe (normal, numerischer Werth, circuläre Aenderung) ſind (in 151—154) an den Begriff des inneren Produktes, und dieſer wiederum (nach 137) an den der Ergänzung (89 und 90). Die Ergänzung von a war mit |a bezeichnet. Ich zeige daher zuerst, dass wenn $a = x_1e_1 + x_2e_2$ eine beliebige Strecke der Ebene ist, dann |a gegen a ſenkrecht und mit a gleich lang ist, und von a aus nach derſelben Seite liegt, wie e_2 von e_1. Es ſei AB mit x_1e_1 gleich lang und gleichgerichtet, BC mit x_2e_2, AD mit $x_1|e_1$, und DE mit $x_2|e_2$. Nach 89 ist $|e_1 = e_2$, und $|e_2 = -e_1$, alſo $AD = x_1e_2$, $DE = -x_2e_1$. Da nun (nach 330) e_1 und e_2 gleich lang ſind, ſo ist auch x_1e_2 mit x_1e_1 gleich lang, d. h. AD mit AB, und ebenſo $-x_2e_1$ mit x_2e_2 gleich lang, d. h. DE mit BC. Da ferner (nach 330) e_2 zu e_1 ſenkrecht ist, ſo ist auch x_2e_2 zu x_1e_1 ſenkrecht und x_2e_1 zu x_1e_2, d. h. BC zu AB und DE zu AD, folglich ſind die Dreiecke ABC und ADE kongruent (durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel), alſo AC gleich lang mit AE. Ferner liegt aber auch e_2 von e_1 aus nach derſelben Seite, wie $-e_1$ von e_2 aus, alſo auch BC von AB aus nach derſelben Seite, wie DE von AD aus, d. h. die Winkel BAC und DAE ſind auch dem Zeichen nach gleich. Nun ist $\angle CAE = \angle CAD + DAE = \angle CAD + BAC$ (wie oben gezeigt) $= \angle BAD$, d. h. AE steht ſenkrecht auf AC, und zwar nach derſelben Seite hin, wie AD von AB aus, alſo auch wie e_2 von e_1 aus. Es ist aber (nach 220) AC mit $x_1e_1 + x_2e_2$, d. h. mit a gleich lang und gleichgerichtet, und AE mit $x_1|e_1 + x_2|e_2$, d. h. mit |a (nach 101). Alſo ist |a mit a gleich lang, und steht auf a ſenkrecht nach derſelben Seite hin wie e_2 auf e_1.

2. Numerischer Werth von a ist (nach 151) die poſitive Quadratwurzel aus [a|a], wobei (nach 89) das Produkt $[e_1e_2]$ als Einheit geſetzt ist. Nun ist [a|a] (nach 254) einem Parallelogramme gleich (auch dem Zeichen nach), deſſen erste Seite mit a, und deſſen zweite mit |a gleich lang und gleichgerichtet ist; dies Parallelogramm ist (nach Beweis 1) ein Quadrat, welches dem (nach 330) als Einheit angenommenen Quadrate $[e_1e_2]$ gleichbezeichnet ist, ist nun die Länge von

Hosted by Google

a (e_1 als Längeneinheit genommen) gleich α, ſo ist der Inhalt des Quadrates über a gleich α^2, und die poſitive Quadratwurzel daraus α, d. h. $\sqrt{[a|a]} = \alpha$, d. h. der numeriche Werth gleich der Länge.

3. Nach 152 heissen zwei Strecken a und b normal zu einander, wenn $[a|b] = 0$ ist, d. h. (nach 254) wenn a mit |b parallel ist; nun ist (nach Beweis 1) |b ſenkrecht auf b, alſo auch das mit |b parallele a ſenkrecht auf b; ebenſo folgt umgekehrt, dass wenn a auf b ſenkrecht ist, a mit |b parallel ist, alſo [a|b] gleich null, alſo a zu b normal ist. Der Begriff des Senkrechten fällt alſo (in der Ebene) mit dem des Normalen zuſammen.

4. Wenn a und b einander numerisch gleich und zu einander normal ſind, und ſich a in $a' = a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$, und b in $b' = b\cos.\alpha - a\sin.\alpha$ verwandelt hat, ſo hiess das (nach 154), der Verein der Strecken a und b habe ſich von a nach b hin circulär um den Winkel α geändert. Es ſei AF mit a und AG mit b gleich lang und gleichgerichtet, alſo, da a und b einander numerisch gleich und zu einander normal ſind, ſo ist (nach Beweis 1) AG mit AF gleich lang und auf AF ſenkrecht; man trage an AF und an AG nach derſelben Seite hin den Winkel α an, und mache die zweiten Schenkel AC und AE gleich lang mit AF; fälle von C das Loth CB auf AF und von E das Loth ED auf AG, ſo ist AB mit $a\cos.\alpha$, BC mit $b\sin.\alpha$, AD mit $b\cos.\alpha$, DE mit $-a\sin.\alpha$ gleich lang und gleichgerichtet, alſo (nach 220) AC mit $a\cos.\alpha + b\sin.\alpha$, d. h. mit a', und AE mit $b\cos.\alpha - a\sin.\alpha$, d. h. mit b' gleich lang und gleichgerichtet; a' und b' gehen aber nach der Konſtruktion aus a und b durch Drehung um den Winkel α hervor; folglich fällt der Begriff der Drehung um den Winkel α mit dem der circulären Aenderung um dieſen Winkel zuſammen.

Anm. Dieſelbe Schlussreihe ist alſo für jede Ebene anwendbar, in welcher zwei Strecken a und b enthalten ſind, für welche dieſelben Vorausſetzungen gemacht ſind, wie für e_1 und e_2.

332. Das Normalſyſtem im Raume ist identisch mit dem Verein von drei gegeneinander ſenkrechten und gleich langen

Hosted by Google

Strecken, und zwar ist die Länge dieſer Strecken gleich dem numeriſchen Werthe des Normalſyſtems.

Beweis 1. Das System der urſprünglichen Einheiten e_1, e_2, e_3 bildet (nach 162) ein einfaches Normalſyſtem, und e_1, e_2, e_3 ſind (nach 330) auf einander ſenkrecht und von der Länge der Einheit. Jedes andere einfache Normalſyſtem von drei Strecken läſst ſich (nach 161) aus jenem Noramlſyſtem durch circuläre Aenderung ableiten. Hat man nun ein einfaches Normalſyſtem a, b, c, in welchem a, b, c auf einander ſenkrecht und von der Länge eins ſind, ſo besteht die circuläre Aenderung darin, dass irgend zwei derſelben, z. B. a und b ſich um einen in der Ebene ab liegenden Winkel α ändern; nun haben wir in 331 (vergl. Anm.) gezeigt, dass die dadurch hervorgehenden Strecken a′ und b′ wieder auf einander ſenkrecht stehen, und die Länge 1 haben; aber auch c steht auf ihnen ſenkrecht, denn da nach der Annahme c auf a und b ſenkrecht steht, ſo steht c auch auf allen Linien der Ebene ab, alſo auch auf a′ und b′ ſenkrecht; d. h. aus einem Normalſyſtem, dessen drei Strecken auf einander ſenkrecht stehen, und von der Länge der Einheit ſind, geht durch einfache circuläre Aenderung wieder ein Normalſyſtem von derſelben Art hervor, alſo auch durch wiederholte circuläre Aenderung. Alſo geht namentlich aus dem Normalſyſtem e_1, e_2, e_3 durch beliebig circuläre Aenderung stets ein Verein von drei Strecken hervor, welche auf einander ſenkrecht, und von der Länge der Einheit ſind, d. h. jedes einfache Normalſyſtem besteht aus ſolchen drei Strecken.

2. Umgekehrt ist zu zeigen, dass wenn a, b, c irgend drei zu einander ſenkrechte Strecken von der Länge 1 ſind, ſie ein Normalſyſtem bilden. Nach 160 kann man stets ein einfaches Normalſyſtem von drei Strecken finden, dessen eine die Richtung von c hat, dann muss (nach Beweis 1) die Länge 1 ſein, und alſo die Strecke, welche die Richtung von c hat, auch mit c gleich lang, alſo überhaupt gleich ſein, die beiden andern mögen a′ und b′ ſein, ſo ist (nach Beweis 1) c ſenkrecht auf a′ und b′, aber auch (nach Annahme) auf a und b, alſo liegen a′, b′, a, b in Einer Ebene. Alſo kann man wiederum

Hosted by Google

(nach 160) ein einfaches Normalſyſtem aus zwei Strecken dieſer Ebene finden, von denen die eine Strecke gleich b ist, die andere ſei a″, ſo ist a″, da es in der Ebene ab liegt, ſenkreckt auf c, aber (nach Beweis 1) auch ſenkrecht auf b und von der Länge 1, alſo ist a″ ſenkrecht auf der Ebene bc, aber auch a ſenkrecht darauf und von der Länge 1, alſo ist a″ entweder = a, oder = − a, da nun a″, b, c ein einfaches Normalſyſtem bilden, ſo bilden in beiden Fällen auch a, b, c ein ſolches.

3. Hat man nun ein beliebiges Normalſyſtem a, b, c von dem numeriſchen Werth n, ſo bilden $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$ ein einfaches Normalſyſtem, ſind alſo (nach Beweis 1) zu einander ſenkrecht und von der Länge 1, alſo ſind a, b, c auch zu einander ſenkrecht und von der Länge n; und ebenſo folgt umgekehrt, daſs wenn a, b, c zu einander ſenkrecht und von der Länge n ſind, dann $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$ ein einfaches Normalſyſtem, und a, b, c ein Normalſyſtem von der Länge n bilden.

333. Auch für den Raum fällt der Begriff der Länge mit dem des numeriſchen Werthes, und der des Senkrechten mit dem des Normalen zuſammen.

Beweis in 332.

334. Der numeriſche Werth eines Produktes P zweier Strecken p und q ist gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms, in welchem zwei aneinanderſtoſſende Seiten jenen Strecken parallel ſind, vorausgeſetzt, daſs dieſer Inhalt poſitiv, und das Quadrat der Längeneinheit als Flächeneinheit angenommen wird.

Beweis. Es ſei ein einfaches Normalſyſtem dreier Strecken a, b, c angenommen, von der Art, daſs a und b derſelben Ebene parallel ſind, welcher p und q parallel ſind, und daſs [abc] = + 1 ist, ſo ſind (nach 230) p und q aus a und b numeriſch ableitbar, alſo auch (nach 36) P = [pq] aus [ab], und ſei P = α[ab]. Nun ist der numeriſche Werth von P (nach 151) = $\sqrt{[P|P]} = \alpha\sqrt{[ab|ab]}$; aber (nach 137) ist |[ab]

Hosted by Google

$= c$, alfo $\sqrt{[P|P]} = \alpha[abc] = \alpha$. Da aber $P = \alpha[ab]$ ist, und $[ab]$ Quadrat der Längeneinheit, alfo als Flächeneinheit zu fetzen ist, fo ist der Inhalt von P, d. h. der Inhalt des Parallelogramms, dessen erste Seite p, und dessen zweite q ist, gleich α, d. h. gleich dem numerischen Werthe von P.

335. Die Ergänzung einer Strecke ist diejenige Fläche, deren Ebene auf jener Strecke fenkrecht, deren numerischer Werth gleich dem jener Strecke, und deren pofitiver Sinn fo bestimmt ist, dass das äussere Produkt der Strecke und Fläche pofitiv ist.

Beweis. Es fei αa die Strecke, und fei der numerische Werth von a gleich 1, alfo der von αa gleich α, und fei ein Normalfystem a, b, c angenommen, und zwar von der Art, dass $[abc] = +1$ ist, fo ist (nach 167) $|a = [bc]$, alfo (nach 90) $|\alpha a = \alpha[bc]$, aber $\alpha[bc]$ ist eine Fläche von der im Satze angegebenen Beschaffenheit.

336. Wenn A die Ergänzung von einer Strecke a ist, fo ist auch a die Ergänzung von A, oder

$$||a = a.$$

Beweis. Nach 92 ist $||A = (-1)^{pq}A$, wo p die Stufenzahl von A, und q die der Ergänzung ist. In unferm Falle find diefe Stufenzahlen 1 und 2, alfo

$$||a = (-1)^2 a = a.$$

Anm. Der Satz gilt nicht in entsprechender Weife für die Planimetrie, wo nicht mehr als zwei zu einander fenkrechte Strecken angenommen werden können. Vielmehr ist in der Planimetrie $||a = -a$.

337. Wenn a und b Strecken find, fo ist $\angle ab$ gleich dem Winkel, dessen Schenkel mit a und b gleichgerichtet find, und wenn A und B Flächen (Streckenprodukte) find, fo ist $\angle AB$ gleich dem Neigungs-Winkel, den zwei mit jenen Flächen parallele und gleichbezeichnete Ebenen mit einander bilden, vorausgefetzt, dass die Winkel stets pofitiv (zwischen 0 und π liegend) angenommen werden.

Anm. Wenn man im zweiten Falle A und B in Form von Rechtecken darstellt, deren erste Seite diefelbe ist, fo ist der Winkel, den die zweiten Seiten diefer Rechtecke einschliessen, der Neigungswinkel, den die mit A und B parallelen und gleichbezeichneten Ebenen mit einander bilden.

Hosted by Google

Beweis 1. Der Winkel ist von den numerischen Werthen der den Winkel bildenden Grössen unabhängig, wir können daher die numerischen Werthe von a, b, A, B gleich 1 ſetzen, in dieſem Falle ist (nach 195)

$$\cos.\angle ab = [a|b],\quad \cos.\angle AB = [A|B].$$

Ferner geht dann, wenn der Winkel von a nach b hin gleich α ist (nach 154, 331) b aus a durch circuläre Aenderung um den Winkel α hervor, d. h. es ist, wenn a′ in der Ebene ab gegen a ſenkrecht ist, und nach der Seite von b hin liegt,

$$b = a\cos.\alpha + a'\sin.\alpha,$$

alſo

$$[a|b] = [a|(a\cos.\alpha + a'\sin.\alpha)] = [a|a]\cos.\alpha + [a|a']\sin.\alpha,$$

aber da a′ gegen a normal ist, ſo ist $[a|a'] = 0$, und da der numerische Werth von a gleich Eins ist, ſo wird der zuletzt gefundene Ausdruck

$$= \cos.\alpha.$$

Alſo $\cos\angle ab = \cos.\alpha$. Nun liegt (nach 195) $\angle ab$ zwischen 0 und π, aber nach Vorausſetzung auch α, alſo $\angle ab = \alpha$.

2. Es ſeien A und B beziehlich die Ergänzungen von a und b, alſo $A = |a$, und $B = |b$, ſo ſind (nach 335) a und b beziehlich auf A und B ſenkrecht und nach derſelben Seite hin liegend, alſo ist der Neigungswinkel α zwischen A und B gleich dem Winkel zwischen a und b, d. h. (nach Beweis 1) $\cos.\alpha = \cos.\angle ab = [a|b] = |[a|b]$ (nach 89), da $[a|b]$ (nach 141) eine Zahl ist; aber $|[a|b] = [|a||b]$ (nach 99), und dies wieder (nach der Annahme) $= [A|B] = \cos.\angle AB$; alſo $\cos.\alpha = \cos.\angle AB$.

Anm. Der Begriff des Normalen lässt ſich zwar auf Grössen jeder Art, alſo auch auf Punkte anwenden. Namentlich muss man, um alle Grössen im Raume ableiten zu können, ausser den drei zu einander ſenkrechten Strecken von der Länge 1, die wir als ursprüngliche Einheiten ſetzten, noch einen vierten endlich entfernten Punkt als vierte Einheit annehmen. So würde man zu vier ursprünglichen Einheiten a, b, c, d gelangen, von denen etwa die drei letzten drei zu einander ſenkrechte Strecken von der Länge 1 ſind, und die erste ein einfacher Punkt ist. Auf dieſen Verein würde man den Begriff des Normalen anwenden können. Nimmt man statt dessen einen andern Verein a′, b, c, d, worin a′ einen von a verschiedenen einfachen Punkt bezeichnet, als das System der ursprünglichen Einheiten an,

Hosted by Google

ſo leuchtet ein, dass a und a′ dieſelbe Ergänzung [bcd] haben, da (nach 268) [abcd] = [a′bcd] ist, und ebenſo, dass [a′b] und [ab] dieſelbe Ergänzung c, und [a′bc] und [abc] dieſelbe Ergänzung d haben, und überhaupt, dass die Ergänzung von Punkten, Linientheilen, Flächentheilen unabhängig ist von der Lage des als ursprüngliche Einheit angenommenen Punktes. Hingegen ist dies nicht mehr der Fall bei der Ergänzung von Strecken oder Streckenprodukten. So z. B. würde die Ergänzung von [bcd] bei der ersten Annahme gleich — a, bei der zweiten gleich — a′ ſein. Und ſo würde alſo der Begriff der Ergänzung von Strecken und Streckenprodukten keinen von der Lage der ursprünglichen Einheiten unabhängigen Sinn mehr haben. Da bei der normalen Zurückleitung (164) auf Punkte, Linien und Ebenen nur die erste Art der Ergänzung hervortritt, ſo können wir dieſe Zurückleitung unmittelbar auf die Geometrie übertragen. Sie liefert hier, wie oben (164) angedeutet wurde, die ſenkrechte Projektion, was ich hier jedoch nicht weiter darlegen will. Ueberhaupt werde ich den Begriff der Ergänzung nur in dem im Texte gegebenen Sinne anwenden.

338. Die Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2[a|b] + b^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos.\angle ab + \beta^2,$$

wo α und β die Längen von a und b ſind, ſtellt die Erweiterung des pythagoreischen Satzes dar, nämlich: das Quadrat der Grundſeite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der Schenkelſeiten und des doppelten Produktes der Schenkelſeiten in den cos. des Aussenwinkels an der Spitze.

339. Die Formel

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2[b|c] + 2[c|a] + 2[a|b] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos.\angle bc \\ &\quad + 2\gamma\alpha \cos.\angle ca + 2\alpha\beta \cos.\angle ab,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Längen der Strecken a, b, c ſind, ſtellt die Erweiterung jenes Satzes für den Raum dar.

340. Die Formel

$$\begin{aligned}(A + B + C)^2 &= A^2 + B^2 + C^2 + 2[B|C] + 2[C|A] + 2[A|B] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos.\angle BC \\ &\quad + 2\gamma\alpha \cos.\angle CA + 2\alpha\beta \cos.\angle AB,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Flächeninhalte der Flächenräume A, B, C und $\angle BC$ u. ſ. w. die Neigungswinkel ihrer Ebenen ſind, ſtellt den Satz dar:

Das Quadrat der Grundfläche eines Tetraeders ist gleich

Hosted by Google

der Summe der Quadrate der Seitenflächen, vermindert um die doppelten Produkte je zweier diefer Seitenflächen in den cofinus des von ihnen eingeschlossenen Neigungswinkels.

Beweis. Sind a, b, c die von der Spitze nach den Ecken der Grundfeite führenden Kanten ihrer Länge und Richtung nach, fo find a — b, b — c, c — a die Kanten der Grundfläche. Die Grundfläche ist alfo (nach 254) $= \frac{[(a-b)(b-c)]}{2}$, während die Seitenflächen $= \frac{[bc]}{2}, \frac{[ca]}{2}, \frac{[ab]}{2}$ find. Bezeichnen wir die letzteren beziehlich mit A, B, C, und die Grundfläche $\frac{[(a-b)(b-c)]}{2}$ mit D, und bedenken, dass $[(a-b)(b-c)] = [ab] - [ac] - [bb] + [bc] = [ab] + [ca] + [bc]$ ist, fo haben wir

$$D = A + B + C,$$

alfo

$$\begin{aligned} D^2 &= (A + B + C)^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2[B|C] + 2[C|A] + 2[A|B] \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos.\angle BC \\ &\quad + 2\gamma\alpha \cos.\angle CA + 2\alpha\beta \cos.\angle AB. \end{aligned}$$

Aber $\angle BC$ ist der Winkel zwischen den Ebenen [ca] und [ab], d. h. zwischen — [ac] und [ab]. Der Winkel zwischen [ac] und [ab] ist aber der von den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders eingeschlossene, und alfo der Winkel zwischen — [ac] und [ab], d. h. $\angle BC$, deffen Nebenwinkel, und dasfelbe gilt für die Winkel $\angle CA$ und $\angle AB$.

Anm. Man fieht aus diefer Darstellung, wie fich die Auflöfung des Tetraeders vermöge der Beziehung, dass eine Seitenfläche desfelben fich als geometrische Summe der übrigen darstellen lässt, auf eine einfache Weife aus unfrer Analyfe ergeben muss. Und da wiederum das sphärische Dreieck oder die dreikantige Ecke fich auf ein Tetraeder zurückführen lässt, in welchem drei Kanten Radien der Kugel find, fo zeigt fich, wie auch die sphärische Trigonometrie fich eng daran anschliesst. Ich bemerke hier noch, dass alle Formeln der sphärischen Trigonometrie fymmetrischer werden, wenn man, wie schon oben geschehen ist, statt der Neigungswinkel der Flächen ihre Aussenwinkel fetzt. Dies zeigt fich befonders darin, dass dann die Winkel der Polarecke gleich den Seiten der urfprünglichen Ecke

Hosted by Google

werden, und umgekehrt, und daher dann alle Formeln der sphärischen Trigonometrie unmittelbar ihre Geltung behalten, wenn man Winkel und Seiten vertauscht. Es ergiebt ſich unmittelbar, dass wenn a, b, c Strecken ſind, die den Kanten einer Ecke gleichgerichtet ſind, dann die Ergänzungen jener Strecken, d. h. die Flächenräume |a, |b, |c den Ebenen der Polarecke parallel ſind. Die weitere Entwickelung dieſer Ideen muss ich jedoch, um nicht zu weit von dem Ziele abzuſchweifen, dem Leſer überlassen.

341. Aufgabe. Die Vielfachenſumme der Quadrate der Abstände eines variablen Punktes x von mehreren festen Punkten a, b,$\cdots$ in einfachster Form auszudrücken, wenn die Koefficienten $\alpha, \beta, \cdots$ jener Vielfachenſumme gegeben ſind.

Auflöſung. Es ſoll demnach ein Ausdruck

$$S = \alpha(x-a)^2 + \beta(x-b)^2 + \cdots$$

in einfachster Form dargestellt werden. Da x, a, b,$\cdots$ Punkte ſind, und für ſie das innere Produkt keine einfache Bedeutung mehr hat, ſo nehmen wir einen beliebigen einfachen Punkt s zu Hülfe, und ſetzen

$$x-a = x-s+s-a,\quad x-b = x-s+s-b,$$

u. ſ. w., wo $x-s$, $s-a$, $s-b$, $\cdots$ Strecken ſind, ſo wird

$$S = \alpha(x-s+s-a)^2 + \beta(x-s+s-b)^2 + \cdots.$$

Da nun $(x-s+s-a)^2 = (x-s)^2 + 2[(x-s)|(s-a)] + (s-a]^2$ ist (nach 338), ſo erhalten wir

$$S = (\alpha+\beta+\cdots)(x-s)^2 + 2[(x-s)|(\alpha(s-a) + \beta(s-b)+\cdots)] + \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2,$$

oder wenn wir

$$\alpha+\beta+\cdots = \sigma$$

ſetzen

$$S = \sigma(x-s)^2 + 2[(x-s)|(\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots)] + \alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots.$$

Nun können wir zwei Fälle unterſcheiden, je nachdem σ null ist oder nicht. Nehmen wir zuerſt letzteres an, ſo können wir s ſo wählen, dass das zweite Glied null wird, was dadurch erreicht wird, dass wir

$$\sigma s = \alpha a + \beta b + \cdots, \text{ d. h. } s \equiv \alpha a + \beta b + \cdots$$

ſetzen, d. h. (nach 222) s im Schwerpunkt des Punktſyſtems αa, βb, u. ſ. w. annehmen. Dann wird

$$S = \sigma(x-s)^2 + \mu,$$

Hosted by Google

wenn wir der Kürze wegen die konstante Grösse

$$\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots=\mu$$

ſetzen, d. h.:

„Die Vielfachenſumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren konstanten Punkten a, b,··· erreicht, wenn α, β,···· die Koefficienten jener Vielfachenſumme ſind, und die Summe σ dieſer Koefficienten poſitiv ist, ihren kleinsten Werth, wenn x in den Schwerpunkt s des Punkt-Vereines αa, $\beta b\cdots$ liegt. Wenn ſich dagegen x aus dieſem Schwerpunkt s um den Abstand ϱ entfernt, ſo wächst jene Vielfachenſumme um das σ-fache von dem Quadrat dieſer Strecke, und ist alſo für alle Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, welche s zum Mittelpunkt hat, konstant. Wird σ negativ, ſo bleibt alles dasſelbe, nur dass statt des minimums ein maximum eintritt.“

342. Fortſetzung. Wenn zweitens $\alpha+\beta+\cdots=0$ geſetzt wird, ſo verwandelt ſich die Formel * der vorigen Nummer in

$$S=-2[(x-s)|(\alpha a+\beta b+\cdots)]+\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots.$$

Hier ist (nach 222) die Summe $\alpha a+\beta b+\cdots$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung, welche wir mit r bezeichnen wollen, ſo ist

$$S=-2[(x-s)|r]+\alpha(s-a)^2+\beta(s-b)^2+\cdots$$

Es ſei nun angenommen, dass r nicht null ist, und ſeine Länge gleich ϱ ſei. Um nun den Ausdruck noch weiter zu reduciren, nehmen wir einen Punkt s′ in der von s mit r parallel gezogenen geraden Linie an, und ſetzen $s'-s=zr$, wo z eine Zahl ist, da $s'-s$ nach der Konſtruktion mit r parallel ist. Dann wird

$$[(x-s)|r]=[(x-s'+s'-s)|r]=[(x-s')|r]+[(s'-s)|r].$$

Aber $[(s'-s)|r]$ ist gleich $[zr|r]=z[r|r]$, da z eine Zahl ist, alſo $=zr^2=z\varrho^2$, da ϱ der numeriſche Werth von r ist. Alſo wird $[(x-s)|r]=[(x-s')|r]+z\varrho^2$, und

$$S=-2[(x-s')|r]-2z\varrho^2+\alpha(s-a]^2+\beta(s-b)^2+\cdots.$$

Hosted by Google

Da s′ ein beliebiger Punkt in der geraden Linie sr ist, so ist z noch unbestimmt, es sei z so bestimmt, dass

$$z = \frac{\alpha(s-a)^2 + \beta(s-b)^2 + \cdots}{2\varrho^2}$$

ist, so wird

$$S = -2[(x - s')|r].$$

Fällt man nun von x das Loth xx′ auf die gerade Linie sr oder s′r, so ist $x - x'$ normal zu r, d. h. $[(x - x')|r] = 0$, also

$$[(x - s')|r] = [(x - x' + x' - s')|r] = [(x' - s')|r],$$

also $$S = -2[(x' - s')|r] = \pm 2\varphi\varrho,$$

wenn φ die Länge von $x' - s'$ ist, und das untere oder obere Zeichen gewählt wird, je nachdem $x' - s'$ mit r gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, d. h.:

„Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten a, b,·· wird, wenn α, β,··· die Koefficienten jener Vielfachensumme, und die Summe dieser Koefficienten null ist, null für alle Punkte einer gewissen Ebene, welche auf der Strecke $r = \alpha a + \beta b + \cdots$ senkrecht steht. Wenn sich der Punkt x dagegen um den Abstand φ von dieser Ebene entfernt, so wird jene Summe $= -2\varphi\varrho$ oder $+2\varphi\varrho$, je nachdem er sich in der Richtung der Strecke r oder in der ihr entgegengesetzten von jener Ebene entfernt hat, wobei ϱ die Länge von r ausdrückt.“

343. Schluss. Ist endlich auch r null, so wird

$$S = \alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots,$$

d. h. konstant, d. h.

„Die Vielfachensumme S der Quadrate der Abstände eines variabeln Punktes x von mehreren festen Punkten a, b,··· ist konstant, wenn die entsprechende Vielfachensumme der Punkte a, b,··· null ist, d. h.

$$\alpha(x - a)^2 + \beta(x - b)^2 + \cdots = \text{Const.},$$

wenn $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ ist.“

Nämlich die Gleichung $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ schliesst (nach 222) schon die Gleichung $\alpha + \beta + \cdots = 0$ ein.

344. Aufgabe. Die Vielfachensumme S der Abstände eines variablen Punktes x von mehreren festen Ebenen A,

Hosted by Google

B,··· in einfachster Form auszudrücken, wenn die Koefficienten α, β,··· jener Vielfachenſumme gegeben ſind, und für jede Ebene die Seite, nach welcher die poſitiven Abstände liegen ſollen, bestimmt ist.

Auflöſung. Man nehme in jeder der Ebenen einen Flächenraum an, dessen numerischer Werth 1 ist, und welcher (ſeiner Erzeugungsweiſe nach) ſo beschaffen ist, dass das äussere Produkt dieſes Flächenraums mit einer Strecke, die nach der als poſitiv angenommenen Seite der Ebene gerichtet ist, ein poſitives Produkt bildet. Dieſe Flächenräume, aufgefasst als Theile der betreffenden Ebenen, d. h. als Grössen dritter Stufe (255) ſeien beziehlich mit A′, B′,··· bezeichnet, ſo ist das Produkt [A′x] (nach 263) gleich dem Inhalte eines Spates (Parallelepipedums), dessen Grundfläche A′ ist, und dessen Deckfläche (der Grundfläche gegenüberliegende Fläche) durch den Punkt x geht, alſo gleich A′ mal der Höhe, oder da A′ numerisch gleich 1 ist, gleich der Höhe, d. h. gleich der Entfernung des Punktes x von der Ebene A, und zwar auch dem Zeichen nach, und ebenſo für die andere Ebene. Alſo ist

$$\begin{aligned} S &= \alpha[A'x] + \beta[B'x] + \cdots \\ &= [(\alpha A' + \beta B' + \cdots)x] \\ &= \varrho[Rx], \end{aligned}$$

wenn ϱR die entsprechende Vielfachenſumme der Flächentheile A′, B′,···, und R numerisch gleich 1, ϱ aber poſitiv ist.

„Die Vielfachenſumme S der Abständen eines variablen Punktes x von mehreren festen Ebenen A, B,···· mit den Koefficienten α, β,··· steht zu dem Abstande desſelben Punktes von einer festen Ebene R in einem konstanten Verhältniss $\varrho : 1$, und zwar findet man R und ϱ, wenn man auf den Ebenen A, B,··· Flächentheile A′, B′,··· annimmt, welche numerisch gleich 1 ſind, und mit Punkten, die auf der als poſitiv angenommenen Seite der betreffenden Ebenen liegen, äusserlich multiplicirt poſitives Produkt geben, dann ist R die Ebene des Flächentheiles $\alpha A' + \beta B' + \cdots$, und ϱ der numerische Werth dieſes Flächentheiles. Sollte jedoch dieſe Summe eine unendlich entfernte Ebene, d. h. einen Körperraum (262)

Hosted by Google

geben, alſo ϱR ein Körpertheil ſein, ſo iſt (nach 268) $[\varrho Rx]$ konſtant, alſo auch die Vielfachenſumme S konſtant. Sollte endlich $\alpha A' + \beta B' + \cdots$ ſelbſt gleich null ſein, ſo wird auch S null für jeden Punkt x.“

Anm. Die in den vorigen Aufgaben gefundenen Sätze laſſen ſich in einen Satz zuſammenfaſſen, wenn man ſtatt der Punkte und Ebenen Kugelflächen ſetzt, welche ſich, wenn die Radien null werden, in Punkte, wenn ſie unendlich werden, in Ebenen verwandeln, und zwar, wenn man ſtatt des Quadrates des Abſtandes von einem Punkte und ſtatt des einfachen Abſtandes von einer Ebene, das Produkt des kleinſten und gröſſten Abſtandes von der Kugelfläche ſetzt, ſo geht dies Produkt, wenn ſich die Kugelfläche in einen Punkt zuſammenzieht, in das Quadrat des Abſtandes über, und wenn ſich die Kugelfläche zu einer Ebene entfaltet, ſo wird der eine Abſtand unendlich, und kann für alle Ebenen als gleich angeſehen und daher mit ihm dividirt werden, wodurch die einfachen Abſtände hervorgehen. Dieſe Verallgemeinerung ſoll in dem folgenden Satze ausgeführt werden.

345. Wenn man unter dem Doppelabſtand eines Punktes von einer Kugelfläche das Produkt des kleinſten und gröſſten Abſtandes des Punktes von der Kugelfläche verſteht (das Produkt poſitiv genommen, wenn die Abſtände gleichgerichtet, d. h. der Punkt ausſerhalb der Kugelfläche liegt, negativ im entgegengeſetzten Falle), ſo iſt die Vielfachenſumme S der Doppelabſtände $\alpha', \beta', \cdots$ von mehreren feſten Kreiſen, deren Mittelpunkt a, b, $\cdots$, und deren Radien a', b', $\cdots$ ſind, alſo die Vielfachenſumme

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots,$$

wenn $\alpha, \beta, \cdots$ ihre Koefficienten darſtellen, ein minimum oder maximum, wenn x in dem Schwerpunkte s des Punktvereins αa, βb, $\cdots$ liegt, und zwar, wenn ſich der Punkt x von dieſem Schwerpunkte s um den Abſtand φ entfernt, ſo wächſt S um das Produkt dieſes Abſtandes in die Summe σ der Koefficienten $\alpha, \beta, \cdots$, alſo um $\varphi\sigma$ oder um $(\alpha + \beta + \cdots)\varphi$. Wenn aber der Punktverein αa, βb, $\cdots$ keinen Schwerpunkt hat, d. h. $\alpha + \beta + \cdots$ null iſt, ſo giebt es eine auf der Strecke $r = \alpha a + \beta b + \cdots$ ſenkrecht ſtehende Ebene E, für deren Punkte S null iſt; entfernt ſich dann x von dieſer Ebene um den Abſtand φ, ſo wird $S = \pm 2\varphi\varrho$, wo ϱ der numeriſche Werth von r iſt, und das untere oder obere Zeichen gewählt

Hosted by Google

wird, je nachdem x ſich nach der Seite hin bewegt, nach welcher von E aus die Richtung von r liegt, oder nach der entgegengeſetzten. Wird aber auch $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$, ſo ist S konstant.

Beweis. Zieht man von x die Linie durch den Mittelpunkt a der ersten Kugel, welche die Oberfläche derſelben in x_1 und x_2 schneide, ſo ist der Doppelabstand $\alpha' = (x - x_1)(x - x_2) = (x - a - a')(x - a + a')$, wenn $x - x_1$ die Linie von x_1 nach x bezeichnet u. ſ. w., und a' der Radius ist. Alſo $\alpha' = (x - a)^2 - a'^2$, oder wenn wir jetzt unter $x - a$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung verstehen,

$$\alpha' = (x - a)^2 - a'^2.$$

Alſo
$$S = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots$$
$$= \alpha[(x - a)^2 - a'^2] + \beta[(x - b)^2 - b'^2] + \cdots.$$

Nehmen wir nun einen konstanten Punkt s zu Hülfe, der zur Vereinfachung des Ausdrucks dienen ſoll, ſo wird

$$(x - a)^2 = (x - s + s - a)^2$$
$$= (x - s)^2 + 2[(x - s)|(s - a)] + (s - a)^2$$

und entsprechend bei den übrigen Quadraten. Setzen wir noch $\alpha + \beta + \cdots = \sigma$, ſo wird

$$S = \sigma(x - s)^2 + 2[(x - s)|(\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots)] + \mu,$$

wenn wir die konstante Grösse

$$\alpha(s - a)^2 + \beta(s - b)^2 + \cdots - \alpha a'^2 - \beta b'^2 - \cdots = \mu$$

ſetzen. Ist nun σ von null verschieden, ſo wird der Faktor $\sigma s - \alpha a - \beta b - \cdots = 0$, wenn s der Schwerpunkt des Punktvereins αa, βb, $\cdots$ wird. Nehmen wir alſo s in dieſem Schwerpunkte liegend an, ſo wird

$$S = \sigma(x - s)^2 + \mu,$$

wodurch der erste Theil bewieſen ist. Wenn aber $\sigma = 0$ ist, ſo ist $\alpha a + \beta b + \cdots$ eine Strecke, dieſe ſei r, und ϱ ihr numeriſcher Werth, ſo wird

$$S = 2[(s - x)|r] + \mu.$$

Leicht kann man, da S in Bezug auf x vom ersten Grade ist, ſolche Punkte x finden, für welche S null wird. Es ſei s' ein ſolcher Punkt*), d. h.

*) Setzt man den Punkt $s + \frac{\mu r}{2\varrho^2} \equiv p$, ſo ist s' ein beliebiger Punkt, welcher in der durch p ſenkrecht gegen r gelegten Ebene liegt.

Hosted by Google

$$2[(s - s')|r] + \mu = 0,$$

ſo wird

$$S = 2[(s - s' + s' - x)|r] + \mu = 2[(s' - x)|r]$$

vermöge der vorigen Gleichung, und dies ist

$$= \pm 2\varphi\varrho,$$

wenn ϱ der numeriſche Werth der ſenkrechten Projektion von $s' - x$ auf r iſt, und das untere oder obere Zeichen gewählt wird, je nachdem $x - s'$ und r auf derſelben Seite der in s' auf r errichteten ſenkrechten Ebene liegen oder nicht, wodurch der zweite Theil des Satzes erwieſen iſt. Wenn endlich auch $\alpha a + \beta b + \cdots = 0$ iſt, ſo wird

$$S = \mu,$$

alſo konſtant.

346. Aufgabe. Die Summe S mehrerer Linientheile im Raume auf die Summe eines Linientheiles und eines dagegen ſenkrechten Flächenraumes zurückzuführen.

Auflöſung. Man nehme ein Syſtem von vier Einheiten im Raume: a, a_1, a_2, a_3 an, von denen a ein einfacher Punkt und a_1, a_2, a_3 Strecken ſind, ſo läſst ſich (nach 232) jeder Punkt im Raume aus ihnen numeriſch ableiten, alſo iſt jeder Linientheil als Produkt zweier Punkte (nach 65) aus den multiplikativen Kombinationen aa_1, aa_2, aa_3, a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 numeriſch ableitbar, alſo auch S, als Summe ſolcher Linientheile, es ſei

$$S = \alpha_1[aa_1] + \alpha_2[aa_2] + \alpha_3[aa_3] + \beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3]$$

oder

$$= [a(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3)] + \beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3].$$

Es ſei

$$\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \alpha_3a_3 = b,$$

alſo b eine Strecke, und $\beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a\,a_3] + \beta_3[a_2a_3]$ iſt als Summe von Produkten von je zwei Strecken, wieder ein ſolches, alſo als Ergänzung einer Strecke aufzufaſſen, etwa der Strecke c, d. h. es ſei

$$\beta_1[a_1a_2] + \beta_2[a_1a_3] + \beta_3[a_2a_3] = |c,$$

ſo iſt

$$S = [ab] + |c.$$

Es ſei a' irgend ein anderer, noch näher zu beſtimmender

Hosted by Google

Punkt und ſei $a - a' = d$, wo d eine Strecke ist, ſo ist $a = a' + d$, alſo

$$S = [(a' + d)b] + |c = [a'b] + [db] + |c.$$

Es ist hier $[db] + |c$ ein Flächenraum; und es ſoll d ſo bestimmt werden, dass, wie die Aufgabe verlangt, dieſer Flächenraum auf dem Linientheile $[a'b]$ ſenkrecht stehen ſoll. Da a' ein Punkt und b eine Strecke ist, ſo hat dieſer Linientheil die Richtung von b, alſo ſoll der Flächenraum auf b ſenkrecht stehen, d. h. (nach 152, 333) $[(db + |c)|b] = 0$, oder

$$[db|b] + |[cb] = 0 \qquad [99],$$

d. h.
$$|[cb] = [bd|b] \qquad [55].$$

Nehmen wir an, dass d ſenkrecht auf b stehe, d. h. in der Ebene |b liege, ſo ist (nach 108) der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= [b|b]d = \beta^2 d,$$

wenn β der numerische Werth von b ist, alſo d gefunden

$$d = |[cb] : \beta^2.$$

Umgekehrt, wenn d dieſen Werth hat, ſo folgt durch die umgekehrten Umgestaltungen, dass der Flächenraum $[db] + |c$ auf b ſenkrecht stehe, alſo ist die Aufgabe gelöst.

347. Wenn zwei Summen von Linientheilen beide auf die Form einer Summe gebracht ſind, deren eines Stück ein Linientheil und deren anderes Stück ein gegen die Linie desſelben ſenkrechter Flächenraum ist, ſo ſind jene Summen nur dann gleich, wenn ſowohl dieſe Linientheile als dieſe Flächenräume einander gleich ſind, d. h. wenn

$$[ab] + \gamma|b = [a_1 b_1] + \gamma_1|b_1$$

ist, wo a und a_1 einfache Punkte, b und b_1 Strecken, γ und γ_1 Zahlen ſind, ſo ist

$$[ab] = [a_1 b_1],\ \gamma|b = \gamma_1|b_1.$$

Beweis. Man multiplicire zuerst die gegebene Gleichung mit einem Produkte U dreier Strecken, ſo ist |b ein Produkt zweier Strecken, alſo $[|b \cdot U] = 0 = [|b_1 \cdot U]$ (nach 301), dagegen $[abU] = b$ und $[a_1 b_1 U] = b_1$ (nach 305); alſo erhält man $b = b_1$. Somit verwandelt ſich die gegebene Gleichung in

$$[ab] + \gamma|b = [a_1 b] + \gamma_1|b.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit b, ſo wird, da [abb]

Hosted by Google

$= [a_1 bb] = 0$ ist (nach 60), $\gamma[b|b] = \gamma_1[b|b]$, alſo, da $[b|b] = b^3$ eine von Null verſchiedene Zahl iſt, $\gamma = \gamma_1$. Somit verwandelt ſich die urſprüngliche Gleichung in $[ab] = [a_1 b]$, d. h. die Linientheile $[ab]$ und $[a_1 b_1]$ und die Flächenräume $\gamma|b$ und $\gamma_1|b_1$ ſind einander gleich.

Anm. Es lässt ſich alſo jede Summe von Linientheilen, d. h. jede geometriſche Grösse zweiter Stufe auf eine beſtimmte, vollkommen unzweideutige Art in Form einer Summe eines Linientheiles und eines gegen ſeine Linie ſenkrechten Flächenraums darſtellen. Es iſt intereſſant, dass dieſe allgemeine Grösse zweiter Stufe vollkommen repräſentirt wird durch die Bewegung eines Körpers im Raume. Wenn nämlich ein Körper aus einer Lage in eine beliebige andere verſetzt wird, ſo iſt bekanntlich dieſe Verſetzung allemal dadurch möglich zu machen, dass man eine gewiſſe Linie des Körpers in ihrer eigenen Richtung um ein Gewiſſes fortſchreiten lässt, während der Körper um dieſe Linie als um ſeine Axe eine gewiſſe Drehung vollendet, und zwar ſind dieſe beiden Partialbewegungen durch die Anfangs- und End-Lage des Körpers vollkommen beſtimmt. Die erſtere Bewegung kann durch einen Linientheil vollkommen repräſentirt werden, die letztere durch einen dagegen ſenkrechten Flächenraum, beide zuſammen alſo durch die allgemeine räumliche Grösse zweiter Stufe. Natürlich wird man in der Statik auf gleiche Weiſe die Reſultante mehrerer Kräfte im Raume darſtellen können, während der bloſſe Linientheil die einzelne ſtatiſche Kraft darſtellt, und die Summe derſelben die ſtatiſche Reſultante der entſprechenden Kräfte (ſ. Ausdehnungslehre §. 122 ff.)

Hosted by Google

Zweiter Abschnitt.

Funktionenlehre.

Kap. 1. Funktionen im Allgemeinen.

§. 1. Begriff der Funktionen, und Reduktion mehrerer Funktionen mehrerer Variabeln auf eine Funktion einer Variabeln.

348. Erklärung. Wenn eine Grösse u von einer oder mehreren Grössen x, y,··· in der Art abhängt, dass, ſo oft x, y,··· bestimmte Werthe annehmen, auch u einen bestimmten (eindeutigen) Werth annimmt, ſo nennen wir u eine Funktion von x, y,···.

Anm. Hier ist zu bemerken, dass die obige Definition auch gelten ſoll, wenn u, x, y,··· beliebige extenſive Grössen ſind. Ferner ist zu bemerken, dass die mehrdeutigen Funktionen, d. h. ſolche, wo für bestimmte Werthe der unabhängigen Variabeln x, y,··· die Grösse u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, ohne dass dieſe Verschiedenheit durch eine neue Variable bedingt ist, — hier gänzlich ausgeschlossen ſind; wie denn überhaupt alle in dieſem Sinne mehrdeutigen Grössen aus der Mathematik zu verbannen ſind, weil ſich auf ſie keine mathematische Formel mit Sicherheit anwenden lässt. Sobald die Beziehung zwischen den unabhängigen und der abhängigen Variabeln u vermittelst einer Gleichung gegeben ist, durch welche für bestimmte Werthe der ersteren die letztere u mehrere verschiedene Werthe annehmen kann, ſo kann man u anſehen als Funktion jener Variabeln und einer neuen r, welche eine bestimmte Werthreihe, etwa die der ganzen Zahlen durchläuft, ſo dass dann, wenn auch ausser den ursprünglichen Variabeln noch der Werth von r bestimmt ist, auch u eindeutig bestimmt ſei. Oder ſollte eine ſolche neue Variable r nicht ausreichen, ſo kann man mehrere ſolche zu Hülfe

Hosted by Google

nehmen. Hat man z. B. die Gleichung $u^n = x$, ſo kann hier für jeden Werth von x die Grösse u noch n verſchiedene Werthe annehmen. Einer derſelben ſei mit $x^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet, ſo ist bekanntlich

$$u = (-1)^{\frac{2r}{n}} x^{\frac{1}{n}} = \left(\cos.\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin.\frac{2r\pi}{n}\right) x^{\frac{1}{n}},$$

wo r nach und nach jeden ganzen Zahlwerth annehmen kann. Es ist alſo u auf dieſe Weiſe als Funktion von x und einer neuen Variablen r dargestellt, wodurch dann die Mehrdeutigkeit der Funktion verschwindet.

349. Erklärung. Zahlfunktion nenne ich eine Funktion, welche für beliebige Werthe der Variabeln, von denen ſie abhängt, stets einen Zahlwerth (reellen oder imaginären, ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen) annimmt. Extenſive Funktion nenne ich eine Funktion, welche für alle (oder gewisse) Werthe der Variabeln einer extenſiven Grösse gleich ist. Ich werde die Zahlfunktionen stets mit kleinen Buchstaben f, φ, ψ, $\cdots$, die extenſiven Funktionen mit grossen Buchstaben F, Φ, Ψ, $\cdots$ bezeichnen.

Anm. Die imaginäre Zahlgrösse $p + q\sqrt{-1}$ steht auf der Gränze der extenſiven Grössen; ſie ist als extenſive Grösse aufzufassen, ſobald man für den Ausdruck der Zahlbeziehung zwischen mehreren Grössen, nur reelle Zahlkoefficienten zulässt, indem dann 1 und $\sqrt{-1}$ als Einheiten erscheinen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, hingegen ist ſie als Zahlgrösse aufzufassen, ſobald auch imaginäre Zahlkoefficienten für den Ausdruck der Zahlbeziehung gestattet ſind. Wenn daher die Funktion $y = fx$ für reelles x imaginäre Werthe, etwa $u + v\sqrt{-1}$ annimmt, ſo kann ſie in dem ersten Sinne als extenſive Funktion aufgefasst werden; doch wollen wir in der Funktionslehre den letzteren Sinn stets festhalten, alſo auch im Falle y imaginär wird, dennoch y als Zahlfunktion auffassen, wie es in der Erklärung geschehen ist.

350. Jede Zahlfunktion beliebig vieler Zahlgrössen lässt ſich als Zahlfunktion einer einzigen extenſiven Grösse darstellen, und zwar, wenn

$$y_1 = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

ist, ſo ist dieſer Ausdruck gleichbedeutend mit

$$y_1 = f((x|e_1), (x|e_2)\cdots, (x|e_n)) = \varphi(x),$$

wo $e_1, \cdots e_n$ ein einfaches Normalſystem (ſiehe 153) bilden, und

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$$

ist.

Hosted by Google

Beweis. Wenn $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$ ist und $e_1, \cdots e_n$ ein einfaches Normalfystem bilden, fo ist

$$[x|e_1] = [(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n)|e_1] = x_1,$$

da $[e_1|e_2], \cdots [e_1|e_n]$ (nach 188) null find und $[e_1|e_1] = 1$ ist. Aus gleichem Grunde ist

$$[x|e_2] = x_2, \cdots, \quad [x|e_n] = x_n.$$

Alfo

$$y_1 = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f([x|e_1), (x|e_2) \cdots (x|e_n)),$$

wo alfo y_1 eine Funktion der extenfiven Grösse x ist. Es fei diefe Funktion mit $\varphi(x)$ bezeichnet, fo hat man

$$y_1 = \varphi(x).$$

351. Jedes System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen lässt fich als eine extenfive Funktion einer extenfiven Grösse darstellen, und zwar, wenn

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

ist, fo ist dies System von Gleichungen gleichbedeutend der Gleichung

$$y = F(x),$$

wo

$$x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$$
$$F(x) = e_1\varphi_1(x) + e_2\varphi_2(x) + \cdots e_m\varphi_m(x)$$
$$\varphi_r(x) = f_r([x|e_1], [x|e_2], \cdots [x|e_n])$$

ist und $e_1, \cdots e_n$ und $e_1, \cdots e_m$ einfache Normalfysteme bilden.

Beweis. Nach 350 ist, wenn $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$ gefetzt wird,

$$y_r = f_r(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

gleichbedeutend mit

$$y_r = f_r([x|e_1], [x|e_2], \cdots [x|e_n]).$$

Diefe Funktion von x fei mit $\varphi_r(x)$ bezeichnet, alfo

$$y_r = \varphi_r(x) = f_r([x|e_1], [x|e_2], \cdots [x|e_n]).$$

Ferner ist (nach 29) das System der Gleichungen

$$y_1 = \varphi_1(x), \; y_2 = \varphi_2(x) \cdots y_m = \varphi_m(x)$$

gleichbedeutend der Gleichung

Hosted by Google

$$y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots y_m e_m = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots e_m \varphi_m(x),$$

d. h. der Gleichung

$$y = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots e_m \varphi_m(x).$$

Diese Funktion von x sei mit F(x) bezeichnet, also

$$F(x) = e_1 \varphi_1(x) + e_2 \varphi_2(x) + \cdots e_m \varphi_m(x),$$

so sind die m gegebenen Gleichungen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots x_m) \text{ u. s. w.,}$$

gleichbedeutend mit der Gleichung

$$y = F(x).$$

352. Jedes System von Funktionen beliebig vieler Variabeln lässt sich ersetzen durch eine Funktion einer Variabeln, vorausgesetzt, dass sich die unabhängigen Variabeln sämmtlich aus einem System von Einheiten numerisch ableiten lassen, und ebenso die abhängigen.

Beweis 1. Für ein beliebiges System von Zahlfunktionen beliebig vieler Zahlgrössen ist der Satz in 351 bewiesen.

2. Nach 157 lassen sich alle aus einem System von n Einheiten numerisch ableitbare Grössen aus einem einfachen Normalsystem von n Grössen numerisch ableiten. Es bestehe das Normalsystem, aus welchem sich die unabhängigen Variabeln x, y, $\cdots$ ableiten lassen, aus den Grössen $e_1, e_2, \cdots e_n$, und diejenigen, aus welchen sich die abhängigen Variabeln u, v, $\cdots$ ableiten lassen, aus den Grössen $e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots e^{(m)}$. Ferner sei

$$\begin{array}{llll} x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n, & u = u_1 e^{(1)} + \cdots u_m e^{(m)} \\ y = y_1 e_1 + \cdots y_n e_n, & v = v_1 e^{(1)} + \cdots v_m e^{(m)}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

wo alle Koefficienten Zahlgrössen sind, und seien

$$u = F(x, y \cdot \cdot), \quad v = \Phi(x, y, \cdot \cdot), \cdots$$

die gegebenen Funktionen, so erhält man, indem man hierin die obigen Werthe einsetzt,

$$u_1 e^{(1)} + \cdots u_m e^{(m)} = F(x_1 e_1 + \cdot \cdot x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, \cdots).$$

Hier ist die rechte Seite eine extensive Funktion der Zahlgrössen $x_1, \cdots x_n, y_1 \cdots y_n, \cdots$. Diese Funktion soll einer Grösse gleich sein, welche aus den Einheiten $e^{(1)}, \cdots e^{(m)}$ nu-

Hosted by Google

merisch ableitbar ist, alſo muss ſie ſelbst aus ihnen numerisch ableitbar ſein, d. h. ſie muss in der Form $e^{(1)}\varphi_1 + \cdots e^{(m)}\varphi_m$ erscheinen, wo $\varphi_1, \cdots \varphi_m$ Zahlfunktionen von $x_1, \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n, \cdots$ ſind. Alſo erhält man

$$u_1 e^{(1)} + \cdots u_m e^{(m)} = e^{(1)}\varphi_1 + \cdots e^{(m)}\varphi_m.$$

Dieſe Gleichung, welche mit $u = F(x, y)$ gleichbedeutend ist, wird (nach 29) erſetzt durch das System der Zahlgleichungen

$$u_1 = \varphi_1, \; u_2 = \varphi_2, \cdots u_m = \varphi_m.$$

Auf gleiche Weiſe wird die Gleichung

$$v = \Phi(x, y)$$

erſetzt durch ein System von Zahlgleichungen von der Form

$$v_1 = \psi_1, \; v_2 = \psi_2, \cdots \; v_m = \psi_m,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \cdots$ gleichfalls Zahlfunktionen der Zahlgrössen $x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_n, \cdots$ ſind. Folglich werden die gegebenen Gleichungen

$$u = F(x, y \cdot\cdot), \; v = \Phi(x, y \cdot\cdot)$$

erſetzt durch das System der Zahlgleichungen

$$\begin{array}{llll} u_1 = \varphi_1, & u_2 = \varphi_2, \cdots & u_m = \varphi_m, \\ v_1 = \psi_1, & v_2 = \psi_2, \cdots & v_m = \psi_m, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

wo $\varphi_1 \cdots \varphi_m$, $\psi_1 \cdots \psi_m, \cdots$ Zahlfunktionen der Zahlgrössen $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n, \cdots$ ſind. Aber nach 351 kann ein ſolches System erſetzt werden durch Eine Funktion Einer Grösse, folglich kann auch das gegebene System durch Eine ſolche Funktion Einer Grösse erſetzt werden.

Anm. Dieſe Zurückführung auf Eine Funktion Einer Variabeln ist auch für die Behandlung der Zahlfunktionen von Bedeutung, da die Sätze der Zahlfunktionen, der Differenzialrechnung, der Reihen, und auch mit gewissen Beschränkungen die der Integralrechnung ſich auf ſolche extenſiven Funktionen extenſiver Grössen, wie unten gezeigt werden ſoll, anwenden lassen. Namentlich ergeben ſich daraus die Jakobischen Sätze über Funktionaldeterminanten, ſo wie die von Jakobi in ſeiner berühmten Abhandlung angedeutete oder geahnte Uebereinstimmung dieſer Sätze mit den Sätzen der Differenziation einer einfachen Funktion einer Variabeln aufs leichteste und unmittelbarste.

Hosted by Google

§. 2. Ganze Funktionen und Darstellung derselben vermittelst lückenhaltiger Produkte.

353. Erklärung. Wenn $P_{a_1, a_2, \cdots a_n}$ ein beliebiges Produkt ist, in welchem die Grössen erster Stufe a_1, $a_2, \cdots a_n$ als Faktoren verkommen, so verstehe ich unter

$$P_{1, 1, \cdots 1}(x_1 x_2 \cdots x_n),$$

wo $x_1 \cdots x_n$ beliebige Grössen erster Stufe sind, das arithmetische Mittel zwischen den sämmtlicheu Ausdrücken, welche aus

$$P_{x_1, x_2, \cdots x_n}$$

hervorgehen, wenn man den Grössen x_1, $x_2, \cdots x_n$ alle möglichen verschiedenen Folgen giebt. Ich nenne hier den Ausdruck $P_{1, 1, \cdots 1}$ ein Produkt mit n Lücken.

So ist z. B.

$$P_{1, 1, 1}(xyz) = (P_{x,y,z} + P_{x,y,z} + P_{y,x,z} + P_{y,z,x} + P_{z,x,y} + P_{z,y,x}) : 6.$$

Anm. Unter dem arithmetischen Mittel mehrer Grössen ist hier, wie sonst, die durch die Anzahl der Grössen dividirte Summe derselben verstanden. Es versteht sich von selbst, dass wenn ein solcher Lückenausdruck noch mit andern Ausdrücken durch Multiplikation verbunden werden soll, er dann in Klammern zu schliessen ist. Noch ist zu bemerken, dass wir oben die in die Lücken eintretenden Grössen als Grössen erster Stufe gesetzt haben. Man sieht leicht, dass man diesen Begriff auch hätte erweitern und auch Lücken höherer Stufen hätte annehmen können, d. h. solche Lücken, in welche Grössen höherer Stufen eintreten sollen. Doch kann man solche Fälle, in denen Lücken höherer Stufe vorkommen würden, fast überall vermeiden. Namentlich, was der häufigste Fall ist, wenn das Hauptgebiet von n-ter Stufe ist, und Grössen (n — 1)-ter Stufe in die Lücken eintreten sollen, so kann man diese Grössen als Ergänzungen von Grössen erster Stufe also in der Form |a u. s. w. darstellen, und statt der Lücke (n — 1)-ter Stufe schreiben |1, wodurch dann die Lücke auf die erste Stufe reducirt ist, und der Definition in 353 unterliegt.

354. Es ist

$$P_{1, 1, \cdots}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \sum \overline{P_{x_r, x_s \cdots}} : (1 \cdot 2 \cdots n),$$

wo der Ausdruck $P_{1, 1, \cdots}$ ein Produkt mit n Lücken ist, und x_r, $x_s, \cdots$ diefelben Grössen wie x_1, $x_2, \cdots x_n$ bezeichnen, nur in beliebig geänderter Folge, und wo die Summe sich auf alle verschiedenen Folgen bezieht. Ins Besondere ist

$$P_{1, 1, \cdots}x^n = P_{x, x, \cdots}.$$

Hosted by Google

Beweis. Nach 353 ist $P_{1,1,\cdots}x_1, x_2,\cdots x_n$ das arithmetische Mittel der Ausdrücke $P_{x_r,x_s,\cdots}$, welche aus $P_{x_1, x_2,\cdots x_n}$ durch beliebige Anordnung der Grössen $x_1,\cdots x_n$ hervorgehen, d. h. gleich der Summe jener Ausdrücke, dividirt durch ihre Anzahl, alſo durch $1\cdot 2\cdots n$. Wenn ins Beſondere $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ist, ſo werden alle jene Ausdrücke gleich $P_{x,x,\cdots}$, alſo ist ihr arithmetisches Mittel gleich einem derſelben, alſo damit auch die Specialformel erwieſen.

355. Erklärung. Wenn P_m ein Produkt mit m Lücken, und $m > n$ ist, ſo verſtehe ich unter $P_m(x_1\cdot x_2\cdots x_n)$ den Ausdruck, welchen man erhält, wenn man den Ausdruck $P_m(x_1\cdot x_2\cdots x_m)$ (nach 353) entwickelt, und dann ſtatt jeder der Grössen $x_{n+1}, x_{n+2},\cdots x_m$ eine Lücke ſetzt; z. B. ist

$$P_{1,1,1}x = (P_{x,1,1} + P_{1,x,1} + P_{1,1,x}) : 3;$$

$$P_{1,1,1}(xy) = (P_{x,y,1} + P_{y,x,1} + P_{x,1,y} + P_{y,1,x} + P_{1,x,y} + P_{1,y,x}) : 6.$$

356. Wenn $P_{1,1,\cdots}$ ein Produkt mit m Lücken, und m grösser als n ist, ſo ist

$$P_{1,1,\cdots}(x_1x_2\cdots x_n) = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)},$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man $x_1, x_2,\cdots x_n$ auf alle möglichen verſchiedenen Arten in die m Lücken von $P_{1,1\cdots}$ vertheilt, ins Beſondere ist

$$P_{1,1\cdots}x = (P_{x,1,\cdots} + P_{1,x,\cdots} + \cdots) : m.$$

Beweis. Es ist (nach 355) unter $P_{1,1,\cdots}x_1\cdot x_2\cdots x_n$ der Ausdruck verſtanden, den man erhält, wenn man in $P_{1,1,\cdots}x_1\cdot x_2\cdots x_m$ ſtatt jeder der Grössen $x_{n+1},\cdots x_m$ eine Lücke ſetzt. Nun ist (nach 354)

$$P_{1,1\cdots}(x_1x_2\cdots x_m) = \sum P_{x_r,x_s,\cdots} : (1\cdot 2\cdots m).$$

Setzt man hierin ſtatt $x_{n+1}, x_{n+2},\cdots x_m$ Lücken, ſo werden alle die Glieder gleich, welche ſich nur durch die Reihenfolge der Grössen $x_{n+1}, x_{n+2},\cdots x_m$ unterſcheiden. Man kann alſo, ſtatt dieſe gleichen Glieder ſo oft zu ſetzen, als ihre Anzahl beträgt, eins derſelben mit dieſer Anzahl, alſo mit $1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-n)$ multipliciren; ſomit erhält man jedes der von einander verſchiedenen Glieder mit $1\cdot 2\cdots(m-n)$

Hosted by Google

$:(1\cdot 2\cdots m)$ multiplicirt. Aber die Summe diefer von einander verschiedenen Glieder ist S, alfo

$$P_{1,1,\cdots}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{S\cdot 1\cdot 2\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots m} = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)}.$$

Da die Anzahl der in S enthaltenen Glieder gleich $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ ist, fo ist der Ausdruck rechts zugleich das arithmetische Mittel diefer Glieder.

357. Erklärung. Wenn $A, B, \cdots A', B', \cdots$ Produkte mit je n Lücken, und $\alpha, \beta, \cdots \alpha', \beta', \cdots$ Zahlen find, fo fetze ich dann und nur dann

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \alpha' A' + \beta' B' + \cdots,$$

wenn für jede Reihe von n Grössen erster Stufe $x_1, x_2, \cdots x_n$

$$\alpha A x_1 x_2 \cdots x_n + \beta B x_1 x_2 \cdots x_n + \cdots = \alpha' A' x_1 x_2 \cdots x_n + \beta' B' x_1 x_2 \cdots x_n + \cdots$$

ist. Wir nennen eine folche Vielfachenfumme von Lückenprodukten (mit je n Lücken) einen Lückenausdruck (mit n Lücken).

358. Jede ganze Zahlfunktion n-ten Grades von beliebig vielen (veränderlichen) Zahlgrössen lässt fich in der Form

$$Ax^n$$

darstellen, wo A ein Ausdruck mit n Lücken ist, und zwar ist

$$\sum \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\cdots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots [\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = < n] = Ax^n,$$

wo $x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$

und $$A = \sum \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\cdots} [1|e_0]^{\mathfrak{r}} [1|e_1]^{\mathfrak{a}} [1|e_2]^{\mathfrak{b}} \cdots [\mathfrak{r}+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = n]$$

ist, wo ferner $e_0, e_1, e_2, \cdots$ ein einfaches Normalfystem bilden, und die Summe fich auf alle möglichen ganzen Werthe $\mathfrak{r}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ bezieht, welche der in Klammern beigefügten Bedingung genügen, ohne negativ zu fein.

Beweis. Nach der Annahme ist $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, wo $x_0 = 1$ ist. Ferner da $x_0 = 1$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = < n$ ist, fo ist

$$\sum \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\cdots} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots = \sum \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\cdots} x_0^{\mathfrak{r}} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{b}} \cdots$$

mit der Bedingung, dass $\mathfrak{r}+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots = n$ fei. Der gewonnene Ausdruck ist aber (nach 350)

Hosted by Google

$$= \sum \alpha_{a,b,\cdots} [x|e_0]^r [x|e_1]^a [x|e_2]^b \cdots$$
$$= Ax^n \qquad [354],$$

wo A den im Satze angegebenen Lückenausdruck darstellt.

359. Jedes System von ganzen Funktionen n-ten Grades beliebig vieler Variabeln lässt sich in der Form

$$Ax^n$$

darstellen, wo A ein konstanter Lückenausdruck mit n Lücken ist.

Beweis folgt aus 358 vermittelst 352.

360. Statt einen Lückenausdruck mit einer Faktorenreihe (gemäss der Erklärung in 353) zu multipliciren, kann man ihn mit den Faktoren fortschreitend multipliciren, d. h.

$$A(x_1 x_2 \cdots x_n) = Ax_1 x_2 \cdots x_n.$$

Beweis 1. Es bestehe A nur aus einem Produkt, und zwar enthalte dasselbe m Lücken, so ist (nach 356)

$$* \quad A(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)},$$

wo S die Summe aller Glieder ist, welche hervorgehen, wenn man auf alle möglichen verschiedenen Arten $x_1, x_2, \cdots x_n$ in die m Lücken von A vertheilt. Ebenso sei S_1 die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man x_1 nach und nach in jede einzelne Lücke des Produktes A einsetzt; ferner gehe S_2 aus S_1 hervor, indem man in jedem Gliede von S_1 die Grösse x nach und nach in jede der $m-1$ Lücken einzeln einsetzt, und die sämmtlichen so erhaltenen Glieder addirt, somit ist S_2 zugleich die Summe aller Glieder, welche hervorgehen, wenn man $x_1 x_2$ auf alle möglichen verschiedenen Arten in zwei der Lücken von A einfügt. Auf entsprechende Weise möge S_3 aus S_2 abgeleitet sein u. s. w. Dann ist (nach 356)

$$Ax_1 = \frac{S_1}{m_1}, \quad Ax_1 x_2 = \frac{S_2}{m(m-1)}, \cdots$$

endlich

$$Ax_1 x_2 \cdots x_n = \frac{S}{m(m-1)\cdots(m-n+1)} = A(x_1 x_2 \cdots x_n) \text{ [nach *]}.$$

2. Es sei A ein beliebiger Lückenausdruck $= \sum P_a$, wo jedes P_a ein Produkt mit m Lücken ist, so ist

Hosted by Google

$$\begin{aligned} A(x_1x_2\cdots x_n) &= \sum\overline{P_\alpha}(x_1x_2\cdots x_n) \\ &= \sum\overline{P_\alpha(x_1x_2\cdots x_n)} && [357] \\ &= \sum\overline{P_\alpha x_1x_2\cdots x_n} && [\text{Bew. } 1] \\ &= \sum\overline{P_\alpha}\, x_1x_2\cdots x_n && [357] \\ &= Ax_1x_2\cdots x_n. \end{aligned}$$

361. In dem Ausdrucke $Ax_1x_2\cdots x_n$, in welchem A ein beliebiger Lückenausdruck mit n oder mehr Lücken ist, kann man ohne Werthänderung eine beliebige Schaar der Grössen $x_1x_2\cdots x_n$ mit einer Klammer umschliessen.

Beweis aus 360.

362. Die Ordnung der Faktoren, welche in einen Lückenausdruck eintreten ſollen, ist gleichgültig für das Reſultat, d. h.

$$Ax_1x_2\cdots = Ax_rx_s\cdots,$$

wo $x_1x_2\cdots$ und $x_rx_s\cdots$ dieſelben Faktoren nur in verschiedener Ordnung enthalten ſollen, und A einen Lückenausdruck bezeichnet.

Beweis. Es ſei $A = \sum\overline{P_\alpha}$, wo jedes P_α ein lückenhaltiges Produkt ist, ſo ist

$$\begin{aligned} Ax_1x_2\cdots &= A(x_1x_2\cdots) && [360] \\ &= \sum\overline{P_\alpha(x_1x_2\cdots)} && [357]. \end{aligned}$$

Nun ist aber (nach 356) $P_\alpha(x_1x_2\cdots)$ das arithmetische Mittel ſämmtlicher Ausdrücke, welche hervorgehen, wenn man x_1, $x_2,\cdots$ in allen möglichen Anordnungen in die Lücken von P_α hineinfügt, alſo ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Grössen x_1, $x_2,\cdots$ in dem Ausdrucke $P_\alpha(x_1x_2\cdots)$ vorkommen, d. h. $P_\alpha(x_1x_2\cdots) = P_\alpha(x_rx_s\cdots)$, wenn $x_1x_2\cdots$ und $x_rx_s\cdots$ dieſelben Faktoren nur in veschiedener Folge enthalten ſollen. Alſo ist

$$\begin{aligned} Ax_1x_2\cdots &= \sum\overline{P_\alpha(x_rx_s\cdots)} = \sum\overline{P_\alpha}(x_rx_s\cdots) && [357] \\ &= A(x_rx_s\cdots) = Ax_rx_s\cdots && [360] \end{aligned}$$

363. Wenn irgend einer der Faktoren, welche mit einem Lückenausdrucke multiplicirt ſind, eine Summe ist, ſo kann man statt der Summe die einzelnen Summanden ſetzen, und die ſo erhaltenen Lückenausdrücke addiren, d. h.

$$Ap(x + y + \cdots)q = Apxq + Apyq + \cdots,$$

Hosted by Google

wo p und q Faktorenreihen bezeichnen, und A einen Lückenausdruck.

Beweis. Nach 362 ist $Ap(x + y + \cdots)q = Apq(x + y + \cdots)$. Hier ist Apq wieder ein Lückenausdruck, und daher hat $Apq(x + y + \cdots)$ die Form einer Summe von Produkten, deren jedes $(x + y + \cdots)$ als einen Faktor enthält, alſo die Form $P_{x+y+\cdots} + Q_{x+y+\cdots} + \cdots$. Dies iſt aber (nach 39) gleich $P_x + P_y + \cdots + Q_x + Q_y + \cdots = P_x + Q_x + \cdots + P_y + Q_y + \cdots = Apqx + Apqy + \cdots = Apxq + Apyq + \cdots$.

Anm. Es unterliegt hiernach das Produkt der Faktoren, welche in einen Lückenausdruck hineintreten ſollen, ganz den Geſetzen algebraischer Multiplikation, und es bietet ſich uns hier alſo die allgemeinere Aufgabe dar, diejenigen Produkte extenſiver Grössen, welche den Geſetzen algebraischer Multiplikation unterliegen, zu behandeln, was der Gegenstand des folgenden §. ſein ſoll.

§. 3. Algebraische Multiplikation.

364. Erklärung. Unter algebraischer Multiplikation verstehe ich diejenige Multiplikation, deren Bedingungsgleichungen ſind:

$$e_r e_s = e_s e_r \text{ und } E(Fe_r) = EFe_r,$$

wo e_r, e_s urſprüngliche Einheiten und E, F algebraische Produkte urſprünglicher Einheiten ſind. Ich bezeichne ſie wie gewöhnliche Produkte der Algebra ohne umſchliessende Klammer.

Anm. Name und Bezeichnung ſind darin begründet, dass für dieſe Multiplikation, wie unten gezeigt wird, alle Geſetze der in der Algebra angewandten Multiplikation gelten und keine andern. In dem ersten Theile war dieſe Multiplikation nicht zu behandeln, da ſie keine einfachen Grössen liefert, und mit der Funktionslehre aufs Engste zuſammenhängt. Sie kann als die charakteristische Multiplikation dieſes zweiten Theiles aufgefasst werden, während die den ersten Theil charakteriſirende kombinatorische Multiplikation von jetzt an immer mehr zurücktritt.

365. In einem algebraischen Produkte zweier einfacher Faktoren kann man die Faktoren vertauschen, d. h. es ist

$$ab = ba.$$

Beweis. Es ſei $a = \sum \alpha_a e_a$, $b = \sum \beta_b e_b$,
ſo ist

Hosted by Google

$$\begin{aligned} ab &= \sum \overline{\alpha_a e_a} \sum \overline{\beta_b e_b} = \sum \overline{\alpha_a \beta_b (e_a e_b)} && [42] \\ &= \sum \overline{\beta_b \alpha_a (e_b e_a)} && [364] \\ &= \sum \overline{\beta_b e_b} \sum \overline{\alpha_a e_a} && [42] \\ &= ba. \end{aligned}$$

366. Statt einen einfachen Factor c dem zweiten Faktor eines algebraischen Produktes hinzuzufügen, kann man ihn dem ganzen Produkte hinzufügen, d. h.

$$A(Bc) = ABc.$$

Beweis. A und B find hier algebraische Produkte der aus den Einheiten e_1, e_2, $\cdots$ numerisch abgeleiteten Grössen, alfo (nach 45) darstellbar in den Formen

$$A = \sum \overline{\alpha_a E_a}, \quad B = \sum \overline{\beta_b F_b},$$

wo E_a, F_b algebraische Produkte der Einheiten find. Endlich fei $c = \sum \overline{\gamma_c e_c}$, fo hat man

$$\begin{aligned} A(Bc) &= \sum \overline{\alpha_a E_a} \left(\sum \overline{\beta_b F_b} \sum \overline{\gamma_c e_c}\right) = \sum \overline{\alpha_a \beta_b \gamma_c E_a (F_b e_c)} && [45] \\ &= \sum \overline{\alpha_a \beta_b \gamma_c E_a F_b e_c} && [364] \\ &= \sum \overline{\alpha_a E_a} \sum \overline{\beta_b F_b} \sum \overline{\gamma_c e_c} && [45] \\ &= ABc. \end{aligned}$$

Anm. Hierdurch ist die algebraische Multiplikation als lineale Multiplikation, d. h. als folche, deren Bedingungsgleichungen noch gelten, wenn man statt der Einheiten beliebig aus ihnen numerisch abgeleitete Grössen fetzt, nachgewiefen.

367. Die Ordnung, in welcher man mit einfachen Faktoren fortschreitend multiplicirt, ist gleichgültig für das Refultat, d. h.

$$Abcd\cdots = Acbd\cdots = \cdots.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} Abc &= A(bc) && [366] \\ &= A(cb) && [365] \\ &= Acb && [366]. \end{aligned}$$

Alfo kann man in einem klammerlofen Produkt zwei auf einander folgende Faktoren vertauschen. Durch Wiederholung diefes Verfahrens kann man jeden einfachen Faktor auf jede Stelle des Produktes bringen, alfo den fortschreitenden einfachen Faktoren beliebige Ordnung geben.

Hosted by Google

368. Statt mit mehreren einfachen Faktoren fortschreitend zu multipliciren, kann man mit ihrem Produkt multipliciren, d. h.

$$Abc\cdots = A(bc\cdots).$$

Beweis. Nach 366 ist

$$A(bc\cdots pq) = A(bc\cdots p)q = A(bc\cdots)pq \text{ u. f. w.}$$
$$= Abc\cdots pq.$$

369. Bei einem algebraischen Produkt von zwei beliebigen Faktoren kann man die Faktoren vertauschen, d. h.

$$AB = BA.$$

Beweis. Es fei $A = a_1\cdots a_m$, $B = b_1\cdots b_n$, fo ist

$$AB = A(b_1\cdots b_n) = Ab_1\cdots b_n \quad [368]$$
$$= b_1\cdots b_n a_1\cdots a_m \quad [367]$$
$$= b_1\cdots b_n(a_1\cdots a_m) \quad [368].$$

370. Bei einem algebraischen Produkt von drei beliebigen fortschreitenden Faktoren kann man den zweiten und dritten Faktor in eine Klammer schliessen, d. h.

$$ABC = A(BC).$$

Beweis. Es fei $B = b_1\cdots b_m$, $C = c_1\cdots c_n$, fo ist (nach 368)

$$A(BC) = A(B(c_1\cdots c_n)) = A(Bc_1\cdots c_n)$$
$$= Ab_1\cdots b_m c_1\cdots c_m$$
$$= A(b_1\cdots b_m)c_1\cdots c_m$$
$$= A(b_1\cdots b_m)(c_1\cdots c_m)$$
$$= ABC.$$

371. Wenn man aus den urſprünglichen Einheiten $e_1, \cdots e_n$ die Kombinationen mit Wiederholung zur m-ten Klasse bildet und jede diefer Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Elemente fetzt, fo stehen diefe Produkte in keiner Zahlbeziehung zu einander, und jedes algebraische Produkt von m Grössen, die aus den Einheiten $e_1\cdots e_n$ numerisch abgeleitet find, lässt fich aus jenen Produkten numerisch ableiten.

Beweis. Nach der Definition in 364 follen die Gleichungen

$$e_r e_s = e_s e_r$$

und

$$E(Fe_r) = EFe_r$$

Hosted by Google

die vollständigen Bedingungsgleichungen der algebraischen Multiplikation fein, d. h. es foll keine Beziehung zwischen den Einheitsprodukten stattfinden, als folche, welche fich aus jenen Bedingungsgleichungen ableiten lassen. Jede aus ihnen ableitbare Gleichung muss alfo durch Anwendung jener Gleichungen identisch gleich null gemacht werden können. Da aber jene Fundamental-Gleichungen auf beiden Seiten stets diefelben Einheiten enthalten, nur in anderer Folge oder Zufammenfassung, fo können durch Anwendung derfelben in ein Produkt keine neuen Einheiten als Faktoren hineingebracht werden. Dagegen kann man alle Glieder einer folchen abgeleiteten Gleichung (nach 367, 368) auf die Form bringen, dass fie wohlgeordnete Kombinationen (mit gestatteter Wiederholung) aus den Einheiten $e_1 \cdots e_n$ werden. Nachdem dies geschehen ist, muss alfo die Gleichung identisch gleich null fein, d. h. alle Koefficienten müssen null fein, d. h. es findet keine Zahlbeziehung zwischen ihnen statt. Der zweite Theil des Satzes folgt unmittelbar aus 49.

Anm. Es bilden fomit die Kombinationen mit Wiederholung aus den urfprünglichen Einheiten zu irgend einer (m-ten) Klasse, die Kombinationen als algebraische Produkte betrachtet, ein System von Einheiten höherer Ordnung, aus welchem fich alle algebraischen Produkte zu m Faktoren, welche aus den urfprünglichen Einheiten numerisch abgeleitet find, wiederum numerisch ableiten lassen. Es lässt fich fehr leicht zeigen, dass dasfelbe auch noch gilt, wenn man statt der n urfprünglichen Einheiten n beliebige, aus ihnen numerisch abgeleitete, aber in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen fetzt. Indem ich jedoch diefen Beweis dem Lefer überlasse, schreite ich fogleich zu dem für die weitere Entwickelung unentbehrlichen Satze.

372. Wenn ein algebraisches Produkt null ist, fo muss nothwendig einer feiner Faktoren null fein, d. h. wenn

$$AB = 0, \quad A \gtrless 0$$

ist, fo muss

$$B = 0$$

fein.

Beweis. Im allgemeinsten Falle werden A und B Vielfachenfummen von algebraischen Produkten fein, deren Faktoren aus den urfprünglichen Einheiten a, b, c, $\cdots$ numerisch

Hosted by Google

abgeleitet ſind. Dann bilden (nach 371) die Kombinationen mit Wiederholungen aus a, b, c, ···, wenn jede dieſer Kombinationen als algebraiſches Produkt der darin enthaltenen Einheiten geſetzt wird, die Einheiten aus denen A und B numeriſch ableitbar ſind. Man ſtelle ſich vor, dass die Elemente jeder Kombination nach dem Alphabete geordnet ſind, und die Kombinationen ſelbſt zunächſt nach Klaſſen aufgeſtellt ſind, ſo dass jede niedere Klaſſe der höheren voran ſteht, und dass ferner innerhalb jeder Klaſſe die Kombinationen lexikographiſch geordnet ſeien. Wir wollen dieſe Aufſtellung die wohlgeordnete Aufſtellung der Kombinationen nennen. Da A nach Hypotheſis von Null verſchieden iſt, ſo muss unter den Koefficienten, durch welche A aus jenen Kombinationen abgeleitet iſt, nothwendig mindeſtens einer von null verſchieden ſein. Es ſei E_1 unter allen Kombinationen, welche in dem Ableitungsausdrucke von A einen von Null verſchiedenen Koefficienten haben, diejenige, welche in der wohlgeordneten Aufſtellung die früheſte Stelle einnimmt, ſo erſcheint A in der Form

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots = \sum \overline{\alpha_a E_a},$$

wo α_1 von Null verſchieden iſt. Ferner ſeien F_1, F_2, ··· nach der Reihe die Kombinationen der obigen Aufſtellung, und

$$B = \sum \overline{\beta_b F_b} = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots,$$

ſo iſt

$$AB = \sum \overline{\alpha_a \beta_b E_a F_b} \qquad [42].$$

Jedes Produkt $E_a F_b$ liefert wieder ein algebraiſches Produkt der urſprünglichen Einheiten, und wenn wir dieſe Produkte mit G_1, G_2, ··· bezeichnen, ſo wird AB eine Vielfachenſumme dieſer Einheitsprodukte; alſo da AB nach Hypotheſis null iſt, ſo müſſen alle Koefficienten dieſer Vielfachenſumme null ſein, d. h.

$$\sum \overline{\alpha_a \beta_b} [E_a F_b = G_m] = 0,$$

wo die in Klammer geſchloſſene Bedingung ausſagt, dass man die Summe aller der Produkte $\alpha_a \beta_b$ zu nehmen hat, deren zugehörige Einheitsprodukte $E_a F_b$ einen konſtanten Werth G_m haben. Wir haben hier nur diejenigen Gleichungen dieſer Art zu betrachten, welche in irgend einem Gliede den Faktor

Hosted by Google

α_1 enthalten; diese Gleichungen können wir in der Form schreiben

$$0 = \alpha_1\beta_k + \sum\overline{\alpha_\alpha\beta_\beta}\,[E_\alpha F_\beta = E_1 F_k],$$

wobei noch die Bedingung hinzuzufügen ist, dass unter den unter dem Summenzeichen stehenden Produkten keins mit $\alpha_1\beta_k$ identisch ist. Ich zeige nun, dass man diese Bedingung auch so ausdrücken könne: β müsse kleiner als k sein. In der That ergiebt sich zuerst, dass α nicht 1 sein kann; denn dann müsste das Produkt der beiden Kombinationen E_1 und F_β dieselbe Kombination liefern, wie das Produkt der beiden Kombinationen E_1 und F_k, d. h. F_β müsste mit F_k identisch sein, also $\beta = k$, dann wäre also $\alpha_\alpha\beta_\beta$ mit $\alpha_1\beta_k$ identisch, was der vorausgesetzten Bedingung widerspricht. Also muss $\alpha > 1$ sein, d. h. E_α muss in der wohlgeordneten Aufstellung der Kombinationen später vorkommen als E_1. Dies ist auf zwei Arten möglich; erstens auf die Art, dass E_1 weniger Elemente enthält als E_α, dann muss, da E_1F_k mit $E_\alpha F_\beta$ gleiche Kombination liefern soll, F_k mehr Elemente enthalten, als F_β, d. h. F_k muss in jener wohlgeordneten Aufstellung später folgen als F_β, d. h. $\beta < k$ sein. Oder zweitens, wenn E_1 und E_α gleich viel Elemente enthalten, so muss E_α in der lexikographischen Aufstellung später folgen als E_1. In dem Princip der lexikographischen Aufstellung von Kombinationen liegt es aber, dass das erste der Elemente a, b, $\cdots$, welches in 2 Kombinationen einen ungleichen Exponenten hat, in der später folgenden Kombination den kleineren Exponenten habe, so dass also, wenn dies Element in E_1 den Exponenten α, in E_α den Exponenten γ hat, $\gamma < \alpha$ sein muss. Ferner, aus der Bedingungsgleichung $E_\alpha F_\beta = E_1 F_k$ folgt, dass, wenn α, β, γ, δ die Exponenten sind, welche irgend ein Element beziehlich in den Kombinationen E_1, F_k, E_α, F_β hat, $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ sein muss. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn ein Element in E_1 denselben Exponenten hat wie in E_α, es auch in F_k denselben Exponenten haben muss, wie in F_β, und dass also das erste der Elemente a, b, $\cdots$ welches in E_α einen andern Exponenten hat als in E_1, auch das erste ist, welches in F_β einen andern Exponenten hat als in F_k; es mögen α, β, γ, δ ins

Hosted by Google

Besondere die Exponenten dieses Elementes in E_1, F_k, E_a, F_b sein, so sahen wir, dass $\gamma < \alpha$ sein muss; dann folgt aber aus der Gleichung $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, dass $\delta > \beta$ sein muss, und dass also nach dem Princip der lexikographischen Aufstellung die Kombination F_b früher stehen muss als F_k, d. h. $b < k$ sein muss, da ja die Kombinationen F_1, F_2, $\cdots$ in jeder Klasse lexikographisch geordnet sein sollen. Somit haben wir gefunden, dass in den beiden möglichen Fällen $b < k$ sein muss. Wir haben also die Gleichung

$$* \quad 0 = \alpha_1\beta_k + \sum \alpha_a\beta_b \,[E_aF_b = E_1F_k,\ b < k].$$

Es sei nun zuerst $k = 1$, so fällt die Summe $\sum \alpha_a\beta_b$ ganz fort, da ihre Bedingung, $b < 1$ nicht erfüllt werden kann, also hat man $\alpha_1\beta_1 = 0$, und da α_1 nach der Voraussetzung $\gtrless 0$, und α_1 und β_1 Zahlen sind, so muss also

$$\beta_1 = 0$$

sein. Setzt man $k = 2$, so fällt, da $b < 2$ und $\beta_1 = 0$ ist, die Summe $\sum \alpha_a\beta_b$ gleichfalls weg, und man erhält $\alpha_1\beta_2 = 0$, also

$$\beta_2 = 0.$$

Und aus gleichem Grunde ergiebt sich, dass $\beta_3 = 0$ ist u. s. w. Also ist auch B, was $= \beta_1F_1 + \beta_2F_2 + \cdots$ war, $= 0$.

373. Wenn zwei algebraische Produkte aus je zwei Faktoren gleich sind, und einen gleichen, von null verschiedenen Faktor haben, so muss auch der andere Faktor in beiden gleich sein, d. h. wenn

$$AB = CB, \text{ und } B \gtrless 0.$$

ist, so muss

$$A = C$$

sein.

Beweis. Aus $AB = CB$ folgt

$$0 = AB - CB = (A - C)B.$$

Also da $B \gtrless 0$ ist, so muss (nach 372) $A - C$ null sein, d. h. $A = C$.

374. Erklärung. Unter dem algebraischen Quotienten $A : B$ verstehe ich denjenigen Ausdruck, welcher mit B algebraisch multiplicirt A giebt, d. h.

$$(A : B) \cdot B = A.$$

Hosted by Google

375. Es ist

$$AB : B = A.$$

Beweis. Nach 374 ist, wenn man darin AB statt A ſetzt,

$$(AB : B)B = AB.$$

Alſo (nach 373)

$$AB : B = A.$$

376. Alle algebraischen Geſetze der Multiplikation und Diviſion gelten für die algebraische Multiplikation und Diviſion extenſiver Grössen.

Beweis. Denn alle dieſe Geſetze gründen ſich auf die Formeln

$$AB = BA$$
$$ABC = A(BC)$$
$$(A : B)B = A$$
$$AB : B = A$$

und auf die für alle Multiplikationsarten (nach 42, 45) geltenden Beziehungen zur Addition und Subtraktion.

Anm. Durch die Identität der Rechnungsgeſetze der ſo eben behandelten Multiplikation mit der gewöhnlichen Multiplikation der Algebra ist die Identität der Bezeichnung und Benennung gerechtfertigt. Der einzige Unterschied liegt in den verknüpften Grössen, welche dort Zahlen, hier beliebige extenſive Grössen, wie z. B. Punkte, Linien u. ſ. w. ſind. Es wäre verkehrt, wenn man dieſe Differenz der verknüpften Grössen auf die Bezeichnung oder Benennung der Verknüpfung ſelbst übertragen wollte, wodurch die Terminologie nutzlos anwachſen, und der Zuſammenhang verdunkelt werden würde. Auch diejenigen Eigenschaften dieſer Produkte, welche auf der beſonderen Eigenthümlichkeit extenſiver Grössen beruhen, finden ſich in der Algebra, und zwar in der Lehre von den ganzen Funktionen, wieder. So z. B. liefert der Satz, dass ſich jede ganze Funktion Einer Variabeln vom n-ten Grade in n lineare Faktoren zerlegen lässt, hier auf Strecken der Ebene angewandt, den Satz:

Jede Summe von algebraischen Produkten von je n Strecken Einer Ebene lässt ſich auf Ein ſolches Produkt reduciren.

Hierbei ist natürlich vorausgeſetzt, dass auch die Annahme inmaginärer Strecken verstattet ſei.

Hosted by Google

§. 4. Ganze Funktionen ersten Grades. Quotient.

377. Erklärung. Wenn $a_1, a_2, \cdots a_n$ Grössen erster (oder n — 1-ter) Stufe in einem Hauptgebiet n-ter Stufe find, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo verstehe ich unter dem Bruche (Quotienten)

$$Q = \frac{b_1, b_2, \cdots b_n}{a_1, a_2, \cdots a_n}$$

den Ausdruck, welcher mit $a_1, a_2, \cdots a_n$ multiplicirt, beziehlich die Werthe $b_1, b_2, \cdots b_n$ liefert, fo dass alfo

$$\frac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} a_r = b_r.$$

Ich nenne $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Nenner des Bruches, $b_1, b_2 \cdots b_n$ feine entsprechenden Zähler, und fetze zwei Brüche, oder zwei Ausdrücke, welche aus Brüchen numerisch abgeleitet find, dann und nur dann einander gleich, wenn fie mit jeder Grösse erster Stufe multiplicirt Gleiches liefern. Wenn auch die Zähler Grössen 1-ter oder (n — 1)-ter Stufe find, und in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo nenne ich den Bruch einen umkehrbaren, und bezeichne in diefem Falle, wenn

$$Q = \frac{b_1, b_2, \cdots b_n}{a_1, a_2, \cdots a_n}$$

ist, mit $\frac{1}{Q}$ den umgekehrten Bruch, d. h. ich fetze

$$\frac{1}{Q} = \frac{a_1, a_2, \cdots a_n}{b_1, b_2, \cdots b_n}.$$

Anm. Der Gedanke, welcher diefer Erklärung zu Grunde liegt, ist leicht hindurchzufehen. In der Algebra ist nämlich unter dem Quotienten $\frac{a}{b}$ der Ausdruck verstanden, welcher mit b multiplicirt a giebt, und dies genügt (wenn b nicht null ist) zur Definition des Zahlquotienten. Für die extenfiven Grössen genügt es nicht zu wissen, welches Refultat die Multiplikation des Quotienten mit irgend einer (von Null verschiedenen) Grösse liefert, indem daraus nur die Multikation desselben mit folchen Grössen fich bestimmt, welche aus jener Grösse numerisch ableitbar find. Man fieht alfo, dass in einem Gebiete n-ter Stufe die Refultate der Multiplikation eines Quotienten mit n in keiner Zahlbeziehung stehenden Grössen bestimmt fein müssen, damit der Quotient vollständig bestimmt fei. Der Quotient, in

Hosted by Google

diesem Sinne aufgefasst, ist für die Differenzial- und Integral-Rechnung extensiver Grössen, so wie für die Behandlung der geometrischen Verwandtschaften unentbehrlich. Ich bemerke noch, dass man als Nenner des Quotienten auch beliebige Grössen höherer Stufen hätte gestatten können; doch würde man dann den wesentlichen Vortheil grösserer Einfachheit gegen den zweifelhaften Vortheil unfruchtbarer Allgemeinheit austauschen. Ich werde deshalb auch die Zähler, wenn nicht ausdrücklich anderes festgesetzt wird, stets als Grössen erster Stufe betrachten.

378. Zwei Brüche oder Vielfachensummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe multiplicirt, Gleiches liefern, sind einander gleich, vorausgesetzt, dass n die Stufe des Hauptgebietes ist.

Beweis. Es seien Q und Q_1 die beiden Brüche oder Vielfachensummen von Brüchen, welche mit n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen erster Stufe $a_1 \cdots a_n$ multiplicirt, Gleiches liefern, also es sei

$$* \quad Qa_r = Q_1 a_r$$

für jeden Werth r zwischen 1 und n, so ist zu zeigen, dass $Q = Q_1$, d. h. (nach 377) dass Q und Q_1 mit jeder Grösse erster Stufe x multiplicirt Gleiches liefern. Nun lässt sich (nach 24) jede solche Grösse in einem Hauptgebiete n-ter Stufe aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen, also aus $a_1, \cdots a_n$ numerisch ableiten. Es sei

$$x = x_1 a_1 + \cdots x_n a_n,$$

dann ist

$$\begin{aligned} Qx = Q(x_1 a_1 + \cdots x_n a_n) &= x_1 Qa_1 + \cdots x_n Qa_n \quad [44] \\ &= x_1 Q_1 a_1 + \cdots x_n Q_1 a_n \quad [*] \\ &= (x_1 a_1 + \cdots x_n a_n) Q_1 \quad [44] \\ &= Q_1 x. \end{aligned}$$

379. Einen Bruch multiplicirt man mit einer Zahl, indem man jeden Zähler mit dieser Zahl multiplicirt, und Brüche von gleichen Nennern addirt man, indem man die entsprechenden Zähler addirt, wobei die Nenner in beiden Fällen ungeändert bleiben, d. h., beides zusammengefasst,

$$\beta \frac{b_1, b_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} + \gamma \frac{c_1, c_2, \cdots}{a_1, a_2, \cdots} + \cdots = \frac{(\beta b_1 + \gamma c_1 + \cdots), (\beta b_2 + \gamma c_2 + \cdots), \cdots}{a_1 \quad , a_2 \quad , \cdots}.$$

Hosted by Google

Beweis. Zu zeigen ist (nach 378), dass beide Seiten der zu erweifenden Gleichung mit jeder der Grössen $a_1, \cdots a_n$ multiplicirt, gleiches Refultat liefern. Nun ist (nach 44)

$$\left(\beta\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}+\gamma\frac{c_1,\ c_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}+\cdots\right)a_r$$
$$=\beta\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}a_r+\gamma\frac{c_1,\ c_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}a_r+\cdots$$
$$=\beta b_r+\gamma c_r+\cdots \qquad [377].$$

Ferner ist

$$\frac{(\beta b_1+\gamma c_1+\cdots),\ (\beta b_2+\gamma c_2+\cdots),\cdots}{a_1\qquad\qquad ,\ a_2\qquad\qquad ,\cdots}a_r$$
$$=\beta b_r+\gamma c_r+\cdots \qquad [377].$$

Bezeichnen wir alfo der Kürze wegen die linke Seite der zu erweifenden Gleichung mit L, die rechte mit R, fo wird für jeden Index r

$$^*\ La_r=Ra_r.$$

Folglich $L=R$ (nach 378).

380. Jeden Bruch kann man auf die Form bringen, dass feine Nenner beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander ftehende Grössen erster Stufe find (wo n die Stufenzahl des Hauptgebietes ist), und zwar ist

$$\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}=\frac{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}b_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}b_\alpha},\cdots}{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots}$$

wenn $\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander ftehende Grössen, und $\alpha_{r,s}$ Zahlen find.

Beweis. Es ist

$$\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}a_\alpha}=\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}\frac{b_1,\ b_2,\cdots}{a_1,\ a_2,\cdots}a_\alpha} \qquad [44]$$
$$=\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}b_\alpha} \qquad [377].$$

Aber auch

$$\frac{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}b_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}b_\alpha},\cdots}{\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_\alpha},\ \sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_\alpha},\cdots}\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}a_\alpha}=\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}b_\alpha}\ [377].$$

Alfo liefern beide Ausdrücke mit $\sum\overline{\alpha_{r,\alpha}a_\alpha}$ multiplicirt, für jeden Werth von $1\cdots n$ gleiches Refultat, find alfo, da $\sum\overline{\alpha_{1,\alpha}a_1}$, $\sum\overline{\alpha_{2,\alpha}a_2},\cdots$ nach der Hypothefis in keiner Zahlbeziehung zu einander ftehen, (nach 378) einander gleich.

Hosted by Google

381. Wenn $e_1, e_2, \cdots e_n$ die urſprünglichen Einheiten ſind, und mit $E_{r,s}$ der Kürze wegen der Bruch bezeichnet wird, deſſen Nenner die urſprünglichen Einheiten ſind, und von deſſen Zählern derjenige, welcher dem Nenner e_r entſpricht, gleich e_s iſt, während alle übrigen Zähler desſelben null ſind, d. h. wenn

$$* \quad E_{r,s}e_r = e_s \text{ und } E_{r,s}e_t = 0 \; [t \gtrless r]$$

iſt, ſo laſſen ſich die n^2 Ausdrücke, welche aus $E_{r,s}$ hervorgehen, indem man ſtatt r und s nach und nach beliebige der Zahlen $1 \cdots n$ ſetzt, als Brucheinheiten ſetzen, d. h. es laſſen ſich alle Brüche aus ihnen numeriſch ableiten, während ſie ſelbſt in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, und zwar iſt

$$\frac{\sum \overline{\alpha_{1,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}}, \; \sum \overline{\alpha_{2,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}}, \cdots}{e_1 \quad , \quad e_2 \quad , \cdots} = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}}.$$

Beweis 1. Es iſt

$$\frac{\sum \overline{\alpha_{1,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}}, \; \sum \overline{\alpha_{2,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}}, \cdots}{e_1 \quad , \quad e_2 \quad , \cdots} e_r = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} \qquad [177].$$

Ferner iſt

$$\sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}} e_r = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} e_r} \qquad [44]$$

$$= \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} E_{r,\mathfrak{b}} e_r} = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} \qquad [*],$$

indem nämlich $E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} e_r = 0$ iſt für $\mathfrak{a} \gtrless r$, und $F_{r,\mathfrak{b}} e_r = e_{\mathfrak{b}}$ iſt. Alſo beide Ausdrücke, da ſie mit jeder der Grössen $e_1 \cdots e_n$ multiplicirt Gleiches liefern (nach 378) einander gleich.

2. Angenommen zweitens, es beſtände zwiſchen den Grössen $E_{r,s}$ eine Gleichung der Form

$$\sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}} = 0,$$

ſo hätte man für jeden Index r

$$0 = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}} e_r = \sum \overline{\alpha_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} e_r} \qquad [44].$$

Alſo da $E_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} e_r = 0$ iſt, wenn r von $\mathfrak{a}$ verſchieden iſt,

$$= \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} E_{r,\mathfrak{b}} e_r} = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} \qquad [*].$$

Wenn aber

$$0 = \sum \overline{\alpha_{r,\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{b}}} = \alpha_{r,1} e_1 + \alpha_{r,2} e_2 + \cdots,$$

ſo muss, da $e_1, e_2, \cdots$ in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehen, (nach 28) jeder der Koefficienten von $e_1, e_2, \cdots$ null ſein, d. h.

Hosted by Google

$$\alpha_{r,s} = 0$$

für jedes r und s, alſo ist die angenommene Gleichung identisch null, d. h. (nach 2) die Grössen $E_{r,s}$ stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

382. Jeder Bruch lässt ſich als Lückenausdruck mit einfacher Lücke darstellen, und zwar ist, wenn die Nenner $a_1, \cdots a_n$ ein einfaches Normalſystem bilden,

$$\frac{b_1,\ b_2, \cdots}{a_1,\ a_2, \cdots} = [1|a_1]b_1 + [1|a_2]b_2 + \cdots.$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass ſie mit jeder Grösse erster Stufe x multiplicirt Gleiches liefern. Nun ist, wenn $x = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots$ ist,

$$([1|a_1]b_1 + [1|a_2]b_2 + \cdots)x = [x|a_1]b_1 + [x|a_2]b_2 + \cdots \quad [353]$$
$$= x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots \quad [153].$$

Aber auch

$$\frac{b_1,\ b_2, \cdots}{a_1,\ a_2, \cdots}x = \frac{b_1,\ b_2, \cdots}{a_1,\ a_2, \cdots}(x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots) = x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots \quad [377].$$

Somit liefern beide Seiten der zu erweiſenden Gleichung mit jeder Grösse erster Stufe multiplicirt Gleiches, ſind alſo ſelbst gleich (nach 357, 377).

Anm. Es ist alſo der Bruch nur eine einfachere Form des Lückenausdruckes mit einer Lücke, und kann alſo auch jedes System beliebig vieler linearer Zahlfunktionen von beliebig vielen Zahlgrössen als Produkt eines Quotienten in eine extenſive Variable dargestellt werden.

383. Erklärung. Das bezügliche Produkt der Zähler eines Bruches, dessen Nenner das System der ursprünglichen Einheiten bilden, nenne ich den Potenzwerth des Bruches, und bezeichne den Potenzwerth des Bruches Q, wenn n die Anzahl der Nenner ist, mit $[Q^n]$, d. h. ich ſetze, wenn $Q = \frac{a_1,\ a_2, \cdots a_n}{e_1,\ e_2, \cdots e_n}$ ist, und $e_1,\ e_2, \cdots e_n$ das System der ursprünglichen Einheiten bilden,

$$[Q^n] = [a_1a_2 \cdots a_n].$$

Hosted by Google

Anm. Wenn jeder Zähler das p-fache des entsprechenden Nenners ist, so ist der Bruch vermöge der Definition gleich der Zahl p; das bezügliche Produkt der Zähler ist dann $[pe_1 \cdot pe_2 \cdots pe_n] = p^n [e_1 e_2 \cdots e_n]$, also da das bezügliche Produkt der ursprünglichen Einheiten 1 ist, $= p^n$, d. h. in einem Hauptgebiete n-ter Stufe ist der Potenzwerth einer Zahl p gleich p^n. Der tiefere Grund der gewählten Benennuug und Bezeichnung liegt in einer eigenthümlichen Verknüpfung der extenfiven Brüche, welche ganz der bezüglichen Multiplikation entspricht, und deren Wefen ich hier in mehr anschaulicher Form zu entfalten verfuchen werde. Ich gründe den Begriff diefer Verknüpfung auf den des Lückenproduktes. Wenn nämlich $A, B, \cdots, A_1, B_1, \cdots$ Brüche find, deren Nenner etwa die ursprünglichen Einheiten fein mögen, und $a, b, \cdots$ beliebige Grössen erster Stufe, 1 aber eine Lücke ist, in welche Brüche der genannten Art (alfo Grössen nullter Stufe) eintreten follen, fo fetze ich $[AB\cdots] = [A_1 B_1 \cdots]$ dann und nur dann, wenn in Bezug auf eine beliebige Reihe von Grössen erster Stufe $a, b, \cdots$, deren Anzahl gleich der Anzahl der Faktoren jener Produkte ist,

$$[la \cdot lb \cdots]AB\cdots = [la \cdot lb \cdots \cdot]A_1 B_1 \cdots \cdot$$

ist. Ich nenne das Produkt $[AB\cdots]$ ein (auf das Hauptgebiet) bezügliches Produkt der Brüche $A, B, \cdots\cdot$. Aus diefem Begriffe folgt (nach 360) fogleich, dass die Ordnung der Faktoren in diefem Produkte für den Werth desfelben gleichgültig ist, ein Gefetz, welches mit dem in 58 ausgesprochenen in Uebereinstimmung ist, da die Brüche der genannten Art als Grössen nullter Stufe zu betrachten find. Ferner ergiebt fich leicht, dass wenn in dem Produkte $[la \cdot lb \cdots \cdot]$ zwei der Faktoren, z. B. die beiden ersten, einander gleich find, allemal $[la \cdot lb \cdots \cdot]AB\cdots = 0$ ist. Denn es ist (nach 353) $[la \cdot la \cdot lc \cdots]ABC\cdots$ gleich einem Bruche, dessen Zähler die Summe aller der Ausdrücke ist, die man dadurch erhält, dass man $A, B, C, \cdots$ in allen möglichen Anordnungen in die Lücken eintreten lässt, und dessen Nenner die Anzahl diefer Ausdrücke ist. Nun zeigt fich, dass fich die Glieder des Zählers paarweife aufheben. Denn wenn $PQR\cdots$ eine andere Ordnung der Faktoren $ABC\cdots$ darstellt, und zwar fo, dass P in die erste Lücke eintreten foll, Q in die zweite u. f. w., fo wird das daraus entspringende Glied gleich $[Pa \cdot Qa \cdot Rc \cdots \cdot]$. Vertauscht man P und Q, fo geht aus diefer Ordnung das Glied $[Qa \cdot Pa \cdot Rc \cdots]$ hervor, die Summe beider giebt aber null, da Pa und Qa Grössen erster Stufe find, und deren Vertauschung (nach 60) entgegengefetzten Werth bedingt. Alfo heben fich die Glieder im Zähler paarweife auf, d. h. der Zähler wird null, alfo der Bruch null. Dasfelbe gilt, wenn in dem Produkte $[la \cdot lb \cdots \cdot]$ beliebige zwei Faktoren gleich werden, fo dass alfo in diefem Falle stets $[la \cdot lb \cdots \cdot]AB\cdots = 0$ ist. Daraus folgt aber wiederum fogleich, dass wenn fich die Grössenreihe $a, b, \cdots\cdot$ lineal ändert, z. B. b in $b' = b + \alpha a$ fich verwandelt, das Produkt

Hosted by Google

$[la\cdot lb\cdots]AB\cdots$ denfelben Werth behält, und hieraus (nach 76), dass wenn fich a, b,$\cdots$ beliebig, jedoch fo ändern, dass ihr Produkt $[ab\cdots]$ konstant bleibt, auch $[la\cdot lb\cdots]AB\cdots$ konstant bleibt. Wir können daher diefen Ausdruck als Verknüpfung, und zwar als multiplikative Verknüpfung von $[ab\cdots]$ und $[AB\cdots]$ anfehen, und schreiben daher $[la\cdot lb\cdots]AB\cdots = [ab\cdots][AB\cdots]$. Hier hat $[AB\cdots]$, da es mit dem Produkte $[ab\cdots]$ verknüpft, wieder eine Summe von folchen Produkten derfelben Faktorenzahl, alfo eine Grösse derfelben Stufe liefert, ganz die Bedeutung eines extenfiven Bruches, aber eines folchen, der, wenn die Anzahl der Faktoren m ist, nur mit Grössen m-ter Stufe zufammentritt. Es feien E_1, $E_2,\cdots$ die Einheiten m-ter Stufe, und fei $E_1[AB\cdots] = A_1$, $E_2[AB\cdots] = A_2,\cdots$, fo ist klar, dass $[AB\cdots]$ einem Bruche Q gleich ist, dessen Nenner E_1, $E_2,\cdots$, und dessen entsprechende Zähler A_1, $A_2,\cdots$ find. Denn es giebt jenes Produkt $[AB\cdots]$ mit den Einheiten m-ter Stufe, alfo auch mit jeder aus ihnen ableitbaren Grösse, d. h. mit jeder Grösse m-ter Stufe multiplicirt, dasfelbe Refultat, wie diefer Bruch Q auf gleiche Weife verknüpft liefert, d. h. es ist vermöge der Definitionen jenes Produktes und diefes Quotienten $[AB\cdots] = Q$, d. h. das bezügliche Produkt von m Brüchen, deren Nenner und Zähler von erster Stufe find, giebt einen Bruch, dessen Nenner und Zähler von m-ter Stufe find. Durch die Reciprocität zwischen Grössen erster und $(n-1)$-ter Stufe (im Hauptgebiete n-ter Stufe) ergiebt fich auch, dass das bezügliche Produkt von m Brüchen, deren Nenner und Zähler von $(n-1)$-ter Stufe find, einen Bruch liefert, dessen Nenner und Zähler von $(n-m)$-ter Stufe find. Dies letztere Produkt würde daher als regressives, das erstere als progressives Produkt von Brüchen zu betrachten fein. Wir bleiben hier bei dem ersteren, alfo dem progressiven Produkte der Brüche stehen, um namentlich noch die progressiven Potenzen der Brüche zu betrachten. Da das Produkt gleicher Faktoren eben nur Eine Anordnung diefer Faktoren gestattet, fo geht fogleich aus dem Begriffe hervor, dass $[A^m][ab\cdots] = [Aa\cdot Ab\cdots]$ fei, vorausgefetzt natürlich, dass die Anzahl der Faktoren a, b,$\cdots$ auch m betrage. Setzen wir die urfprünglichen Einheiten e_1, $e_2,\cdots$ als Nenner, und a_1, $a_2,\cdots$ als entsprechende Zähler, d. h. $Ae_1 = a_1$ u. f. w., fo ergiebt fich unmittelbar, dass $[A^m]$ mit dem Produkte von m urfprünglichen Einheiten multiplicirt, das Produkt der m entsprechenden Zähler gebe, und dass alfo die Potenzen von A jede Grösse, welche aus den urfprünglichen Einheiten hervorgegangen ist, und welche den Exponenten jener Potenz als Stufenzahl hat, in diejenige Grösse verwandelt, welche aus den entsprechenden Zählern genau auf diefelbe Weife hervorgeht. Betrachten wir ins Befondere diejenige Potenz von A, deren Exponent mit der Stufenzahl n des Hauptgebietes gleich ist, alfo $[A^n]$, fo ergiebt fich $[A^n][e_1e_2\cdots e_n] = [a_1a_2\cdots a_n]$, d. h. gleich dem bezüglichen Produkte der Zähler, alfo (nach 383) gleich dem

Hosted by Google

Potenzwerthe von A. Aber da das bezügliche Produkt der n ursprünglichen Einheiten (nach 94) gleich 1 ist, so ist $[A^n]$ selbst diesem Potenzwerthe gleich, worin also die vollständige Begründung der oben gewählten Bezeichnung liegt.

384. Der Potenzwerth eines Bruches ist gleich dem bezüglichen Produkte der Zähler, dividirt durch das der Nenner, d. h. wenn

$$Q = \frac{a_1, a_2, \cdots}{b_1, b_2, \cdots} \text{ ist, so ist } [Q^n] = \frac{[a_1 a_2 \cdots]}{[b_1 b_2 \cdots]}.$$

Beweis. Es sei $Qe_r = c_r$ für jeden Index r von 1 bis n; so ist $Q = \frac{c_1, c_2, \cdots}{e_1, e_2, \cdots}$ (nach 380). Ferner seien $b_1, b_2, \cdots$ als Vielfachensummen der ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ ausgedrückt, und sei für jeden Index r von 1 bis n, $b_r = \sum \beta_{r,\alpha} e_\alpha$, so ist $a_r = Qb_r = \sum \beta_{r,\alpha} Qe_\alpha = \sum \beta_{r,\alpha} c_\alpha$. Somit ist

$$\frac{[a_1 a_2 \cdots]}{[b_1 b_2 \cdots]} = \frac{[\sum \beta_{1,\alpha} c_\alpha \cdot \sum \beta_{2,\alpha} c_\alpha \cdots]}{[\sum \beta_{1,\alpha} e_\alpha \cdot \sum \beta_{2,\alpha} e_\alpha \cdots]}$$

$$= \frac{\sum \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [c_\alpha \cdot c_\mathfrak{b} \cdots]}{\sum \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [e_\alpha \cdot e_\mathfrak{b} \cdots]} \qquad [45]$$

$$= \frac{\sum (-1)^r \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [c_1 c_2 \cdots]}{\sum (-1)^r \beta_{1,\alpha}\beta_{2,\mathfrak{b}} \cdots [e_1 e_2 \cdots]} \qquad [57]$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ alle möglichen verschiedenen Anordnungen der Zahlen 1, 2, $\cdots$ darstellen und r die Anzahl der Zahlenpaare ist, die in den beiden Zahlreihen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$$
$$1, 2, \cdots$$

entgegengesetzt geordnet sind. Hier heben sich nun die beiden Summen, und da $[e_1 e_2 \cdots] = 1$ ist, so erhält man

$$\frac{[a_1 a_2 \cdots]}{[b_1 b_2 \cdots]} = [c_1 c_2 \cdots] = [Q^n] \qquad \text{(nach 383).}$$

385. Wenn Q und Q_1 Brüche mit n Nennern sind, und zu einander in der Zahlbeziehung

$$Q = \alpha Q_1$$

stehen, so stehen ihre Potenzwerthe in der Zahlbeziehung

$$[Q^n] = \alpha^n [Q_1^n].$$

Beweis. Es sei

$$Q_1 = \frac{a_1, \cdots a_n}{e_1, \cdots e_n}, \text{ also } Q = \frac{\alpha a_1, \cdots \alpha a_n}{e_1, \cdots e_n},$$

Hosted by Google

ſo ist (nach 383)

$$[Q^n] = [\alpha a_1 \cdot \alpha a_2 \cdots \alpha a_n] = \alpha^n [a_1 a_2 \cdots a_n] \qquad [46]$$
$$= \alpha^n [Q_1{}^n] \qquad [383].$$

386. Wenn zwiſchen den Zählern eines Bruches eine Zahlbeziehung herrſcht, ſo läſst ſich der Bruch ſtets auf die Form bringen, dass einer oder mehrere ſeiner Zähler null werden, und zwiſchen den übrigen Zählern keine Zahlbeziehung ſtattfinde; und zwar wenn $e_1, \cdots e_n$ die Nenner, $a_1, \cdots a_n$ die Zähler des Bruches Q ſind, und zwiſchen $a_1, \cdots a_m$ keine Zahlbeziehung ſtattfindet, aber die übrigen $n - m$ Zähler aus ihnen numeriſch ableitbar ſind, ſo dass

$$* \quad a_{m+r} = \alpha_{r,1} a_1 + \alpha_{r,2} a_2 + \cdots \alpha_{r,m} a_m$$

ist, ſo ist

$$Q = \frac{e_1, \cdots a_m, \quad 0, \quad 0, \quad \cdot\cdot, \quad 0}{e_1, \cdots e_m, \; c_{m+1}, \; c_{m+2}, \cdot\cdot, \; c_n}, \text{ wo}$$

$$c_{m+r} = \alpha_{r,1} c_1 + \alpha_{r,2} e_2 + \cdots \alpha_{r,m} e_m - e_{m+r}, \text{ d. h.}$$
$$= \frac{e_1, \cdots e_m}{a_1, \cdots a_m} a_{m+r} - e_{m+r}$$

ist. Und alle aus $c_{m+1}, \cdots c_n$ numeriſch ableitbaren Grössen, aber auch keine andern geben mit Q multiplicirt, null.

Beweis. $Qc_{m+r} = \alpha_{r,1} Qe_1 + \cdots \alpha_{r,m} Qe_m - Qe_{m+r}$
$$= \alpha_{r,1} a_1 + \cdots \alpha_{r,m} a_m - a_{m+r},$$

da nach Hypotheſis $a_1, \cdots a_n$ die zu den Nennern $e_1, \cdots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches Q ſind

$$= 0 \qquad [*].$$

Alſo ſind die zu den Nennern $c_{m+1}, \cdots c_n$ gehörigen Zähler null. Ich zeige nun, dass zwiſchen den n Grössen $e_1, \cdots e_m$, $c_{m+1}, \cdots c_n$ keine Zahlbeziehung herrſcht. Der Kürze wegen ſetze ich

$$\alpha_{r,1} e_1 + \cdots \alpha_{r,m} e_m = q_r,$$

ſo dass alſo $c_{m+r} = q_r - e_{m+r}$ ist, ſo ist

$$[e_1 \cdot e_2 \cdot \cdots e_m \cdot c_{m+1} \cdot \cdots c_n]$$
$$= [e_1 e_2 \cdot \cdots c_m (q_1 - e_{m+1}) \cdots (q_{m-n} - e_n)].$$

Da hier $q_1, q_2, \cdots$ aus $e_1, e_2, \cdots e_m$ numeriſch abgeleitet ſind, ſo können wir ſie (nach 67) weglaſſen und erhalten das Produkt

$$= \mp [e_1 e_2 \cdots e_n],$$

Hosted by Google

alſo von Null verſchieden; folglich ſtehen e_1, $e_2 \cdots e_m$, $c_{m+1}, \cdots c_n$ (nach 61) in keiner Zahlbeziehung; alſo lässt ſich (nach 380) Q in der im Satze angegebenen Weiſe als Bruch darſtellen. Daraus nun, dass $c_{m+1}, \cdots c_n$ mit Q multiplicirt Null geben, folgt ſogleich, dass dies auch für jede Vielfachenſumme dieſer Grössen gilt. Aber auch umgekehrt muss jede Grösse p, welche mit Q multiplicirt null giebt, eine Vielfachenſumme von $c_{m+1}, \cdots c_n$ ſein. Denn wie auch p beſchaffen ſei, immer muss es ſich (nach 24) aus e_1, $e_2, \cdots e_m$, $c_{m+1}, \cdots c_n$ ableiten, alſo ſich in der Form

$$p = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_m e_m + q$$

darſtellen lassen, wo q eine Vielfachenſumme von $c_{m+1}, \cdots c_n$ ist. Soll dann $pQ = 0$ ſein, ſo hat man, da $Qe_1 = a_1$, u. ſ. w., $Qc_{m+1} = 0$ u. ſ. w. ist,

$$0 = pQ = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_m a_m,$$

alſo (nach 28) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m = 0$, alſo $p = q$, d. h. eine Vielfachenſumme von $c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots c_n$.

387. Erklärung. Wenn ein Bruch Q mit einer von Null verſchiedenen Grösse erſter Stufe multiplicirt ein Vielfaches dieſer Grösse, etwa das ϱfache derſelben liefert, ſo dass alſo

$$Qx = \varrho x$$

ist, ſo nenne ich den Koefficienten ϱ (mag ϱ nun reell oder imaginär ſein) eine Hauptzahl des Bruches Q, und das Gebiet, welchem alle Grössen x angehören, welche jener Gleichung genügen, das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet.

388. Aufgabe. Die Hauptzahlen und die zugehörigen Hauptgebiete eines Bruches zu finden.

Auflöſung. Es ſei ϱ eine Hauptzahl eines Bruches Q mit n Nennern $e_1, e_2, \cdots e_n$; und ſei $x = \sum x_\alpha e_\alpha$ eine von Null verſchiedene Grösse, welche mit Q multiplicirt ihr ϱfaches liefert, ſo hat man

$$Qx = \varrho x, \text{ d. h. } (\varrho - Q)x = 0.$$

Setzt man hierin ſtatt x ſeinen Werth, und ſetzt

$$(a) \quad (\varrho - Q)e_\alpha = c_\alpha,$$

ſo erhält man

$$(b) \quad 0 = \sum x_\alpha c_\alpha.$$

Hosted by Google

Da nun x von Null verschieden ist, so muss auch mindestens eine der Zahlen $x_1, \cdots x_n$ von Null verschieden sein, also (nach 16) zwischen $c_1, \cdots c_n$ eine Zahlbeziehung stattfinden, folglich (nach 61) ihr kombinatorisches Produkt null sein, also

(c) $0 = [c_1 c_2 \cdots c_n]$,

d. h. (nach 384) der Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$ muss null sein. Umgekehrt, wenn diese Gleichung (c) erfüllt wird, so gilt (nach 66) auch eine Gleichung der Form (b), also giebt es dann eine Grösse $x \gtrless 0$, welche der Gleichung $Qx = \varrho x$ genügt, d. h. ϱ ist dann eine Hauptzahl. Setzt man in der letzten Gleichung statt $c_1, c_2, \cdots$ ihre Werthe aus (a), so erhält man

$$0 = [(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \cdots (\varrho e_n - Qe_n)],$$

oder indem man die Klammern löst

(d) $\alpha_0 \varrho^n - \alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} - \cdots + (-1)^n \alpha_n = 0$,

wo α_r aus dem Produkte $[e_1 e_2 \cdots e_n]$ dadurch hervorgeht, dass man auf alle möglichen verschiedenen Arten r der Grössen $e_1, e_2, \cdots e_n$ in die entsprechenden Grössen $Qe_1, Qe_2, \cdots Qe_n$ umwandelt, während man die jedesmal übrigen unverändert lässt. Die n Wurzeln $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ dieser Gleichung (d) sind also die gesuchten Hauptzahlen; ihr Produkt ist nach dem Neutonschen Satze gleich $\alpha_n : \alpha_0$, d. h. gleich dem Potenzwerthe von Q (nach 384). Die Grössen x sind dann durch die Gleichung (b) bestimmt. Nach dieser Gleichung stehen $c_1, c_2, \cdots c_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander. Folglich lässt sich (nach 17) aus den Grössen $c_1, \cdots c_n$ ein Verein von weniger als n Grössen, etwa $c_1, c_2, \cdots c_m$, ausfondern, welcher keiner Zahlbeziehung unterliegt, und aus welchem die übrigen Grössen $(c_{m+1}, \cdots c_n)$ numerisch ableitbar sind; dann aber lässt sich der Bruch $\varrho - Q$, dessen zu den Nennern $e_1, \cdots e_n$ gehörigen Zähler (nach a) $c_1, \cdots c_n$ sind, (nach 386) auf die Form bringen, dass unter den Zählern n — m derselben null werden; die zugehörigen Nenner seien $a_{m+1}, \cdots a_n$; so haben (nach 386) alle aus $a_{m+1}, \cdots a_n$ ableitbaren Grössen x, aber auch keine andern, die Eigenschaft, dass $(\varrho - Q)x = 0$ sei, d. h. dass $Qx = \varrho x$ wird, d. h. also, das Gebiet $a_{m+1} \cdots a_n$ ist das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet. Also:

Hosted by Google

„Jeder Bruch Q mit n Nennern hat n Hauptzahlen und zwar ſind dieſe die Wurzeln ϱ der gleichbedeutenden Gleichungen c oder d, das Produkt dieſer n Wurzeln ist gleich dem Potenzwerthe von Q, und das zu der Hauptzahl ϱ gehörige Hauptgebiet erhält man, indem man (nach 386) $\varrho - Q$ als einen Bruch darstellt, von dessen Zählern einer oder mehrere null ſind, während die übrigen Zähler in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen; dann ist das Gebiet derjenigen Nenner dieſes Bruches $\varrho - Q$, deren entsprechende Zähler null ſind, das verlangte Hauptgebiet.“

389. Wenn die n Hauptzahlen $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ eines Bruches Q alle von einander verschieden ſind, ſo ſind die n zugehörigen Hauptgebiete alle von erster Stufe und stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

Beweis. Nach 388 lässt ſich zu jeder der Grössen $\varrho_1, \cdots \varrho_n$, z. B. zu ϱ_r, eine von Null verschiedene Grösse erster Stufe finden, welche mit Q multiplicirt ihr ϱ_r-faches liefert. Es ſeien $a_1, \cdots a_n$ dieſe Grössen, ſo dass $Qa_r = \varrho_r a_r$ ist. Angenommen nun, $a_1, \cdots a_n$ ständen in einer Zahlbeziehung, ſo müssten ſich aus ihnen (nach 17) m Grössen, etwa $a_1, \cdots a_m$, ausſondern lassen, die in keiner Zahlbeziehung zu einander ständen, und aus denen jede der übrigen, z. B. a_r, numerisch ableitbar wäre. Es ſei $a_r = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_m a_m$, ſo muss, da a_r von Null verschieden ist, auch mindestens einer der Koefficienten $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ von Null verschieden ſein. Es ſei dies z. B. α_1. Nun hat man

$$Qa_r = Q\sum \alpha_\alpha a_\alpha = \sum \alpha_\alpha Q a_\alpha = \sum \alpha_\alpha \varrho_\alpha a_\alpha,$$

da nach der Voraussetzung $Qa_r = \varrho_r a_r$ ist, alſo wird

$$\alpha_1 \varrho_1 a_1 + \cdots \alpha_m \varrho_m a_m = Qa_r = \varrho_r a_r$$
$$= \varrho_r \alpha_1 a_1 + \cdots \varrho_r \alpha_m a_m,$$

folglich ſind (nach 29) die entsprechenden Koefficienten gleich, namentlich $\alpha_1 \varrho_1 = \alpha_1 \varrho_r$, d. h. da $\alpha_1 \gtrless 0$, ist $\varrho_r = \varrho_1$, was gegen die Voraussetzung ist. Alſo können $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Folglich kann auch keins der Hauptgebiete von höherer als erster Stufe ſein. Denn wäre z. B. das zu ϱ_1 gehörige Hauptgebiet von höherer Stufe, ſo müsste dies Gebiet mit dem Gebiete (n — 1)-ter Stufe der

Hosted by Google

Grössen $a_2 \cdots a_n$ (nach 26) mindestens ein Gebiet erster Stufe gemein haben. Es ſei c eine (von Null verſchiedene) Grösse dieſes gemeinſchaftlichen Gebietes, ſo wäre c aus $a_2, \cdots a_n$ numeriſch ableitbar, und würde ſich doch, da es in dem zu ϱ_1 gehörigen Hauptgebiete liegt, in ſein ϱ-faches verwandeln, was als unmöglich nachgewieſen ist.

390. Aufgabe. Den Fall gleicher Hauptzahlen zu unterſuchen.

Auflöſung. Wenn man die Bezeichnungen der vorhergehenden Sätze feſthält, ſo hat man (nach 388)

(a) $[c_1 c_2 \cdots c_n] = 0$, wo

(b) $c_r = (\varrho - Q)e_r$.

Es ſind alſo $c_1, c_2, \cdots c_n$ die zu den Nennern $e_1, e_2, \cdots e_n$ gehörigen Zähler des Bruches $\varrho - Q$, und die Gleichung (a) ſagt aus, dass das kombinatoriſche Produkt der n Zähler null ſei, d. h. dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null ſei. Es behalten nach dem Obigen die Gleichungen (a) und (b) ihre Bedeutung, wenn man ſtatt der Nenner $e_1, \cdots e_n$ beliebige n in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehende Grössen erster Stufe ſetzt. Die n Werthe von ϱ, welche der Gleichung a genügen, ſind (nach 389) die n Hauptzahlen von Q. Wenn nun mehrere, etwa $\mathfrak{a}$, derſelben gleich α ſind, ſo heisst das alſo, dass die Gleichung (a) für ϱ im Ganzen $\mathfrak{a}$ Werthe darbiete, welche gleich α ſind. Wenn aber ein Werth von ϱ gleich α ist, ſo lässt ſich (nach 388) eine von Null verſchiedene Grösse erster Stufe a_1 finden, welche mit Q multiplicirt ihr α-faches liefert. Es ſei dieſe Grösse $a_1 = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$, ſo muss von den Koefficienten $x_1, \cdots x_n$ mindestens einer von Null verſchieden ſein, weil ſonſt, gegen die Annahme, a_1 ſelbst null wäre. Es ſei x_1 von Null verſchieden, ſo ſtehen (nach 19) $a_1, e_2, \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, können alſo nach dem Obigen ſtatt $c_1, e_2, \cdots e_n$ in die Gleichungen (a) und (b) eingeſetzt werden; dann wird $c_1 = (\varrho - Q)a_1 = \varrho a_1 - Q a_1 = \varrho a_1 - \alpha a_1$ (nach Annahme) $= (\varrho - \alpha)a_1$ und die Gleichung (a) verwandelt ſich in

$$(\varrho - \alpha)[a_1 c_2 \cdots c_n] = 0.$$

Wir wollen annehmen, man habe, wenn die Gleichung

Hosted by Google

(a) im Ganzen $\mathfrak{a}$ Wurzeln $\varrho = \alpha$ hat, nach und nach die Gleichung (a) noch in die Formen

$$(\varrho - \alpha)^2[a_1 a_2 c_3 \cdots c_n] = 0$$

u. f. w., endlich in die Form

(c) $(\varrho - \alpha)^r[a_1 a_2 \cdots a_r c_{r+1} \cdots c_n] = 0$

umwandelt, wo $r < \mathfrak{a}$ ist, und zwar fo, dass

$$Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 \cdot Qa_2] = \alpha[a_1 a_2] \text{ u. f. w., endlich}$$

(d) $[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} \cdot Qa_r] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_r]$

fei und die n Grössen $a_1, \cdots a_r, e_{r+1}, \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo lässt fich zeigen, dass man diefe Umwandlungen auch fo weit fortfetzen könne, bis endlich $r = \mathfrak{a}$ werde. In der That, fo lange noch r kleiner ist als $\mathfrak{a}$, d. h. es noch mehr als r Wurzeln $\varrho = \alpha$ giebt, welche der Gleichung (c) genügen, fo ist aus der Theorie der Gleichungen bekannt, dass, wenn man jene Gleichung durch $(\varrho - \alpha)^r$ dividirt, der Quotient noch eine Wurzel $\varrho = \alpha$ darbieten müsse, d. h. es muss noch

(e) $[a_1 \cdots a_r c_{r+1} \cdots c_n] = 0$

fein, für $\varrho = \alpha$. Es feien $d_{r+1}, \cdots d_n$ die Werthe, in welche $c_{r+1}, \cdots c_n$ übergehen, wenn man in den letztern α statt ϱ fetzt, fo erhält man

(f) $[a_1 \cdots a_r d_{r+1} \cdots d_n] = 0$, wo

(g) $d_{r+1} = (\alpha - Q)e_{r+1}, \cdots, d_n = (\alpha - Q)e_n$

ist. Diefe Gleichung g fagt aus, dass zwischen den Grössen $a_1, \cdots a_r, d_{r+1} \cdots d_n$ eine Zahlbeziehung herrscht (nach 66). Es fei

(h) $\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} d_{r+1} + \cdots \alpha_n d_n = 0$

der Ausdruck diefer Zahlbeziehung, fo muss einer der Koefficienten $\alpha_{r+1}, \cdots \alpha_n$ von Null verschieden fein; denn wenn fie alle Null wären, fo würde zwischen $a_1, \cdots a_r$ eine Zahlbeziehung herrschen, was gegen die Vorausfetzung streitet. Es fei etwa α_{r+1} von Null verschieden, und fei $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \cdots \alpha_n e_n = a_{r+1}$ gefetzt, fo stehen (nach 19) $a_1, \cdots a_{r+1}, e_{r+2}, \cdots e_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander, können alfo statt $e_1, \cdots e_n$ in die Gleichungen (a) und (b), oder statt $a_1, \cdots a_r, e_{r+1}, \cdots e_n$ in die Gleichungen (c) und (d) eingefetzt werden, fo dass alfo nun $c_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1}$ gefetzt werden kann. Ferner ist dann

Hosted by Google

$$(\alpha - Q)a_{r+1} = \alpha_{r+1}(\alpha - Q)e_{r+1} + \cdots + \alpha_n(\alpha - Q)e_n$$
$$= \alpha_{r+1}d_{r+1} + \cdots + \alpha_n d_n \quad \text{[nach g]}$$
$$= -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_r a_r \quad \text{[nach h].}$$

Alfo ist

$$Qa_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \alpha a_{r+1}.$$

Folglich

$$[a_1 \cdots a_r \cdot Qa_{r+1}] = [a_1 \cdots a_r(\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \alpha a_{r+1})]$$
$$\text{(i)} \qquad = \alpha[a_1 \cdots a_r a_{r+1}] \quad \text{[67].}$$

Nun follte, wie oben gezeigt,

$$c_{r+1} = (\varrho - Q)a_{r+1} = \varrho a_{r+1} - Qa_{r+1}$$

fein, alfo wird

$$[a_1 \cdots a_r \cdot c_{r+1}]$$
$$= \varrho[a_1 \cdots a_r a_{r+1}] - [a_1 \cdots a_r \cdot Qa_{r+1}]$$
$$= \varrho[a_1 \cdots a_{r+1}] - \alpha[a_1 \cdots a_{r+1}] \quad \text{[nach i]}$$
$$= (\varrho - \alpha)[a_1 \cdots a_{r+1}].$$

Setzt man dies in die Gleichung (c) ein, fo erhält man

$$\text{(k)} \quad (\varrho - \alpha)^{r+1}[a_1 a_2 \cdots a_{r+1} c_{r+2} \cdots c_n] = 0,$$

d. h. die Gleichungen (c) und (d) bestehen noch fort, wenn man, fo lange noch $r < \mathfrak{a}$ bleibt, in ihnen $r + 1$ statt r fetzt, folglich bleiben fie noch bestehen wenn $r = \mathfrak{a}$ wird, d. h.

„Wenn unter den Hauptzahlen des Quotienten Q mehrere, und zwar $\mathfrak{a}$ einander gleich und zwar $= \alpha$ find, fo lassen fich $\mathfrak{a}$ Grössen erster Stufe $a_1, \cdots a_{\mathfrak{a}}$ von der Art finden, dass diefe mit $n - \mathfrak{a}$ der Grössen $e_1, \cdots e_n$, etwa mit $e_{\mathfrak{a}+1}, \cdots e_n$, in keiner Zahlbeziehung stehen, und

$$\text{(*)} \quad Qa_1 = \alpha a_1, [a_1 \cdot Qa_2] = \alpha[a_1 a_2] \text{ u. f. w., endlich}$$
$$[a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}-1} \cdot Qa_{\mathfrak{a}}] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}}]$$

fei, dann wird die Gleichung für die Hauptzahlen ϱ folgende:

$$\text{(**)} \quad (\varrho - \alpha)^{\mathfrak{a}}[a_1 a_2 \cdots a_{\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a}+1} \cdots c_n], \text{ wo}$$
$$\text{(***)} \quad c_r = (\varrho - Q)e_r$$

für jeden Index r von $\mathfrak{a} + 1$ an bis n ist.“

Es kommt nun darauf an, die zu den Nennern $a_1, \cdots a_n$ gehörigen Zähler des Bruches Q zu finden. Zunächst ist der zu dem Nenner a_1 gehörige Zähler nach dem Obigen gleich αa_1. Es fei der zu dem Nenner a_r gehörige Zähler x, d. h. $Qa_r = x$, fo hat man (aus *)

$$[a_1 a_2 \cdots a_{r-1} x] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_r],$$

Hosted by Google

d. h. $[a_1 a_2 \cdots a_{r-1}(x - \alpha a_r)] = 0$,
alfo besteht (nach 66) zwischen den Grössen a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$, $x - \alpha a_r$ eine Zahlbeziehung, d. h. es ist

$$x - \alpha a_r = a'_r,$$

wo a'_r irgend eine aus a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$ numerisch ableitbare Grösse ist, und man erhält $x = \alpha a_r + a'_r$, d. h.

(1) $$Qa_r = \alpha a_r + a'_r,$$

wo a'_r eine Vielfachenfumme von a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$ ist.

Es werde nun das Produkt von Q mit irgend einer aus $a_1, \cdots a_\mathfrak{a}$ numerisch ableitbaren Grösse p unterfucht, und zwar fei $p = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r$, wo $r = < \mathfrak{a}$, und $\alpha_r \gtrless 0$ ist, fo hat man

$$\begin{aligned} Qp &= Q(\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r) \\ &= \alpha_1 Qa_1 + \cdots \alpha_r Qa_r \\ &= \alpha_1 \alpha a_1 \cdots \alpha_r \alpha a_r + p' \qquad \text{[nach 1]}, \end{aligned}$$

indem p' eine Vielfachenfumme von a_1, $a_2, \cdots a_{r-1}$ darstellt,

$$= \alpha p + p', \text{ d. h.}$$

„Die durch die obige Gleichung (*) bestimmten Grössen a_1, $a_2, \cdots a_\mathfrak{a}$ haben die Eigenschaft, dass jede Vielfachenfumme derfelben der Gleichung

(****) $$Qp = \alpha p + p'$$

unterliegt, wo, wenn p aus den r ersten jener Grössen ableitbar ist, p' aus den $(r - 1)$ ersten derfelben ableitbar ist.“

Es leuchtet unmittelbar ein, dass wenn von den Grössen a'_2, $a'_3 \cdots$ der Gleichung (1) mehrere, etwa die Grössen a'_2, $\cdots a'_r$, null find, dann jede Vielfachenfumme von $a_1, \cdots a_r$ fich durch die Multiplikation mit Q in ihr α-faches verwandelt, und alfo das zu α gehörige Hauptgebiet von Q (fiehe 387) von r-ter Stufe ist.

Wenn unter den Hauptzahlen von Q nicht nur $\mathfrak{a}$ derfelben vorkommen, welche gleich α, fondern auch $\mathfrak{b}$, welche gleich β, $\mathfrak{c}$, welche gleich γ find u. f. w., wo α, β, $\gamma, \cdots$ alle von einander verschieden find, fo lassen fich nach dem Obigen $\mathfrak{b}$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen b_1, $\cdots b_\mathfrak{b}$ von der Art angeben, dass jede Vielfachenfumme q von $b_1, \cdots b_\mathfrak{b}$ der Gleichung $Qq = \beta q + q'$ genügt, wo, wenn q aus dem m ersten jener Grössen ableitbar ist, q' aus den

Hosted by Google

$(m-1)$ ersten derſelben ableitbar ist, und ebenſo lassen ſich c in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen $c_1, \cdots c_c$ von der Art angeben, dass jede Vielfachenſumme r von $c_1, \cdots c_c$ der Gleichung $Qr = \gamma r + r'$ genüge, wo, wenn r aus den m ersten der Grössen $c_1, \cdots c_c$ ableitbar ist, r' aus den $m-1$ ersten derſelben ableitbar ist u. ſ. w. Es lässt ſich zeigen, dass dann die Grössen $a_1, \cdots a_a$, $b_1, \cdots b_b$, $c_1, \cdots c_c$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und alſo als Nenner des Bruches Q geſetzt werden können. In der That nehmen wir z. B. an, dass zwischen den Grössen $a_1, \cdots a_a$, $b_1, \cdots b_b$, $c_1, \cdots c_{m-1}$ noch keine Zahlbeziehung bestehe, aber nun zwiſchen diesen Grössen und der Grösse c_m eine Zahlbeziehung hervortrete, ſo wird dieſe die Form haben

$$(m) \quad p + q + r = 0,$$

wo p eine Vielfachenſumme von $a_1, \cdots a_a$, q eine Vielfachenſumme von $b_1, \cdots b_b$, r eine Vielfachenſumme von $c_1, \cdots c_m$ ist, alſo wird auch

$$0 = Q(p + q + r)$$

ſein. Dies ist aber, wie oben gezeigt,

$$= \alpha p + p' + \beta q + q' + \gamma r + r',$$

oder, indem wir statt r ſeinen Werth $= -p - q$ aus der Gleichung (m) ſetzen,

$$0 = (\alpha - \gamma)p + (\beta - \gamma)q + p' + q' + r'.$$

Da nach dem Obigen r' aus $c_1, \cdots c_{m-1}$ numerisch ableitbar ist, ſo ſind alle in dieſer letzteren Gleichung vorkommenden Grössen aus den nach der Annahme in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen $a_1, \cdots a_a$, $b_1, \cdots b_b$, $c_1, \cdots c_{m-1}$ numerisch ableitbar. Die rechte Seite der letzten Gleichung wird ſich alſo als Vielfachenſumme der letztgenannten Grössen darstellen lassen, und da die linke Seite null ist, ſo werden (nach 28) alle einzelnen Koefficienten dieſer Vielfachenſumme null ſein. Wenn nun p von Null verſchieden, etwa $= x_1 a_1 + \cdots x_s a_s$ wäre, wo $x_s \gtrless 0$ ist, ſo würde p' nach dem Obigen aus $a_1, \cdots a_{s-1}$ numerisch ableitbar ſein, folglich würde a_s, da es auch in q, q', r', nicht enthalten ist, in jener gleich null geſetzten Vielfachenſumme nur einmal vorkommen, nämlich mit dem Koefficienten $(\alpha - \gamma)x_s$ ver-

Hosted by Google

bunden; diefer müsste alfo null fein, was unmöglich ist, da x_s nach der Annahme ungleich null, und α ungleich γ ist. Folglich ist die Annahme, dass p von Null verschieden fei, unmöglich, d. h. p ist gleich null, aus gleichem Grunde ist $q = 0$. Dann aber folgt aus der Gleichung (m), dass $r = 0$ ist. Da nun aber die Grössen $a_1, \cdots a_a$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo folgt aus $p = 0$, dass alle Koefficienten des Ausdruckes, durch welchen p aus $a_1, \cdots a_a$ abgeleitet ist, null find, und dasfelbe folgt für q und r. Alfo enthält die Gleichung (m) gar keinen Ausdruck der Zahlbeziehung; es findet alfo eine folche zwischen den Grössen $a_1, \cdots a_a$, $b_1, \cdots b_b$, $c_1, \cdots c_c, \cdots$ gar nicht statt, was zu zeigen war. Alfo

„Wenn die Gleichung

$$[(\varrho e_1 - Qe_1)(\varrho e_2 - Qe_2) \cdots (\varrho c_n - Qe_n)] = 0,$$

welche in Bezug auf ϱ vom n-ten Grade ist, $\mathfrak{a}$ Wurzeln $= \alpha$, $\mathfrak{b}$ Wurzeln $= \beta$ u. f. w. darbietet, wo $\alpha, \beta, \cdots$ von einander verschieden find, fo kann man n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen $a_1, \cdots a_a$, $b_2, \cdots b_b, \cdots$ von der Art angeben, dass wenn p eine Vielfachenfumme der m ersten unter den Grössen $a_1, \cdots a_a$, oder unter den Grössen $b_1, \cdots b_b$, oder unter den Grössen irgend einer folgenden Gruppe ist, dann Qp im ersten Falle $= \alpha p + p'$, im zweiten $= \beta p + p'$ u. f. w. fei, wo p' aus den $m - 1$ ersten Grössen derfelben Gruppe numerisch ableitbar ist."

Anm. 1. Wenn unter den Wurzeln ϱ ein Paar oder mehrere Paare imaginärer Wurzeln vorkommen, fo ändert das in den gewonnenen Refultaten nichts, da die Beweisführung ebenfowohl für imaginäre wie für reelle Wurzeln gilt. Es hat überdies nicht die geringste Schwierigkeit, die aus imaginären Wurzelpaaren fliessenden Bestimmungen in reelle Form umzufetzen, was ich daher dem Lefer überlasse.

Anm. 2. Die im Obigen entwickelten Gefetze find für die Theorie der geometrischen Verwandtschaften von Wichtigkeit. In der That stellt jeder Quotient, wenn er nicht mehr als vier Nenner enthält, geometrisch gedeutet eine bestimmte kollineare Verwandtschaft dar, in der Art, dass jedes Punktfystem mit dem Quotienten multiplicirt ein dem ersteren kollineares Punktfystem liefert, und umgekehrt lässt fich jedes einem ursprünglichen Punktfystem kollinear verwandte Punktfystem aus jenem durch Multiplikation mit einem Quotienten ableiten. Der Quotient gewährt nun vor jeder andern analytischen

Hosted by Google

Einkleidung jener Verwandtschaft den Vortheil, dass ſich die weſentlichen Eigenthümlichkeiten der Verwandtschaft an ihm auf die einfachste Weiſe ſymbolisch darstellen. Sind z. B. die vier Hauptzahlen eines Quotienten mit vier Nennern alle reell und von einander verschieden, ſo bieten je zwei kollinear verwandte Punktſysteme im Raume, welche durch jene Quotienten dargestellt werden können, vier Punkte dar, von denen keine drei in einer Ebene liegen, und welche mit den ihnen entsprechenden zuſammenfallen, und ausser dieſen giebt es keinen fünften Punkt, welcher mit dem ihm entsprechenden Punkte des andern Systems zuſammenfällt. Ebenſo enthalten die vorhergehenden Sätze die beſonderen Beziehungen kollinearer Verwandtschaft für die Fälle, wo mehrere der Hauptzahlen des zugehörigen Quotienten einander gleich werden. Die speciellen geometrischen Verwandtschaften, welche der Kollineation untergeordnet ſind, gehen durch specielle Annahmen hervor. So z. B. die Affinität durch die Annahme, dass den unendlich entfernten Punkten jedes Systems auch unendlich entfernte Punkte des andern entsprechen. Ferner die Gleichheit durch die Annahme, dass ausserdem das Produkt der Hauptzahlen, d. h. der Potenzwerth des Quotienten gleich eins ſei, die Kongruenz durch die Annahme, dass die entsprechenden Strecken gleich lang ſein ſollen (d. h. entweder $=1$, oder $=-1$, oder $=\cos.a+i\,\sin.a$), die Kongruenz verwandelt ſich in die Symmetrie, wenn das Produkt der Hauptzahlen $=-1$ statt $+1$ wird. Endlich die Aehnlichkeit geht aus der Affinität hervor durch die Annahme, dass die entsprechenden Strecken numerisch in gleichem Verhältnisse stehen. Wir betrachten nun im Folgenden noch eine specielle Form des Quotienten, welche mit der Verwandtschaft der Reciprocität in engster Beziehung steht.

391. Wenn ein Bruch Q die Eigenschaft hat, dass für beliebige von Null verschiedene Grössen erster Stufe a und b

(a) $[Qa|b]=[Qb|a]$ und $[Qa|a]\gtrless 0$

ist, ſo lassen ſich stets n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen erster Stufe $c_1,\cdots c_n$ von der Art finden, dass

(b) $[Qc_r|c_s]=0$

ist, ſobald r von s verschieden ist. Ferner ſind dann die n Hauptzahlen des Bruches Q alle reell, und unter ihnen ſo viel poſitive, als es unter den Produkten

(c) $[Qc_1|c_1],\cdots\cdot[Qc_n|c_n]$

poſitive giebt. Endlich lassen ſich stets n zu einander normale Grössen $e_1,\cdots e_n$ von der Art finden, dass jede derſelben mit Q multiplicirt ein Vielfaches derſelben liefert, alſo

Hosted by Google

(d) $Qe_r = \varrho_r c_r$, wo

(e) $[e_r|e_s] = 0$

für jedes von r verschiedene s.

Beweis. Ich zeige zuerst, dass fich n Grössen $c_1, \cdots c_n$ der verlangten Art finden lassen. Es genügt zu zeigen, dass fie der Gleichung (b) für den Fall genügen, dass $r < s$ ist, denn da nach der Vorausfetzung (a) $[Qc_r|c_s] = [Qc_s|c_r]$ ist, fo folgt dann, dass die Bedingung auch bestehen bleibt, wenn umgekehrt der erste Index grösser ist als der zweite. Wir fetzen der Kürze wegen $Qc_r = k_r$, fo zeige ich zunächst, dass man n von null verschiedene Grössen erster Stufe $c_1, \cdots c_n$ finden kann, welche den Gleichungen $[k_r|c_s] = 0$, für jedes $r < s$ genügen. Nach 189 können wir diefe Gleichungen auch schreiben $[c_s|k_r] = 0$. Zunächst wählen wir für c_1 eine beliebige (von Null verschiedene) Grösse (erster Stufe). Dann muss c_2 der Gleichung $[c_2|k_1] = 0$ genügen, d. h. c_2 muss zu k_1 normal fein (nach 152), oder anders ausgedrückt, c_2 muss dem Gebiete $|k_1$, welches von $n-1$-ter Stufe ist, angehören. Im Uebrigen fei c_2 willkürlich. Ferner muss c_3 den Gleichungen $[c_3|k_1] = [c_3|k_2] = 0$ genügen, d. h. c_3 muss den Gebieten $|k_1$ und $|k_2$ angehören, alfo dem ihnen gemeinschaftlichen Gebiete, diefes ist (nach 25) mindestens von $(n-2)$-ter Stufe, in ihm fei c_3 willkürlich. Aus gleichem Grunde muss c_4 den Gleichungen $[c_4|k_1] = [c_4|k_2] = [c_4|k_3] = 0$ genügen, alfo demjenigen Gebiete angehören, was den drei Gebieten $(n-1)$-ter Stufe $|k_1$, $|k_2$, $|k_3$ gemeinschaftlich ist, dies Gebiet ist mindestens von $(n-3)$-ter Stufe, in ihm fei c_4 willkürlich, und fo fahre man fort. Endlich c_n muss den Gleichungen

$$[c_n|k_1] = [c_n|k_2] = \cdots = [c_n|k_{n-1}] = 0$$

genügen, d. h. c_n muss den $(n-1)$ Gebieten $(n-1)$-ter Stufe $|k_1$, $|k_2, \cdots |k_{n-1}$ angehören, diefe haben mindestens ein Gebiet erster Stufe gemeinschaftlich, in diefem fei c_n beliebig (aber von Null verschieden) angenommen. Somit haben wir jetzt n von Null verschiedene Grössen, welche den Gleichungen $[c_s|k_r] = 0$, d. h. $0 = [k_r|c_s] = [Qc_r|c_s]$ zunächst für jedes $r < s$ genügen, alfo auch nach Gleichung (a) für jedes von r verschiedene s. Es ist noch zu zeigen, dass $c_1, \cdots c_n$ in

Hosted by Google

keiner Zahlbeziehung zu einander stehen. Angenommen, es herrschte zwischen ihnen die Zahlbeziehung $x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = 0$, wo mindestens einer der Koefficienten, z. B. x_r von Null verschieden ist, so hätte man

$$0 = [Qc_r|(x_1c_1 + \cdots x_nc_n)] = x_r[Qc_r|c_r],$$

weil alle übrigen Produkte null sind, also hätte man, da $x_r \gtrless 0$ ist, $[Qc_r|c_r] = 0$, was gegen die Voraussetzung (in a) streitet, also ist es unmöglich, dass $c_1, \cdots c_n$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Nun sei $[Qc_r|c_r] = \alpha_r$, und $a_r = c_r : \sqrt{\alpha_r}$ gesetzt. Dann bilden die Grössen $a_1, \cdots a_n$ einen Verein, welcher den Begingungen

(f) $[Qa_r|a_s] = 0$,

wenn $r \gtrless s$, und

(g) $[Qa_r|a_r] = 1$

unterliegt, und zwar ist a_r reell, wenn $[Qc_r|c_r]$ positiv ist; hingegen ist a_r einfach imaginär, d. h. als Produkt einer reellen Grösse und der Quadratwurzel aus -1 darstellbar, wenn $[Qc_r|c_r]$ negativ ist. Es sind also unter den Grössen $a_1, \cdots a_n$ so viel reelle, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \cdots [Qc_n|c_n]$ positive sind. Ich will jeden solchen Verein $a_1, \cdots a_n$, welcher den Gleichungen f und g unterliegt, und in welchem jede der Grössen $a_1, \cdots a_n$ entweder reell oder einfach imaginär ist, der Kürze wegen einen konjugirten Verein nennen. Es zeigt sich nun, dass ein solcher Verein bei circulärer Aenderung der darin vorkommenden Grössen wiederum ein solcher Verein bleibt, und zwar so, dass die Anzahl der reellen unter den n Grössen in dem einen Verein eben so gross ist wie in dem andern. Hierbei will ich unter circulärer Aenderung zweier Grössen a_1 und a_2, wenn beide reell, oder beide einfach imaginär sind, den Uebergang derselben in zwei andere Grössen b_1 und b_2 verstehen, von denen

(h) $b_1 = xa_1 + ya_2$

$b_2 = xa_2 - ya_1$

ist, während x und y beide reell sind, und die Summe ihrer Quadrate eins ist, also

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Hingegen wenn von den beiden Grössen a_1 und a_2 die eine reell, die andere imaginär ist, so soll

Hosted by Google

$$b_1 = xa_1 + yia_2$$
$$b_2 = xa_2 - yia_2$$

ſein, wo $i = \sqrt{-1}$, x und y beide reell ſind, und $x^2 - y^2$, d. h. $x^2 + (yi)^2 = 1$ ist, oder anders ausgedrückt, die Gleichungen (h) stellen jede circuläre Aenderung von a_1 und a_2 dar, wenn x immer reell, y aber nur dann imaginär und zwar einfach imaginär ist, wenn von den Grössen a_1 und a_2 die eine reell und die andere einfach imaginär ist. Es leuchtet unmittelbar ein, dass auch b_1 und b_2 beide reell, oder beide einfach imaginär ſind, oder eine derſelben reell, die andere einfach imaginär ist, je nachdem dies für a_1 und a_2 der Fall war, und dass alſo die Anzahl der reellen Grössen des Vereins bei der circulären Aenderung dieſelbe bleibt. Ferner wird für jedes $r > 2$ vermöge der Gleichungen h

$$[Qb_1|a_r] = x[Qa_1|a_r] + y[Qa_2|a_r] = 0,$$

da $[Qa_1|a_r]$ und $[Qa_2|a_r]$ (nach f) null ſind, aus gleichem Grunde ist dann

$$[Qb_2|a_r] = 0.$$

Ferner ist

$$[Qb_1|b_2] = x^2[Qa_1|a_2] - y^2[Qa_2|a_1] + xy([Qa_1|a_1] - [Qa_2|a_2]),$$

oder da $[Qa_1|a_2] = [Qa_2|a_1] = 0$, und $[Qa_1|a_1] = [Qa_2|a_2] = 1$ ist,

$$[Qb_1|b_2] = 0.$$

Ferner ist

$$[Qb_1|b_1] = x^2[Qa_1|a_1] + y^2[Qa_2|a_2] + 2xy[Qa_1|a_2],$$

oder da $[Qa_1|a_2]$ null, $[Qa_1|a_1] = [Qa_2|a_2] = 1$, und $x^2 + y^2 = 1$ ist, ſo wird

$$[Qb_1|b_1] = 1,$$

und aus gleichem Grunde $[Qb_2|b_2] = 1$. Alſo genügt der Verein, welcher aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ durch circuläre Aenderung zweier Grössen hervorgeht, noch immer den Gleichungen f und g, alſo auch jeder Verein, welcher aus $a_1, a_2, \cdots a_n$ durch wiederholte circuläre Aenderung hervorgeht.

Ich zeige nun, dass wenn irgend zwei der Grössen $a_1, \cdots a_n$, etwa a_1 und a_2 noch nicht zu einander normal ſind, man ſie durch circuläre Aenderung normal zu einander machen kann, und dass dabei das Produkt der numeriſchen Werthe

Hosted by Google

diefer Grössen jedesmal abnimmt. In der That follen b_1 und b_2 zu einander normal fein, d. h. (nach 152) $[b_1|b_2] = 0$ fein, fo hat man (nach h)

$$\begin{aligned} 0 &= [(xa_1 + ya_2)|(xa_2 - ya_1)] \\ &= x^2[a_1|a_2] - y^2[a_1|a_2] + xy(a_2^2 - a_1^2) \\ &= x^2 - y^2 - 2\gamma xy, \end{aligned}$$

wo $\gamma = (a_1^2 - a_2^2) : 2[a_1|a_2]$ ist, hieraus folgt

$$\frac{x}{y} = \gamma \mp \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

Sind nun a_1 und a_2 beide reell oder beide einfach imaginär, fo ist γ reell, alfo auch $\frac{x}{y}$ reell, alfo können wir dann x und y beide reell annehmen, und die Aenderung ist eine circuläre. Ist hingegen von den Grössen a_1 und a_2 die eine reell $= r$, die andere einfach imaginär $= r'i$ (wo $i = \sqrt{-1}$), fo wird $\gamma = \mp (r^2 + r'^2) : 2i[r|r']$, alfo

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 &= 1 - \left(\frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)^2 = \left(1 + \frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right)\left(1 - \frac{r^2 + r'^2}{2[r|r']}\right) \\ &= \frac{r^2 + 2[r|r'] + r'^2}{2[r|r']} \cdot \frac{2[r|r'] - r^2 - r'^2}{2[r|r']} \\ &= -\frac{(r + r')^2 (r - r')^2}{4[r|r']^2}, \end{aligned}$$

alfo ist $\sqrt{1 + \gamma^2}$ einfach imaginär, aber auch γ, alfo auch ihre Summe, d. h. $x : y$; nehmen wir alfo x reell an, fo wird y einfach imaginär, aber dies war gerade die Bedingung der circulären Aenderung für diefen Fall, alfo lassen fich in allen Fällen je zwei der Grössen des Vereins, die noch nicht normal zu einander find, durch circuläre Aenderung normal zu einander machen. Es ist noch zu zeigen, dass bei diefer Aenderung das Produkt der numerischen Werthe der Grössen kleiner wird. Hierbei foll unter dem numerischen Werthe einer Grösse ri, wo r reell, und $i = \sqrt{-1}$ ist, der numerische Werth von r verstanden fein. In diefem Sinne feien α_1 und α_2 die numerischen Werthe von a_1 und a_2, und β_1 und β_2 die von b_1 und b_2, fo ist (nach 156) $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$, aber (nach 198) ist $[a_1 a_2]^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \text{ fin.} \angle a_1 a_2)^2$, wenn α_1 und

Hosted by Google

α_2 reell ſind; dasſelbe wird nun auch der Fall ſein, wenn a_1 und a_2 einfach imaginär, und unter $\angle a_1 a_2$ ſtets der Winkel zwiſchen den entſprechenden reellen Grössen verſtanden iſt; wenn hingegen eine der Grössen a_1 und a_2 reell, die andere einfach imaginär iſt, ſo wird $[a_1 a_2]^2 = -(\alpha_1\alpha_2 \text{ ſin.} \angle a_1 a_2)^2$, aber dann auch $[b_1 b_2]^2 = -(\beta_1\beta_2 \text{ ſin.} \angle b_1 b_2)^2$, alſo da $[a_1 a_2]^2 = [b_1 b_2]^2$ iſt, ſo iſt in allen Fällen

$$(\alpha_1\alpha_2 \text{ ſin.} \angle a_1 a_2)^2 = (\beta_1\beta_2 \text{ ſin.} \angle b_1 b_2)^2.$$

Wenn nun a_1 und a_2 nicht zu einander normal, hingegen b_1 und b_2 zu einander normal ſind, ſo iſt $(\text{ſin.} \angle a_1 a_2)^2 < 1$, $(\text{ſin.} \angle b_1 b_2)^2 = 1$, alſo $(\alpha_1\alpha_2)^2 < (\beta_1\beta_2)^2$, d. h. da α_1, α_2, β_1, β_2 poſitiv ſind, $\alpha_1\alpha_2 < \beta_1\beta_2$. Alſo wenn von den Grössen eines konjugirten Vereins irgend zwei noch nicht zu einander normal ſind, ſo lässt ſich der Verein circulär ſo umwandeln, dass das Produkt der numeriſchen Werthe aller Grössen des Vereins kleiner wird. Da es nun ein minimum für dies Produkt geben muss, und dies minimum nur eintreten kann, wenn alle Grössen des Vereins zu einander normal ſind, ſo muss ſich alſo durch (wiederholte) circuläre Aenderung aus dem Verein a_1, $a_2 \cdots a_n$ ein Verein ableiten laſſen, von deſſen n Grössen je zwei zu einander normal ſind. Es ſei r_1, $r_2, \cdots r_n$ dieſer Verein, ſo genügt derſelbe, da er aus dem Verein a_1, $a_2, \cdots a_n$ abgeleitet iſt, wie oben bewieſen noch den Gleichungen f und g, und enthält eben ſo viele reelle Grössen, wie der letztere Verein, alſo eben ſo viele reelle Grössen, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1], \cdots [Qc_n|c_n]$ poſitve Produkte vorkommen. Nun ſei $Qr_1 = x_1 r_1 + \cdots x_n r_n$, ſo verwandelt ſich die in der Gruppe f enthaltene Gleichung $0 = [Qr_1|r_2]$ in $0 = ([x_1 r_1 + x_2 r_2 + \cdots x_n r_n)|r_2] = x_2[r_2|r_2]$, da alle übrigen Produkte $[r_1|r_2]$, $[r_3|r_2]$ u. ſ. w. wegen der normalen Beziehung (nach 152) null ſind. Da nun ferner r_2, alſo auch $[r_2|r_2]$ von Null verſchieden iſt, ſo folgt aus der Gleichung $0 = x_2[r_2|r_2]$, dass $x_2 = 0$ ſei; auf gleiche Weiſe folgt $x_3 = 0, \cdots x_n = 0$, alſo $Qr_1 = x_1 r_1$. Dann verwandelt ſich die in der Gruppe g enthaltene Gleichung $1 = [Qr_1|r_1]$ in $1 = x_1[r_1|r_1] = x_1 r_1^2$, d. h. x_1 iſt $= 1 : r_1^2$, alſo

$$Qr_1 = \frac{1}{r_1^2} r_1,$$

Hosted by Google

und aus gleichem Grunde ist

$$Qr_2 = \frac{1}{r_2^2} r_2, \cdots \quad Qr_n = \frac{1}{r_n^2} r_n.$$

Setzt man

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{r_1^2} = \varrho_1, \quad \frac{1}{r_2^2} = \varrho_2, \cdots \quad \frac{1}{r_n^2} = \varrho_n,$$

und fetzt $r_1, r_2, \cdots r_n$ als die Nenner des Bruches Q, fo werden alfo die zugehörigen Zähler $\varrho_1 r_1, \varrho_2 r_2, \cdots \varrho_n r_n$, und die Zähler des Bruches $\varrho - Q$ werden alfo $(\varrho - \varrho_1) r_1$, $(\varrho - \varrho_2) r_2$, $\cdots (\varrho - \varrho_n) r_n$, der Potenzwerth des Bruches $\varrho - Q$ ist (nach 383) gleich dem kombinatorischen Producte feiner Zähler dividirt durch das feiner Nenner, alfo gleich $(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n)$. Die Gleichung aber, durch welche die Hauptzahlen ϱ eines Quotienten bedingt find, drückt aus, dass der Potenzwerth von $\varrho - Q$ null fei, alfo hat man

$$(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) \cdots (\varrho - \varrho_n) = 0,$$

d. h. $\varrho_1, \cdots \varrho_n$ find die Hauptzahlen von Q, es waren diefelben (nach (i)) gleich $\frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_2^2}, \cdots \frac{1}{r_n^2}$. Je nachdem nun r reell oder einfach imaginär ist, ist $\frac{1}{r^2}$ pofitiv oder negativ, alfo kommen unter den Hauptzahlen von Q fo viel pofitive vor, als unter den Grössen $r_1, r_2, \cdots r_n$ reelle vorkommen, d. h. wie oben gezeigt, als unter den Produkten $[Qc_1|c_1]$, $\cdots [Qc_n|c_n]$ pofitive vorkommen. Alfo ist der Satz vollständig erwiefen.

Anm. Die Hauptzahlen des Quotienten Q und die zugehörigen Grössen $r_1, r_2, \cdots r_n$ lassen fich durch das Verfahren in 388 unmittelbar finden; es kam hier nur darauf an, die befonders einfachen Beziehungen, welche unter der speciellen Vorausfetzung, die wir für Q gemacht hatten, zwischen jenen Grössen hervortreten, abzuleiten. Gelegentlich kommt in dem oben gegebenen Beweife der Beweis des fogenannten Trägheitsgefetzes quadratischer Formen vor; auch lässt fich aus ihm der Sturm'sche Satz über die Wurzeln algebraischer Gleichungen leicht ableiten. Auf die Geometrie angewandt, schliesst unfer Satz den Satz ein, dass jede algebraische Oberfläche zweiter Ordnung drei reelle Hauptaxen enthält, und der Satz 388 lehrt diefelben unmittelbar finden.

Hosted by Google

§. 5. Die Funktionen als extensive Grössen.

392. Erklärung. Ich ſage, eine Funktion f ſei aus einer oder mehreren Funktionen $f_1, f_2, \cdots$ numerisch ableitbar, wenn ſich f in der Form

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots$$

darstellen lässt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ Zahlgrössen ausdrücken, die entweder konstant oder doch von den Variabeln der Funktionen unabhängig ſind, und wo das Gleichheitszeichen die Gleichheit für beliebige Werthe dieſer letzteren Variabeln ausſagt.

Anm. Nachdem dieſe Definition feſtgeſtellt ist, beziehen ſich alle bisher aufgeſtellten Erklärungen und Sätze unmittelbar auch auf Funktionen, welche hiernach als extenſive Grössen erscheinen. Es ist dieſe Betrachtungsweiſe für die Funktionenlehre und daher auch für die Theorie der Kurven und Oberflächen von grosser Bedeutung, wie ſich unten zeigen wird. Auch kann ſie dazu dienen, um unabhängig von den früheren geometrischen Entwickelungen, den Begriff der Addition von Punkten, Linien, Flächen u. ſ. w. feſtzuſtellen. Für die Schärfe der Auffassung ist noch zu bemerken, dass stets feſtgeſtellt ſein muss, welches die Variabeln ſind, von denen die Funktionen abhängig gedacht werden ſollen, und auf die ſich ſomit auch die obige Definitionsgleichung bezieht. Um ein Beiſpiel für die beſondere Gestaltung der allgemeinen Begriffe zu geben, wenn Funktionen als Einheiten geſetzt werden, betrachte ich die 6 Funktionen x^2, y^2, xy, x, y, 1, in denen x und y die Variabeln ſind. Dieſe stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander, da, wenn $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ ſein ſoll, für jeden Werth von x und y, alle Koefficienten a, b, c, d, e, f null ſein müssen. Wir können alſo jene 6 Funktionen als ein System von Einheiten ſetzen. Die aus ihnen numerisch ableitbaren Funktionen ſind die Funktionen zweiten Grades mit zwei Variabeln. Dieſe bilden alſo ein Funktionsgebiet 6-ter Stufe. Aus 6 in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Funktionen zweiten Grades mit 2 Variabeln lassen ſich alſo alle Funktionen zweiten Grades mit 2 Variabeln numerisch ableiten.

393. Erklärung. Es ſeien x und y die Koordinaten eines Punktes in der Ebene (oder x, y, z die Koordinaten eines Punktes im Raume), ferner ſeien $f_1, f_2, \cdots f_n$ n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Funktionen dieſer Koordinaten und ſei

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots x_n f_n,$$

Hosted by Google

d. h. $x_1, \cdots x_n$ die Ableitzahlen, durch welche f aus $f_1, \cdots f_n$ ableitbar ist. Endlich herrsche zwischen diesen Ableitzahlen die Gleichung

$$(a) \quad \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0,$$

so nenne ich die Gesammtheit der Kurven (Oberflächen) $f = 0$, für welche die Ableitzahlen von f der Gleichung (a) genügen, ein zu dieser Gleichung gehöriges Kurvengebilde (Flächengebilde), und zwar ein Kurvengebilde (Flächengebiet) n-ten Grades, wenn die Gleichung (a) vom n-ten Grade ist. Sind ins Besondere f_1, f_2, f_3 Funktionen ersten Grades von x und y und

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3,$$

so bedingt die homogene Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ein Liniengebilde in der Ebene, und sind f_1, f_2, f_3, f_4 Funktionen ersten Grades von x, y, z, und

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4,$$

so bedingt die homogene Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

ein Ebenengebilde im Raume.

Anm. Die ganze hier eingeleitete Idee ist nicht anders als die naturgemässe Erweiterung des Begriffs der Koordinaten, welche aus dem Wesen dieses Begriffs von selbst hervorgeht. Die Koordinaten sind, auf ihre ursprüngliche Idee zurückgeführt, die Ableitzahlen einer Grösse, durch welche diese Grösse aus mehreren in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Einheiten hervorgeht. Substituiren wir nun diesen Einheiten Funktionen der ursprünglichen Koordinaten, so geht der obige allgemeinere Begriff hervor. Diese Funktionen, welche als Einheiten gesetzt sind, werden dann in der Ebene jede durch eine Kurve und einen Koefficienten dargestellt, nämlich durch die Kurve, welche alle Punkte umfasst, deren ursprüngliche Koordinaten jene Funktion null machen, und durch den Koefficienten irgend eines von Null verschiedenen Gliedes der Funktion; wobei dann einerseits durch diese Funktion sowohl jene Kurve als jener Koefficient, andererseits durch die letzteren die erstere bestimmt ist. Diese Kurven selbst repräsentiren die räumliche Lage der Einheiten und diese Koefficienten ihre metrischen Werthe. Ausser dem in dem Lehrsatze angedeuteten Falle, wo f_1, f_2, $\cdots$ Funktionen ersten Grades sind, werde ich hier noch den Fall betrachten, wo f_1, f_2, $\cdots$ Kreisfunktionen sind.

Hosted by Google

394. Erklärung. Die Funktion

$$x^2 + y^2 + \beta x + \gamma y + \delta$$

nenne ich eine einfache Kreisfunktion, die Funktion

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

eine α-fache Kreisfunktion. Und wenn $f(x, y)$ eine Kreisfunktion ist, so nenne ich den Kreis, dessen Gleichung, bei rechtwinkligen Koordinaten,

$$f(x, y) = 0$$

ist, den zu dieser Funktion gehörigen Kreis.

395. Alle Kreisfunktionen sind aus vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Kreisfunktionen numerisch ableitbar.

Beweis. Jede Kreisfunktion ist aus den vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Funktionen $x^2 + y^2$, x, y, 1 numerisch ableitbar. Folglich auch (nach 24) aus beliebigen vier in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden, aus $x^2 + y^2$, x, y, 1 ableitbaren Funktionen, d. h. aus vier solchen Kreisfunktionen.

396. Der Doppelabstand (siehe 345) eines Punktes (x', y') von einem Kreise, dessen Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

ist, wo $f(x, y)$ eine einfache Kreisfunktion bezeichnet, ist gleich

$$f(x', y').$$

Anm. Der Beweis durch Koordinaten ist bekannt. Viel einfacher ist jedoch der auf dem Begriff extensiver Grössen beruhende Beweis. Es gründet sich dieser darauf, dass, wenn p ein variabler Punkt, a der Mittelpunkt des Kreises und a' sein Radius ist,

$$(p - a)^2 - a'^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises ist, und die linke Seite derselben zugleich den Doppelabstand des Punktes p von dem Kreise darstellt, was beides unmittelbar im Begriffe liegt.

397. Drei Kreise stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn sie alle drei durch dieselben zwei (reellen oder imaginären) Punkte gehen.

Beweis. Es seien f_1, f_2, f_3 drei Kreisfunktionen von x und y, k_1, k_2, k_3 die drei Kreise deren Gleichungen beziehlich

Hosted by Google

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0$$

ſind. Es ſei zuerſt eine Zahlbeziehung zwiſchen ihnen angenommen, etwa

(a) $f_3 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$.

Die Durchſchnittspunkte der Kreiſe k_1 und k_2 ſind nun diejenigen Punkte, für welche gleichzeitig f_1 und f_2 null ſind; dann iſt aber vermöge der Gleichnng (a) auch f_3 null, d. h. dieſe Durchſchnittspunkte liegen auch in dem Kreiſe k_3. Nun ſei umgekehrt angenommen, daſs die Durchſchnittspunkte von k_1 und k_2 auch in k_3 liegen. Für irgend einen dritten Punkt (x', y') in k_3 mögen, wenn man ſeine Koordinaten ſtatt x und y in die Funktionen f_1 und f_2 einführt, dieſe beziehlich die Werthe α_1 und α_2 annehmen, ſo hat der Kreis, deſſen Gleichung

$$\alpha_2 f_1 - \alpha_1 f_2 = 0$$

iſt, mit k_3 auſser den obigen Durchſchnittspunkten noch den Punkt (x', y') gemein, alſo drei Punkte, iſt ihm alſo identiſch, d. h. der Kreis k_3 iſt aus k_1 und k_2 numeriſch ableitbar.

Anm. Wenn die Durchſchnittspunkte der Kreiſe k_1 und k_2 imaginär werden, ſo hat jeder Kreis, der dieſelben beiden imaginären Punkte enthält, die Eigenſchaft, daſs ſein Mittelpunkt mit den Mittelpunkten jener Kreiſe in gerader Linie liegt, und die drei Kreiſe dieſelbe Linie gleichen Doppelabſtandes (gleicher Potenz nach Steiner) haben.

398. Zwei Kreiſe haben ſtets eine gerade Linie des gleichen Doppelabſtandes und drei Kreiſe ſtets einen Punkt des gleichen Doppelabſtandes und zwar wenn f_1, f_2, f_3 drei einfache Kreisfunktionen ſind, ſo iſt

$$f_1 - f_2 = 0$$

die Gleichung für die gerade Linie des gleichen Doppelabſtandes von den zu f_1 und f_2 gehörigen Kreiſen, und der Punkt, welcher durch die Gleichungen

$$f_1 - f_2 = 0,\ f_1 - f_3 = 0$$

beſtimmt iſt, iſt der Punkt des gleichen Doppelabſtandes von den drei zu f_1, f_2, f_3 gehörigen Kreiſen.

Beweis. Für die Punkte des gleichen Doppelabſtandes der zu den einfachen Funktionen f_1, f_2 gehörigen Kreiſe hat man (nach 396)

$$f_1 = f_2,\ \text{d. h. } f_1 - f_2 = 0.$$

Hosted by Google

Da aber f_1 und f_2 einfache Kreisfunktionen ſind, ſo heben ſich in der Differenz $f_1 - f_2$ die quadratischen Glieder auf und $f_1 - f_2$ wird eine lineare Funktion, alſo $f_1 - f_2 = 0$ die Gleichung einer geraden Linie. Für den Punkt P des gleichen linären Abstandes von den drei zu f_1, f_2, f_3 gehörigen Kreiſen hat man aus gleichem Grunde $f_1 = f_2 = f_3$, d. h. $f_1 - f_2 = 0$ und $f_1 - f_3 = 0$; alſo ist P der Durchschnittspunkt der durch die letzten zwei Gleichungen dargestellten geraden Linien.

Anm. Für zwei concentrische Kreiſe wird jene Linie unendlich entfernt, für identische unbestimmt. Für drei Kreiſe, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, wird der Punkt des gleichen Abstandes entweder unendlich entfernt, oder unbestimmt innerhalb einer geraden Linie oder ganz unbestimmt, je nachdem zwischen den drei Kreiſen keine, eine, oder zwei Zahlbeziehungen herrschen, in welchem letztern Falle die drei Kreiſe identisch ſind.

399. Vier Kreiſe stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn ſie alle vier einen Punkt a des gleichen Doppelabstandes haben, und zwar stehen ſie, wenn a endlich entfernt ist, in derſelben Zahlbeziehung zu einander wie ihre Mittelpunkte.

Beweis 1. Es ſeien f_1, f_2, f_3, f_4 vier einfache Kreisfunktionen, k_1, k_2, k_3, k_4 die zugehörigen Kreiſe. Es ſei zuerst angenommen, dass jene vier Funktionen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, ſo dass etwa

$$f_4 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

ſei, ſo muss, da alle vier Funktionen einfache Kreisfunktionen ſind, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ſein. Für den Punkt a des gleichen Doppelabstandes von drei Kreiſen k_1, k_2, k_3 hat man (nach 398) $f_1 = f_2 = f_3$, alſo wird für dieſen Punkt

$$f_4 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) f_1 = f_1,$$

da $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ ist, d. h. der Punkt a ist Punkt des gleichen Doppelabstandes von den vier Kreiſen k_1, k_2, k_3, k_4.

2. Es ſei umgekehrt angenommen, dass a ein endlich entfernter Punkt ſei, welcher gleichen Doppelabstand von den vier Kreiſen k_1, k_2, k_3, k_4 habe; es ſeien a_1, a_2, a_3, a_4 die von dem Punkte a nach den Mittelpunkten jener Kreiſe gezogenen Strecken, und r_1, r_2, r_3, r_4 die vier Radien, und p die variable von a nach einem beliebigen Punkte der Kreis-

Hosted by Google

umfänge gezogene Strecke, so nehmen f_1, f_2, f_3, f_4 die Form an

$$f_s = (p - a_s)^2 - r_s^2 = p^2 - 2[a_s|p] + \delta,$$

wo $\delta = a_s^2 - r_s^2$ ist. Nach 396 stellt zugleich δ den Doppelabstand des Punktes, für welchen $p = 0$ ist, d. h. des Punktes a, von dem Kreise k_s dar. Dieser Doppelabstand ist nach der Voraussetzung für die vier Kreise $k_1, \cdots k_4$ derselbe. Ferner besteht (nach 233) zwischen den einfachen Mittelpunkten der Kreise $k_1, \cdots k_4$ eine Zahlbeziehung; dieselbe Zahlbeziehung findet (nach 222) auch zwischen den Strecken statt, welche von einem beliebigen Punkte nach jenen Mittelpunkten gezogen sind, also auch zwischen $a_1, \cdots a_4$. Es sei

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

diese Zahlbeziehung, so muss, da die Mittelpunkte einfache Punkte sind, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ sein; dann hat man

$$\begin{aligned} f_4 &= p^2 - 2[a_4|p] + \delta \\ &= p^2 - 2[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)|p] + \delta \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(p^2 + \delta) - 2[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3)|p] \\ &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3. \end{aligned}$$

3. Ist der Punkt a des gleichen Doppelabstandes unendlich entfernt, so liegen (nach 398) die Mittelpunkte der vier Kreise in einer geraden Linie. Vier solche Kreise stehen aber stets in einer Zahlbeziehung zu einander; denn macht man diese gerade Linien zur Abscissenaxe (der x), so werden die vier Funktionen $f_1, \cdots f_4$ von der Form

$$f_s = x^2 + y^2 - 2\beta x + \delta_s,$$

indem das Glied mit y wegfällt. Es sind also dann die Funktionen $f_1, \cdots f_4$ aus den drei Funktionen $x^2 + y^2$, x und 1 numerisch ableitbar, stehen also (nach 392) in einer Zahlbeziehung zu einander.

Anm. Wenn der Punkt a des gleichen Doppelabstandes von vier Kreisen ausserhalb eines der Kreise liegt, so ist der Doppelabstand von diesem Kreise, gemäss der Definition, positiv, also auch der Doppelabstand von den übrigen Kreisen positiv, a liegt dann zugleich ausserhalb der übrigen Kreise. Zieht man von a die Tangenten an die vier Kreise, so müssen diese gleich sein, weil für jeden Kreis das Quadrat der von einem äusseren Punkte gezogenen Tangente gleich dem Doppelabstande dieses Punktes ist. Schlägt man also um a einen Kreis, dessen Radius gleich jenen Tangenten ist, so werden alle vier

Hosted by Google

Kreiſe von dieſem letztern Kreiſe ſenkrecht geſchnitten. Liegt hingegen a innerhalb eines der Kreiſe, ſo muss es auch innerhalb der andern liegen. Zieht man dann von a in irgend einem der Kreiſe diejenige Sehne, die durch a halbirt wird, ſo ist das Quadrat der halben Sehne gleich dem Doppelabstande des Punktes a von dieſem Kreiſe, zieht man alſo in allen vier Kreiſen die durch a halbirten Sehnen, ſo müssen dieſe alle einander gleich ſein. Schlägt man endlich um a mit der halben Sehne s einen Kreis, ſo wird dieſer Kreis von jedem der vier Kreiſe im Durchmesser, d. h. ſo geschnitten, dass die beiden Durchschnittspunkte die Endpunkte eines und desſelben durch dieſen Kreis gezogenen Durchmessers ſind.

Man kann diesen in Durchmessern geschnittenen Kreis als einen ſenkrecht schneidenden betrachten, dessen Radius imaginär $= r\sqrt{-1}$ ist, während a der Mittelpunkt bleibt und erlangt dadurch den Vortheil eines gemeinschaftlichen Ausdrucks. Unſer Satz würde dann ſo lauten: Vier Kreiſe stehen dann und nur dann in einer Zahlbeziehung zu einander, wenn ſie von Einem Kreiſe ſenkrecht geschnitten werden, und zwar ist der Mittelpunkt dieſes Kreiſes der Punkt des gleichen Doppelabstandes von irgend dreien der vier Kreiſe, und der Radius gleich der Quadratwurzel dieſes Abstandes. Wir können dies auch ſo ausdrücken. Das aus drei Kreiſen ableitbare Gebiet ist die Geſammtheit der Kreiſe, welche von einem und demſelben Kreiſe ſenkrecht geschnitten werden. In dieſem Sinne stellt alſo der letztgenannte Kreis jenes Gebiet, d. h. das aus Kreiſen erzeugbare Gebiet dritter Stufe dar; während das Gebiet zweiter Stufe durch einen Verein zweier Punkte dargestellt wurde.

400. Aufgabe. Den Kreis zu finden, welcher aus n gegebenen einfachen Kreiſen durch n gegebene Zahlen ableitbar ist.

Auflöſung. Es ſeien $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ die n gegebenen Zahlen, ihre Summe α; ferner ſei ein beliebiger Punkt O als Anfangspunkt aller Strecken angenommen, und ſeien die von ihm nach den n Mittelpunkten gezogenen Strecken $a_1, a_2 \cdots a_n$, und die n Radien ſeien $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$; ferner ſei die von O nach dem variablen Punkte gezogene Strecke r, ſo ſind die n zu den Kreiſen gehörigen einfachen Funktionen

$$(r - a_\alpha)^2 - \beta_\alpha^2$$

für jeden Werth des Index α von 1 bis n. Alſo ist die geſuchte Kreisfunktion f,

$$f = \sum \alpha_\alpha [(r - a_\alpha)^2 - \beta_\alpha^2] = \sum \alpha_\alpha [r^2 - 2[r|a_\alpha] + a_\alpha^2 - \beta_\alpha^2]$$
$$= \alpha r^2 - 2[r|\sum \alpha_\alpha a_\alpha] + \sum \alpha_\alpha (a_\alpha^2 - \beta_\alpha^2),$$

Hosted by Google

weil $\sum\overline{\alpha_a} = \alpha$ angenommen ist. Da nun der Punkt O willkürlich ist, so können wir ihn, wenn α nicht null ist, so wählen, dass er aus den n Mittelpunkten durch die Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ numerisch ableitbar ist. Dann ist $\sum\overline{\alpha_a|a_a} = 0$ und das zweite Glied fällt weg. Dann wird

$$f = \alpha r^2 + \sum\overline{\alpha_a(a_a^2 - \beta_a^2)}.$$

Setzen wir $\sum\overline{\alpha_a(\beta_a^2 - a_a^2)} = \alpha\beta^2$, so wird

$$f = \alpha(r^2 - \beta^2),$$

d. h. „der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist, wenn die Summe der n gegebenen Zahlen nicht null ist, der aus den n Mittelpunkten der gegebenen Kreise durch die n gegebenen Zahlen ableitbare Punkt, und den Radius (β) desselben erhält man, wenn man die n Doppelabstände des gefundenen Mittelpunktes von den n gegebenen Kreisen beziehlich mit den n gegebenen Zahlen multiplicirt, die Summe dieser Produkte durch die Summe der n gegebenen Zahlen dividirt, den Quotienten mit -1 multiplicirt und aus diesem Produkte die Wurzel zieht."

Anm. Die Behandlung des Falles, wo $\alpha = 0$ wird, überlasse ich dem Leser.

§. 6. Verwandtschaften von dem Gesichtspunkte der Funktionsverknüpfung aus betrachtet.

401. Erklärung. Zwei Vereine von Grössen nenne ich verwandt, wenn jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten oder zweiten Vereines herrscht, auch zwischen den entsprechenden des andern stattfindet, d. h. wenn der Grösse

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

die Grösse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entspricht und umgekehrt, wo nämlich a, b, $\cdots$ beliebige Grössen des ersten Vereins und a_1, $b_1, \cdots$ die entsprechenden des andern, und α, $\beta, \cdots$ beliebige Zahlen sind.

402. Wenn zwei Vereine von Grössen, in denen die Grössen eines jeden Vereins sich aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen desselben numerisch ableiten lassen, einander verwandt sein sollen, so kann man beliebigen

Hosted by Google

n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen des einen Vereins beliebige n derselben Bedingung unterworfene Grössen des andern entsprechend fetzen; dann ist zu jeder Grösse eines jeden der beiden Vereine die entsprechende des andern genau bestimmt.

Beweis. Es feien a, b,··· n in beliebige, in keiner Zahlbeziehung zu einander stehende Grössen des einen, und a_1, b_1,··· n derfelben Bedingung unterworfene Grössen des andern Vereins, fo lässt fich nach der Vorausfetzung jede Grösse p des ersten Vereins aus a, b,··· numerisch ableiten. Es fei

$$p = \alpha a + \beta b + \cdots$$

der Ausdruck diefer Ableitung, fo find (nach 29) die Zahlen α, β,··· genau bestimmt, fobald p eine bestimmte Grösse ist. Sollen nun beide Vereine verwandt fein, fo muss (nach 400) der Grösse p eine Grösse

$$p_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots$$

entsprechen. Es ist alfo zu jeder Grösse des einen Vereins die entsprechende des andern genau bestimmt. Es ist noch zu zeigen, dass die fo gebildeten Vereine in der That einander verwandt find, d. h. dass jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten Vereins herrscht, auch zwischen den entsprechenden Grössen des zweiten herrsche und umgekehrt. Es fei

$$(a)\quad \varrho r + \sigma s + \cdots = 0$$

eine zwischen den Grössen r, s,··· des ersten Vereins herrschende Zahlbeziehung, und feien r_1, s_1,··· die den Grössen r, s,··· entsprechenden Grössen des zweiten Vereins, fo ist zu zeigen, dass auch

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0$$

fei. Setzt man in (a) statt r, s,··· die Ausdrücke ihrer Ableitung aus a, b,····, löst die Klammern auf, und fasst die Glieder, welche a enthalten, in Ein Glied zufammen u. f. w., fo erhält man einen Ausdruck der Form

$$\alpha a + \beta b + \cdots = 0,$$

wo α, β,··· Funktionen der Zahlgrössen ϱ, σ,··· und der

Hosted by Google

Ableitungszahlen von r, s,··· find. Hieraus folgt, da a, b,··· in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, (nach 29)

$$\alpha = 0,\ \beta = 0, \cdots.$$

Wendet man nun dasfelbe Verfahren auf den Ausdruck $\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots$ an, fo erhält man, da die Ableitzahlen von r_1, s_1,··· diefelben find, wie die von r, s,···,

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = \alpha a_1 + \beta b_1 + \cdots,$$

wo α, β,··· diefelbe Bedeutung haben, wie oben. Da aber α, β,··· null find, fo erhält man

$$\varrho r_1 + \sigma s_1 + \cdots = 0,$$

d. h. jede Zahlbeziehung, welche zwischen den Grössen des ersten Vereins herrscht, herrscht auch zwischen den entsprechenden des zweiten, und ebenfo umgekehrt, d. h. die beiden Vereine find verwandt.

403. Wenn man aus zwei verwandten Vereinen zwei neue Vereine dadurch ableitet, dass man jedem linealen Produkt P, was aus Grössen des ersten Vereines gebildet ist, dasjenige Produkt als entsprechend fetzt, welches auf gleiche Weife aus den entsprechenden Grössen des zweiten Vereins gebildet ist, fo find diefe beiden neuen Vereine einander gleichfalls verwandt; d. h. wenn r, s,··· beliebige Grössen des einen und r_1, s_1,··· die entsprechenden des verwandten Vereines find, und die linealen Produkte P(r, s,···) und P(r_1, s_1,···) einander entsprechend gefetzt werden, wie auch r, s,··· gewählt fein mögen, fo find auch die fo erhaltenen Vereine einander verwandt.

Beweis. Es feien a_1, a_2,··· a_n Grössen des ersten Vereins, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, und aus welcher fich alle Grössen des ersten Vereins numerisch ableiten lassen, und b_1, b_2,··· b_n die entsprechenden des andern, welche alfo derfelben Bedingung unterworfen find, und fei

$$r = \sum \overline{\varrho_\alpha a_\alpha} = \varrho_1 a_1 + \cdots \varrho_n a_n,\ s = \sum \overline{\sigma_\alpha a_\alpha},\ \text{u. f. w.},$$

alfo (nach 400)

$$r_1 = \sum \overline{\varrho_\alpha b_\alpha},\ s_1 = \sum \overline{\sigma_\alpha b_\alpha}, \cdots,$$

fo wird

$$\left.\begin{aligned} P(r, s, \cdots) &= \sum \overline{\varrho_\alpha \sigma_\beta \cdots P(a_\alpha, a_\beta, \cdots)} \\ P(r_1, s_1, \cdots) &= \sum \overline{\varrho_\alpha \sigma_\beta \cdots P(b_\alpha, b_\beta, \cdots)} \end{aligned}\right\} \quad [46].$$

Hosted by Google

Da nun die Produkte lineale ſind, ſo muss (nach 50) jede Bedingungsgleichung, welche zwischen den Produkten $P(a_\alpha, a_\beta, \cdots)$ herrscht, auch bestehen bleiben, wenn man statt $a_1, a_2, \cdots a_n$ die Grössen $b_1, b_2, \cdots b_n$ ſetzt. Nun lassen ſich (nach 49), wenn p die Anzahl der verschiedenen Produkte von der Form $P(a_\alpha, a_\beta, \cdots)$ und q die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen ist, die ſämmtlichen Produkte $P(a_\alpha, a_\beta, \cdots)$ aus $p - q$ derſelben, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, numerisch ableiten, und zwar ſo, dass, wenn dieſe $p - q$ Produkte bestimmt ſind, auch für jedes der übrigen Produkte die Ableitzahlen bestimmt ſind. Die Ausdrücke dieſer Ableitung ſind nur von den Bedingungsgleichungen abhängig. Setzt man daher statt $a_1, a_2, \cdots$ überall $b_1, b_2, \cdots$, ſo müssen, da die Bedingungsgleichungen bei dieſer Substitution noch geltend bleiben, auch die Ausdrücke jener Ableitung bestehen bleiben, d. h. wenn $A_1, A_2, \cdots$ die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Produkte ſind, aus welchen ſich alle übrigen Produkte der Form $P(a_\alpha, a_\beta, \cdots)$ ableiten lassen, und

$$P(a_\alpha, a_\beta, \cdots) = \alpha_{1,\alpha,\beta,\ldots} A_1 + \alpha_{2,\alpha,\beta,\ldots} A_2 + \cdots$$

ist, wenn ferner $B_1, B_2, \cdots$ diejenigen Produkte ſind, welche aus den Produkten $A_1, A_2, \cdots$ dadurch hervorgehen, dass man in dieſen $b_1, b_2, \cdots$ statt $a_1, a_2, \cdots$ ſetzt, ſo ist

$$P(b_\alpha, b_\beta, \cdots) = \alpha_{1,\alpha,\beta,\ldots} B_1 + \alpha_{2,\alpha,\beta,\ldots} B_2 + \cdots.$$

Alſo

$$P(r, s, \cdots) = \sum \varrho_\alpha \sigma_\beta \cdots (\alpha_{1,\alpha,\beta,\ldots} A_1 + \alpha_{2,\alpha,\beta,\ldots} A_2 + \cdots)$$

$$P(r_1, s_1, \cdots) = \sum \varrho_\alpha \sigma_\beta \cdots (\alpha_{1,\alpha,\beta,\ldots} B_1 + \alpha_{2,\alpha,\beta,\ldots} B_2 + \cdots),$$

d. h. es ist $P(r, s, \cdots)$ durch dieſelben Zahlen aus $A_1, A_2, \cdots$ abgeleitet, wie das entsprechende Produkt $P(r_1, s_1, \cdots)$ aus den entsprechenden Produkten $B_1, B_2, \cdots$, d. h. (nach 401) es ist der Verein der Produkte $P(r, s, \cdots)$ verwandt dem Vereine der entsprechenden Produkte $P(r_1, s_1, \cdots)$.

404. Man kann in zwei Vereinen, deren jeder aus n Grössen desſelben ableitbar ist, und welche einander verwandt ſein ſollen, in jedem beliebige $n + 1$ Grössen annehmen, von denen keine n in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, und feſtſetzen, dass den $n + 1$ Grössen des ersten Vereins

Hosted by Google

Grössen entsprechen ſollen, welche den $n+1$ im zweiten Verein angenommenen Grössen kongruent ſind; dann ist zu jeder Grösse eines Vereines die entsprechende des andern, mit Ausnahme eines für alle gleichen Zahlkoefficienten, genau bestimmt.

Beweis. Es ſeien $a_1 \cdots a_{n+1}$ die Grössen des ersten und $b_1 \cdots b_{n+1}$ die des zweiten Vereins, welche der im Satze ausgesprochenen Bedingung unterworfen ſind, ſo wird ſich, gemäss dieſer Bedingung, jede der Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ aus den übrigen durch Zahlen ableiten lassen, welche alle von Null verschieden ſind. Denn da der Verein aus n in keiner Zahlbeziehung zu einander stehenden Grössen ableitbar ſein ſoll, ſo muss er auch (nach 24) aus je n dieſer Bedingung unterworfenen Grössen ableitbar ſein, alſo auch jede der Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ aus den übrigen, und ſollte von den Ableitzahlen irgend eine Null ſein, ſo würde zwischen den n übrigen, gegen die Vorausſetzung eine Zahlbeziehung herrschen. Dasſelbe gilt für die Grössen $b_1 \cdots b_{n+1}$. Nun ſei

$$(a) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n \\ b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \cdots \beta_n b_n, \end{cases}$$

alſo $\alpha_1, \cdots \alpha_n$, $\beta_1, \cdots \beta_n$ alle ungleich Null.

Ferner ſeien $c_1, \cdots c_{n+1}$ die Grössen, welche beziehlich den Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ entsprechen und den Grössen $b_1 \cdots b_{n+1}$ kongruent ſein ſollen. Aus dieſen Kongruenzen folgt, dass für jeden Index r von 1 bis $n+1$ ſich c_r als Produkt von b_r in eine Null verschiedene Zahl x_r muss darstellen lassen, alſo

$$(b) \quad c_r = x_r b_r.$$

Da ferner $c_1, \cdots c_{n+1}$ den Grössen $a_1, \cdots a_{n+1}$ ſo entsprechen ſollen, dass die Vereine verwandt ſind, ſo muss (nach 401)

$$(c) \quad c_{n+1} = \alpha_1 c_1 + \cdots \alpha_n c_n$$

ſein. Substituirt man in (c) die Werthe aus (b) und dividirt mit x_{n+1}, ſo erhält man

$$b_{n+1} = \frac{x_1 \alpha_1}{x_{n+1}} b_1 + \cdots \frac{x_n \alpha_n}{x_{n+1}} b_n.$$

Aber aus (a) hat man zugleich

$$b_{n+1} = \beta_1 b_1 + \cdots \beta_n b_n,$$

Hosted by Google

alfo muss (nach 29)

$$\frac{x_1\alpha_1}{x_{n+1}} = \beta_1, \cdots \frac{x_n\alpha_n}{x_{n+1}} = \beta_n.$$

Hierdurch bestimmen fich alle Unbekannte bis auf eine. Setzen wir $x_{n+1} = \lambda$, fo wird

$$\text{(d)} \quad x_1 = \frac{\lambda\beta_1}{\alpha_1}, \cdots, \; x_n = \frac{\lambda\beta_n}{\alpha_n}, \; x_{n+1} = \lambda.$$

Wenn diefe Bedingungen (d) erfüllt find, fo wird auch umgekehrt die Gleichung c erfüllt. Dann find alfo die Vereine verwandt in Bezug auf die $n + 1$ Grössen $a_1 \cdots a_{n+1}$ und die ihnen entsprechenden $c_1 \cdots c_{n+1}$ und jeder Grösse

$$p = u_1a_1 + \cdots u_na_n$$

entspricht die Grösse

$$q = u_1c_1 + \cdots u_nc_n,$$

oder, indem man ftatt $c_1 \cdots c_n$ ihre Werthe aus (b) und dann ftatt $x_1 \cdots x_n$ ihre Werthe aus (d) fetzt,

$$q = \lambda\left(\frac{u_1\beta_1}{\alpha_1}b_1 + \cdots \frac{u_n\beta_n}{\alpha_n}b_n\right),$$

d. h. q ist mit Ausnahme eines konftanten Faktors λ genau bestimmt.

Anm. Es lässt fich die Verwandtfchaft zweier Vereine, abgefehen von den metrifchen Werthen der entfprechenden Grössen, auch in der Art beftimmen, dass man feftfetzt, es follen jeden drei in einer Zahlbeziehung zu einander ftehenden Grössen des erften Vereins auch drei in einer Zahlbeziehung zu einander ftehende Grössen des zweiten und umgekehrt entfprechen. Der Beweis der Identität diefer Beftimmung mit der oben gegebenen (wenn man von den metrifchen Werthen der entfprechenden Grössen abfieht) ergiebt fich leicht, wenn man die von Möbius in feinem barycentrifchen Calcul in §. 200—206 und befonders in §. 203 gegebene vortreffliche Entwickelung der Collineation auf die hier betrachtete allgemeine Verwandtfchaft überträgt.

405. Der Raum und die Ebene laffen fich in der Art einander verwandt fetzen, dass jedem Punkte im Raume ein Kreis in der Ebene entfpricht und umgekehrt. Dann entfprechen den in Einer Ebene liegenden Punkten des Raumes folche Kreife, welche von Einem und demfelben Kreife fenkrecht geschnitten werden. Und zwar kann man fünf beliebige Punkte des Raumes, von denen keine vier in Einer Ebene liegen, mit fünf beliebigen Kreifen der Ebene, von

Hosted by Google

denen keine vier von Einem Kreiſe ſenkrecht geſchnitten werden, entſprechend ſetzen. Dann aber iſt zu jedem Punkte des Raumes der entſprechende Kreis der Ebene und umgekehrt beſtimmt. Jeder Satz der Stereometrie läſst ſich in dieſem Sinne auf Kreiſe der Ebene, und umgekehrt jeder Satz über Kreiſe der Ebene auf Punkte des Raumes übertragen.

Beweis. Nach 395 iſt jede Kreisfunktion aus vier beliebigen in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehenden Kreisfunktionen numeriſch ableitbar, und nach 232 iſt jeder Punkt im Raume aus vier beliebigen in keiner Zahlbeziehung zu einander ſtehenden Punkten numeriſch ableitbar. Folglich kann man (nach 404), wenn die Punkte des Raumes und die Kreiſe einer Ebene zwei verwandte Vereine bilden ſollen, fünf beliebige Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer Zahlbeziehung ſtehen, d. h. keine vier in Einer Ebene liegen, und fünf beliebige Kreiſe der Ebene, von denen keine vier in einer Zahlbeziehung ſtehen, d. h. keine vier von Einem Kreiſe ſenkrecht geſchnitten werden, annehmen und feſtſetzen, dass jenen fünf Punkten des Raumes dieſe fünf Kreiſe entſprechen ſollen, dann iſt zu jedem Punkte des Raumes der entſprechende Kreis der Ebene und umgekehrt beſtimmt. Ferner, da nach dem Begriffe der Verwandtſchaft (401) jede Zahlbeziehung, welche zwiſchen den Grössen des einen Vereins herrſcht, auch zwiſchen den entſprechenden Grössen des verwandten Vereins beſteht, ſo folgt, dass wenn zwiſchen vier Punkten des Raumes eine Zahlbeziehung herrſcht, auch zwiſchen den vier entſprechenden Kreiſen eine ſolche herrſchen muss, d. h. wenn die vier Punkte in Einer Ebene liegen, ſo müſſen die vier entſprechenden Kreiſe von Einem Kreiſe ſenkrecht geſchnitten werden. Endlich die Uebertragbarkeit der Sätze folgt daraus, dass jeder Satz des Raumes ſich vermittelſt der vier Ableitungszahlen, durch die jeder Punkt darſtellbar iſt, in einen analytiſchen Satz kleidet, und dieſer ſich wieder, indem man die vier Ableitzahlen als die Ableitzahlen des jenem Punkte entſprechenden Kreiſes ſetzt, in einen Satz über Kreiſe der Ebene verwandeln läſst, und ebenſo umgekehrt.

Hosted by Google

406. Man kann in der Ebene zwei verwandte Vereine von Kreiſen annehmen, und dabei fünf beliebige Kreiſe des einen fünf beliebigen Kreiſen des andern Vereins entſprechend ſetzen, vorausgeſetzt, dass keine vier der in demſelben Vereine angenommenen fünf Kreiſe von einem und demſelben Kreiſe ſenkrecht geſchnitten werden, dann ist zu jedem 6-ten Kreiſe des einen Vereins der entſprechende des andern bestimmt, und jeden vier Kreiſen des einen Vereins, die von Einem Kreiſe ſenkrecht geſchnitten werden, entſprechen vier Kreiſe des andern, die gleichfalls von Einem Kreiſe ſenkrecht geſchnitten werden.

Beweis ergiebt ſich aus dem Obigen von ſelbst.

Anm. Wir nennen die ſo eben behandelte Verwandtſchaft die ſyncyclische. Von beſonderem Interesse ist der Fall, wo ſolchen Kreiſen, die ſich in Punkte zuſammenziehen, auch in dem andern Vereine gleichfalls ſolche entſprechen.

407. Wenn der Kreis, deſſen Gleichung

$$(a) \quad \alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

ist; wo α, β, γ, δ reell ſind, ſich in einen Punkt zuſammenziehen ſoll, ſo muss

$$(b) \quad \alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2$$

ſein, umgekehrt, wenn die Gleichung (b) ſtattfindet und nicht alle Koefficienten null ſind, ſo muss der durch (a) dargeſtellte Kreis ſich entweder in einen Punkt zuſammenziehen, oder in die unendlich entfernte Gerade umſchlagen; letzteres, wenn α, β, γ zugleich null ſind.

Beweis. Aus der Gleichung (a) ergiebt ſich, wenn α nicht null ist, für den Radius r des zu jener Gleichung gehörigen Kreiſes

$$r^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\delta}{\alpha^2},$$

woraus das Uebrige hervorgeht. Wenn hingegen α null ist, ſo wird die Gleichung (a) die Gleichung einer geraden Linie; aber dann folgt aus (b), dass $\beta^2 + \gamma^2$ null ſei, d. h. dass β und γ null ſeien; alſo ist dann die durch die Gleichung (a) dargeſtellte Linie die unendlich entfernte.

408. Nimmt man x und y als (rechtwinklige) Koordinaten eines Vereins von Kreiſen und x' und y' als die eines andern, und ſetzt den vier Funktionen

Hosted by Google

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ 1$$

nach der Reihe die Funktionen

$$1,\ x',\ y',\ x'^2 + y'^2$$

entsprechend, ſo dass alſo jedem Kreiſe, deſſen Gleichung

(a) $\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$

iſt, derjenige Kreis entſpricht, deſſen Gleichung

(b) $\alpha + 2\beta x' + 2\gamma y' + \delta(x'^2 + y'^2) = 0$

iſt; ſo entſpricht jedem Punkte des ersten Vereines, mit Ausnahme des Anfangspunktes der Abscissen, ein Punkt des zweiten und umgekehrt; dem Anfangspunkte der Abscissen hingegen entſpricht in dem andern Vereine jedesmal die unendlich entfernte Gerade.

Beweis. Wenn der Kreis, deſſen Gleichung (a) iſt, ſich in einen Punkt zuſammenzieht, ſo iſt $\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2$ (407). Wenn aber dieſe Gleichung gilt, ſo iſt auch der Kreis, deſſen Gleichung (b) iſt (407), entweder ein Punkt (wenn $\delta \gtrless 0$) oder die unendlich entfernte Gerade, letzteres wenn β, γ, δ null ſind, d. h. wenn der Punkt des ersten Vereins durch die Gleichung $\alpha(x^2 + y^2) = 0$ bestimmt, alſo Anfangspunkt der Koordinaten iſt.

409. Wenn bei zwei ſyncyclisch verwandten Vereinen von Kreiſen der unendlich entfernten Geraden jedes Vereins ein Punkt des andern entſpricht, und allen übrigen Punkten jedes Vereines wiederum Punkte des andern entſprechen, ſo kann man ſtets den (zu einander ſenkrechten) Koordinatenaxen jedes Vereins eine ſolche Lage geben, und dem als Einheit genommenen Maasse der Längen einen ſolchen Werth, dass den vier Funktionen

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ 1$$

des ersten Vereines nach der Reihe die vier Funktionen

$$1,\ x',\ y',\ x'^2 + y'^2$$

des andern entſprechen.

Beweis. Die unendlich entfernte Gerade wird durch eine Funktion dargeſtellt, welche bloss aus einer Konstanten beſteht. Der Punkt, welcher in jedem Vereine der unendlich entfernten Geraden des andern Vereines entſpricht, ſei zum Anfangspunkte der Abscissen gemacht. Der Anfangs-

Hosted by Google

punkt der Abscissen wird durch die Kreisfunktion $x^2 + y^2$ dargestellt. Diefer Funktion entspreche in dem zweiten Vereine die Konstante a, durch welche die unendlich entfernte Gerade dargestellt; ebenfo entspreche der Funktion $x'^2 + y'^2$ des zweiten Vereins in dem ersten die Konstante b. Man ändere nun das als Einheit genommene Maass der Längen, fo multipliciren fich die Koordinaten mit einem konstanten Faktor λ, und es entsprechen fich dann

$$\lambda^2(x^2 + y^2),\ b$$
$$a,\quad \lambda^2(x'^2 + y'^2).$$

Es werde λ^2 fo bestimmt, dass $a : \lambda^2 = \lambda^2 : b$, d. h. $\lambda^4 = ab$ fei. Setzen wir dann $\frac{a}{b} = \mu^2$, fo entsprechen fich

$$x^2 + y^2,\ 1$$
$$\mu,\quad \mu(x'^2 + y'^2).$$

Nun werden aber die räumlichen Gebilde, welche durch Funktionen dargestellt werden, nicht verändert, wenn man diefe alle mit einer konstanten Zahl, alfo hier mit μ dividirt, und wir können daher $x^2 + y^2$ und 1 mit 1 und $x'^2 + y'^2$ entsprechend fetzen. Es möge ferner den Funktionen x und y des ersten Vereines die Funktionen f_1 und f_2, nämlich

$$f_1 = \alpha_1(x'^2 + y'^2) + \beta_1 x' + \gamma_1 y' + \delta_1$$
$$f_2 = \alpha_2(x'^2 + y'^2) + \beta_2 x' + \gamma_2 y' + \delta_2$$

entsprechen, fo dass alfo den Funktionen

$$x^2 + y^2,\ x,\ y,\ 1$$

die Funktionen

$$1,\ f_1,\ f_2,\ x'^2 + y'^2$$

entsprechen. Aus den ersteren fei durch die Koefficienten α, β, γ, δ eine Funktion f abgeleitet, fo entspricht ihr im zweiten Vereine die Funktion f', welche durch diefelben Koefficienten aus den vier letzten Funktionen abgeleitet ist. Die Bedingung dafür, dass die erstere Funktion f einen blossen Punkt darstellt, ist (nach 407)

$$(a)\quad 4\alpha\delta = \beta^2 + \gamma^2.$$

Für die zweite Funktion

$$f' = \alpha + \beta f_1 + \gamma f_2 + \delta(x'^2 + y'^2)$$
$$= (\delta + \beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2)(x'^2 + y'^2) + (\beta\beta_1 + \gamma\beta_2)x'$$
$$+ (\beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2)y' + \alpha + \beta\delta_1 + \gamma\delta_2$$

Hosted by Google

ist diese Bedingung:

$$4(\delta+\beta\alpha_1+\gamma\alpha_2)(\alpha+\beta\delta_1+\gamma\delta_2)=(\beta\beta_1+\gamma\beta_2)^2+(\beta\gamma_1+\gamma\gamma_2)^2.$$

Führt man hier statt δ den Werth aus (a) ein, so erhält man

$$(\beta^2+\gamma^2+4\alpha\beta\alpha_1+4\alpha\gamma\alpha_2)(\alpha+\beta\delta_1+\gamma\delta_2)$$
$$=\alpha(\beta\beta_1+\gamma\beta_2)^2+\alpha(\beta\gamma_1+\gamma\gamma_2)^2.$$

Diese Gleichung muss für beliebige Werthe von α, β, γ gelten, also müssen die Koefficienten, die zu gleichen Potenzen dieser Grössen gehören, auf beiden Seiten gleich sein. Da die rechte Seite α nur in der ersten Potenz enthält, so müssen die Koefficienten der Glieder, welche α^2 enthalten, und derer, welche α gar nicht enthalten, null sein, also sind α_1, α_2, δ_1, δ_2 null, d. h. f_1 und f_2 stellen gerade Linien dar, welche durch den Anfangspunkt der Abscissen gehen. Legen wir die Abscissenaxe so, dass sie mit der durch f_2 dargestellten Linie zusammenfällt, so reducirt sich f_2 bloss auf das Glied, was y enthält, d. h. β_2 wird null. Dividiren wir dann noch die so reducirte Gleichung durch α, so geht sie über in

$$\beta^2+\gamma^2=\beta^2\beta_1{}^2+(\beta\gamma_1+\gamma\gamma_2)^2.$$

Da in der entwickelten Gleichung $2\gamma_1\gamma_2$ der Koefficient von $\beta\gamma$ ist, so muss $\gamma_1\gamma_2=0$ sein; γ_2 kann nicht null sein, weil sonst f_2 identisch gleich null wäre, also muss γ_1 null sein. Dann erhält man

$$\beta^2(1-\beta_1{}^2)+\gamma^2(1-\gamma_2{}^2)=0,$$

also $\beta_1=\mp 1$, $\gamma_2=\mp 1$. Da auf jeder der beiden Koordinatenaxen die Seite, nach welcher die Koordinaten positiv genommen sind, beliebig gewählt werden können, so können wir β_1 und $\gamma_2=+1$ setzen, und es wird dann $f_1=x'$, $f_2=y'$, und entsprechen also den Funktionen

$$x^2+y^2,\ x,\ y,\ 1$$

des ersten Vereins die Funktionen

$$1,\ x',\ y',\ x'^2+y'^2$$

des zweiten.

Anm. Die hier behandelte specielle Art der syncyclischen Verwandtschaft ist zuerst von Möbius aufgestellt und von ihm Kreisverwandtschaft genannt worden; vergl. Möbius Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren (in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wiss., 5. Febr. 1853). Es ergiebt sich aus dem Obigen, dass derjenige Punkt in jedem der beiden kreisverwandten

Hosted by Google

Vereine als charakteristisch hervortritt, welchem im andern Vereine die unendlich entfernte Gerade entspricht. Es sei dieser Punkt Centralpunkt des Vereins genannt. Legt man nun die beiden Vereine so auf einander, dass die Centralpunkte, die x-Axen und die y-Axen sich gegenseitig decken, so deckt auch jede durch den Centralpunkt gehende gerade Linie, z. B. die gerade Linie $qx + ry = 0$ die entsprechende. Schlägt man nun noch um den Centralpunkt mit der Länge, welche als Maass der Koordinaten zu Grunde gelegt ist, einen Kreis, welcher Hauptkreis heisse, so stellt sich die ganze Art des gegenseitigen Entsprechens aufs Anschaulichste dar. Dann besteht die Peripherie des Hauptkreises aus den sämmtlichen Punkten, welche ihre entsprechenden decken, jedem Punkt im Innern des Kreises entspricht im andern Vereine ein auf demselben Radius liegender Punkt ausserhalb des Kreises, und zwar so, dass der Radius stets die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der beiden entsprechenden Punkte vom Centrum ist. Letzteres folgt für einen Punkt der x-Axe sogleich aus den entsprechenden Funktionen, denn die Kreis-Gleichung eines Punktes der x-Axe, dessen Abscisse $= c$ ist, ist $(x - c)^2 + y^2 = 0$, d. h. $x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = 0$, also die des entsprechenden Punktes $1 - 2cx + c^2(x^2 + y^2) = 0$, d. h. $\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = 0$, also ist der Abstand dieses Punktes vom Centralpunkte $= \frac{1}{c}$, während die des entsprechenden Punktes c war, also ihr Produkt 1, d. h. die als Einheit genommene Länge die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der entsprechenden Punkte auf der x-Axe. Da man nun jede durch den Centralpunkt gehende gerade Linie als x-Axe annehmen kann, so gilt jene Beziehung allgemein. Wenn man statt der Annahme, dass den unendlich entfernten Geraden ein Punkt entsprechen soll, die Annahme macht, dass in den beiden syncyclischen Vereinen ohne Ausnahme jedem Punkte des einen Vereins ein Punkt des andern entsprechen soll, so entspricht auch der unendlich entfernten Geraden des einen Vereins die unendlich entfernte des andern, und man gelangt zur Aehnlichkeit, welche sich also auf diese Weise der Kreisverwandtschaft gegenüber stellt.

§. 7. Normale Einheiten der Funktionen, Stetigkeit der letzteren.

410. Erklärung. Normale Einheiten reeller Grössen. Für die reellen Zahlen setze ich 1 als normale Einheit, für die reellen extensiven Grössen setze ich als normale Einheiten die ursprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$;

Hosted by Google

für die reellen extenſiven Grössen m-ter Stufe ferner die wohlgeordneten (multiplikativen) Kombinationen ohne Wiederholung zur m-ten Klasse aus den ursprünglichen Einheiten, für die reellen algebraischen Produkte von Grössen gleicher Stufe endlich die (wohlgeordneten) Kombinationen mit Wiederholung aus den normalen Einheiten der Faktoren (wobei jede dieſer Kombinationen als algebraisches Produkt der darin enthaltenen Elemente aufzufassen ist).

Anm. Es ſind hier nur die früher vereinzelt vorkommenden Bestimmungen zuſammengefasst. Es kommt noch darauf an, auch für die reellen Lückenausdrücke die normalen Einheiten festzustellen. Wir haben (in 363 Anm.) geſehen, dass das Produkt der Faktoren, welche die Lücken eines Lückenausdrucks ausfüllen ſollen, als ein algebraisches Produkt aufzufassen ist, mit welchem der Lückenausdruck multiplicirt werden ſoll. Folglich kommt es nur darauf an, welche Werthe der Lückenausdruck annimmt, wenn die normalen Einheiten jener algebraischen Produkte mit ihm multiplicirt werden. Es ſeien E_1, E_2,$\cdots$ die normalen Einheiten dieſer algebraischen Produkte und L der Lückenausdruck, ſo kommt es auf die Werthe LE_1, LE_2,$\cdots$ an. Dieſe Werthe können wieder extenſive Grössen ſein, die normalen Einheiten derſelben ſeien e_1, e_2,$\cdots$, ſo ergeben ſich als normale Einheiten von L diejenigen Lückenausdrücke, welche mit E_1, E_2,$\cdots$ multiplicirt irgend eine der Einheiten e_1, e_2,$\cdots$ liefern.

411. Erklärung. Normale Einheiten reeller Lückenausdrücke. Wenn E_1, E_2,$\cdots$ die normalen Einheiten derjenigen algebraischen Produkte ſind, deren Faktoren die Lücken eines reellen Lückenausdruckes L auszufüllen vermögen, und e_1, e_2, $\cdots$ die normalen Einheiten derjenigen Grössen ſind, in welche L nach Ausfüllung ſeiner Lücken übergeht, ſo ſetze ich diejenigen Lückenausdrücke $E_{r,s}$ als normale Einheiten von L, welche den Gleichungen

$$E_{r,s}E_r = e_s \text{ und } E_{r,s}E_t = 0\,[t \gtrless r]$$

genügen.

Anm. Es ist dieſe Erklärung in Uebereinstimmung mit der in 381 für die Einheiten des Quotienten, d. h. des Lückenausdruckes mit Einer Lücke gegebenen.

412. Jeder (reelle) Lückenausdruck lässt ſich aus den in 411 festgeſetzten normalen Einheiten desſelben numerisch ableiten, und dieſe letzteren stehen in keiner Zahlbeziehung zu einander.

Beweis wie in 381.

Hosted by Google

413. Erkl. Normale Einheiten einer Grössengattung. Als Grössen derſelben Gattung ſetze ich alle diejenigen Grössen, welche nach dem Früheren zu einander addirt werden können. Die Anzahl der normalen Einheiten einer Grössengattung nehme ich stets als eine gerade an, indem die eine Hälfte derſelben reell ist, und die andere daraus durch Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ hervorgeht. Die Ableitzahlen, durch welche eine Grösse aus ihren normalen Einheiten numerisch abgeleitet wird, nehme ich stets als reell an.

Anm. Für die allgemeinen Zahlgrössen ſind alſo 1 und $\sqrt{-1} = i$ die normalen Einheiten, für die allgemeinen Grössen erster Stufe $e_1, e_2, \cdots e_n, e_1 i, e_2 i, \cdots e_n i$, wo $e_1, e_2, \cdots e_n$ die ursprünglichen Einheiten ſind u. ſ. w.

414. Erkl. Numerischer Werth einer Grösse heisst die poſitive Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Zahlen, durch welche jene Grösse aus ihren normalen Einheiten ableitbar ist, d. h. wenn $E_1, E_2, \cdots$ die normalen Einheiten einer Grösse P ſind und

$$P = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots$$

ist, ſo ist der numerische Werth von P gleich

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots}.$$

Anm. Dieſe Definition ist in Uebereinstimmung mit der in 151 gegebenen. Der numerische Werth einer komplexen Zahlgrösse $p + qi$ ist hiernach gleich $\sqrt{p^2 + q^2}$.

415. Wenn der numerische Werth einer Grösse null ist, ſo ſind alle Zahlen, durch welche dieſe Grösse aus ihren normalen Einheiten abgeleitet ist, einzeln genommen null.

Beweis. Es ſeien $E_1, E_2, \cdots$ die normalen Einheiten der Grösse P und ſei

$$P = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots.$$

Wenn nun der numerische Werth von P null ſein ſoll, ſo heisst das (nach 414)

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots} = 0, \text{ alſo}$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = 0.$$

Da aber $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ (nach 413 Anm.) alle reell ſind, ſo kann die Summe ihrer Quadrate nicht anders null ſein, als wenn ſie alle einzeln genommen null ſind, alſo

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots.$$

Hosted by Google

416. Erklärung. Wenn der numerische Werth einer Grösse a kleiner ist als der einer Grösse b, so sage ich, a sei numerisch kleiner als b und schreibe dies

$$a \text{ num.} < b.$$

417. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ die Zahlen sind, durch welche a aus seinen normalen Einheiten ableitbar ist, und ebenso $\beta_1, \beta_2, \cdots$ die Zahlen, durch welche b aus seinen normalen Einheiten ableitbar ist, so sind die Vergleichungen

$$a \text{ num.} < b$$

und $$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots < \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$

einander gleichbedeutend.

Beweis folgt unmittelbar aus 416 und 414.

418. Wenn p, q, $\cdots$ positive Zahlwerthe und a, b, $\cdots$ beliebige (aus denselben normalen Einheiten ableitbare) Grössen von der Art sind, dass

$$a \text{ num.} < p,\ b \text{ num.} < q, \cdots$$

sei, so ist auch

$$a + b + \cdots \text{ num.} < p + q + \cdots.$$

Beweis 1 (für zwei Grössen). Es seien $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von a und b und sei

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots$$

und sei α der numerische Werth von a, β der von b und γ der von $a + b$, so ist $\alpha < p$, $\beta < q$, zu zeigen ist, dass $\gamma < p + q$ sei. Nach 414 ist

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots$$
$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$
$$\gamma^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2 + \cdots,$$

also (*) $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)$.

Nun können wir zeigen, dass $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots = < \alpha\beta$ sei. In der That ist

$$(\alpha\beta)^2 - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2$$
$$= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2$$
$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + \cdots.$$

Die rechte Seite ist die Summe mehrerer Quadrate, also gleich oder grösser als Null, also auch die linke, d. h.

$$(\alpha\beta)^2 = > (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots)^2,$$

Hosted by Google

alſo auch, da α und β poſitiv ſind,

$$\alpha\beta = > \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots.$$

Wenden wir dieſe Vergleichung auf die Gleichung (*) an, ſo folgt

$$\gamma^2 = < \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta, \text{ d. h. } \gamma^2 = < (\alpha + \beta)^2,$$

alſo, da γ und $\alpha + \beta$ poſitiv ſind,

$$\gamma = < \alpha + \beta;$$

aber da α und β (poſitive) Zahlen ſind, welche beziehlich kleiner als die poſitiven Zahlen p und q ſind, ſo ist

$$\alpha + \beta < p + q,$$

alſo $\gamma < p + q$,

d. h. der numeriſche Werth von $a + b$ ist kleiner als $p + q$.

2. (für mehr Grössen). Da nun (nach Bew. 1) $a + b$ num. $< p + q$ und (nach Hypotheſis) c num. $< r$ ist, ſo ist (nach Bew. 1) $a + b + c$ num. $< p + q + r$ u. ſ. w. für beliebig viele Grössen.

419. Wenn p und q poſitive Zahlwerthe und a und b beliebige (aus denſelben normalen Einheiten ableitbare) Grössen von der Art ſind, dass

a num. $< p$, b num. $< q$

ist, ſo ist auch

$a - b$ num. $< p + q$.

420. Erklärung. Ich ſage, eine Funktion f(q) einer poſitiven Zahlgrösse verſchwinde mit q, wenn ſich zu jeder poſitiven Zahl p ein poſitiver Werth von q angeben lässt von der Art, dass

f(q) num. $< p$

ſei, und auch bleibe, wenn q beliebig abnimmt, aber poſitiv bleibt. Wenn ausserdem $f(0) = 0$ ist, ſo ſage ich f(q) werde mit q null.

Anm. Beide Ausdrücke: Mit (poſitivem) q verſchwinden und mit q null werden, ſind alſo nicht identiſch; ſondern nur der zweite ſchliesst den ersten ein, nicht umgekehrt; denn es könnten für f(q) die Bedingungen des Verſchwindens mit q erfüllt ſein, und könnte dennoch f(q) für $q = 0$ in einen iſolirten von Null verſchiedenen Werth überſpringen.

421. Wenn mehrere Funktionen $f_1(q)$, $f_2(q)$, $\cdot\cdot$, $f_n(q)$ einer poſitiven Zahlgrösse q mit q verſchwinden, ſo verſchwindet mit q auch

Hosted by Google

(a) $a_1 f_1(q) + a_2 f_2(q) + \cdots + a_n f_n(q)$,

wo $a_1, a_2, \cdots a_n$ endliche Zahlen, oder auch beliebige endliche Lückenausdrücke mit je einer Lücke ſind, welche durch $f_1 q$, $f_2 q$ u. ſ. w. ausgefüllt werden kann. (Und ebenſo wenn jene Funktionen mit q null werden, ſo wird auch dieſer letzte Ausdruck (a) mit q null.)

Beweis 1 (für Zahlen). Sollten von den Grössen $a_1, \cdots a_n$ einige null ſein, ſo kann man in dem Ausdrucke (a) die Glieder weglassen, in denen dieſe Koefficienten, welche gleich null ſind, vorkommen. Wir nehmen an, dies ſei schon geschehen, und es ſeien alſo $a_1, \cdots a_n$ lauter von Null verschiedene (endliche) Zahlen. Da nun (nach Hyp.) $f_1 q$ mit q verschwindet, ſo muss ſich (nach 420) zu jeder von Null verschiedenen Zahl, z. B. zu $\frac{p}{n a_1}$, ein poſitiver Werth q_1 von der Art angeben lassen, dass $f_1(q_1)$ numerisch kleiner als $p : a_1 n$ ſei und auch bleibe, wenn q_1 beliebig abnimmt, aber poſitiv bleibt; aus gleichem Grunde wird man auch einen poſitiven Werth q_2 der Art angeben können, dass $f_2(q_2)$ numerisch kleiner als $p : a_2 n$ ſei und auch bleibe bei abnehmenden q_2, u. ſ. w. Wenn nun q ein poſitiver Werth ist, welcher noch kleiner als jede der Grössen $q_1, q_2, \cdots q_n$ ist, ſo ist auch $f_1 q$ num. $< p : a_1 n$ u. ſ. w. oder

$$a_1 f_1 q \text{ num.} < \frac{p}{n},\ a_2 f_2 q \text{ num.} < \frac{p}{n}, \cdots a_n f_n(q) \text{ num.} < \frac{p}{n};$$

folglich ist (nach 418) auch die Summe der linken Seiten numerisch kleiner als die der rechten, d. h.

$$a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots + a_n f_n q \text{ num.} < p,$$

eine Vergleichung, die auch bestehen bleibt, wenn q beliebig abnimmt, aber poſitiv bleibt, d. h. es verschwindet der Ausdruck (a), wenn $a_1, \cdots a_n$ Zahlen ſind, mit q.

2. Es reducire ſich der Ausdruck (a) auf $a_1 f_1 q$, wo a_1 eine normale Einheit eines Lückenausdruckes ſei, dessen Lücke durch $f_1 q$ ausgefüllt werden kann; es ſeien ferner $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $a_1 f_1 q$, und $E_1, E_2, \cdots$ die von $f_1 q$ und ſei

(b) $f_1 q = E_1 \varphi_1 q + E_2 \varphi_2 q + \cdots = \sum E_\alpha \varphi_\alpha q,$

Hosted by Google

ſo wird (nach 411) a_1 die Eigenſchaft haben, dass es mit einer der Einheiten $E_1, E_2, \cdots$, z. B. mit E_r, multiplicirt, eine der Einheiten $e_1, e_2, \cdots$, z. B. die Einheit e_s, liefert, hingegen mit jeder der übrigen Einheiten $E_1, E_2, \cdots$ multiplicirt null giebt, ſo dass alſo dann

(c) $a_1 E_r = e_s$, $a_1 E_t = 0$, für $t \gtrless r$

ist. Dann erhalten wir

$$a_1 f_1 q = a_1 \sum E_a \varphi_a q = \sum a_1 E_a \varphi_a q \qquad [44]$$
$$= a_1 E_r \varphi_r q = e_s \varphi_r q \qquad [c].$$

Alſo ist (nach 414) der numeriſche Werth von $a_1 f_1 q$ gleich $\sqrt{(\varphi_r q)^2}$. Da nun (nach Hyp.) $f_1 q$ mit q verſchwindet, ſo lässt ſich (nach 420) zu jeder poſitiven Zahl p ein Werth von q der Art angeben, dass $f_1(q)$ num. $< p$ ſei, und auch bei abnehmendem q bleibe, d. h. (nach 417), dass

$$(\varphi_1 q)^2 + (\varphi_2 q)^2 + \cdots < p^2$$

ſei und bei abnehmendem q bleibe. Da aber (nach 413) $\varphi_1 q$, $\varphi_2 q, \cdots$ reell, alſo $(\varphi_1 p)^2$, $(\varphi_2 q)^2, \cdots$ poſitiv ſind, ſo muss jedes dieſer Quadrate kleiner als p^2 ſein, alſo auch $(\varphi_r q)^2 < p^2$, d. h. $a_1 f_1 q$ num. $< p$, alſo verſchwindet $a_1 f_1 q$ mit q.

3. Es ſeien endlich $a_1, a_2, \cdots$ beliebige Lückenausdrücke (mit je einer Lücke), und ſei

$$a_r = \sum \alpha_{r,b} E_{r,b},$$

wo $E_{r,1}, E_{r,2}, \cdots$ die normalen Einheiten von a_r darſtellen, ſo wird

$$a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots = \sum \alpha_{a,b} E_{a,b} f_a q.$$

Da nun (nach Bew. 2) $E_{a,b} f_a q$ mit q verſchwindet, ſo verſchwindet (nach Bew. 1) auch die Vielfachenſumme dieſer Ausdrücke; alſo auch $a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots$. Wenn ausserdem $f_1 q, f_2 q, \cdots$, für $q = 0$, auch null ſind, ſo gilt dasſelbe auch für $a_1 f_1 q + a_2 f_2 q + \cdots$, alſo, da ausserdem der letzte Ausdruck mit q verſchwindet, ſo wird er nun auch mit q null.

422. Wenn zwei Funktionen $f_1 q$ und $f_2 q$ einer poſitiven Zahlgrösse q mit dieſer verſchwinden (oder null werden), ſo muss mit ihr auch die Differenz $f_1 q - f_2 q$ verſchwinden (oder null werden).

Beweis in 421.

Hosted by Google

423. Erklärung. Wenn fx für einen bestimmten Werth x die Eigenschaft hat, dass sich allemal ein konstanter Werth c von der Art angeben lässt, dass $f(x+qdx)-c$ jedesmal mit dem positiven Zahlwerthe q verschwindet, was für eine endliche Grösse, die mit x von gleicher Gattung ist, auch unter dx verstanden sein mag, so sage ich, die Funktion fx konvergire um x nach c.

Anm. Es ist hier also unter dx vorläufig nichts weiter verstanden, als eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist. Doch habe ich schon hier diese Bezeichnung gewählt, da sie für das Folgende am bequemsten ist.

424. Wenn fx um x nach c konvergirt, so kann es um x nicht zugleich nach einem von c verschiedenen Werthe c_1 konvergiren.

Beweis. Denn sollte beides zugleich der Fall sein, so müssten (nach 423) $f(x+qdx)-c$ und $f(x+qdx)-c_1$ beide mit q verschwinden, also (nach 422) auch die Differenz beider, d. h. $c-c_1$, was unmöglich ist, da c und c_1 zwei verschiedene Konstanten sind.

425. Erklärung. Eine Funktion fx heisst in x stetig, wenn fx um x nach dem Werthe konvergirt, den fx in x hat.

426. Wenn fx in x stetig ist, so verschwindet für jedes endliche dx die Differenz $f(x+qdx)-fx$ mit q.

Beweis unmittelbar aus 425, 423.

Anm. Wenn fx in x nicht stetig ist, so verschwindet nicht für jedes endliche a die Differenz $f(x+qdx)-fx$ mit q; sondern es könnte $f(x+qdx)$ für verschiedene Grössen dx nach verschiedenen Gränzen konvergiren, oder, wenn es auch für alle endlichen Werthe dx nach ein und demselben Werthe c konvergirte, also (nach 423) die Funktion fx selbst um x nach diesem Werthe zu konvergirte, so würde doch (fx), wenn es in x unstetig ist, dort in einen von c verschiedenen Werth überspringen.

427. Erklärung. Wenn f_1x eine Zahlfunktion und fx eine beliebige Funktion ist, und beide für denselben Werth von $x=a$ null werden, doch so, dass der Quotient $fx:f_1x$ um $x=a$ nach einem konstanten Werthe c konvergirt: so verstehe ich unter dem Bruche $\frac{fx}{f_1x}$ diejenige Funktion, welche im Uebrigen mit jenem Quotienten übereinstimmt, aber für

Hosted by Google

$x = a$ den Werth c annimmt, und bezeichne den Werth c, welchen dieſer Bruch für $x = a$ annimmt, mit

$$c = \left[\frac{fx}{f_1 x}\right](x = a).$$

Anm. Es ist dieſe Bestimmung, ebenſo wie die vorhergehenden, nicht bloss für die Funktionen extenſiver Grössen, ſondern auch für die gewöhnliche Funktionenlehre nothwendig. In der That, mag nun x eine extenſive Grösse oder eine Zahlgrösse, fx eine extenſive Funktion oder eine Zahlfunktion ſein, ſo wird, wenn der Bruch $\frac{fx}{f_1 x}$ wieder als eine Funktion behandelt werden ſoll, derselbe für jeden bestimmten Werth von x gleichfalls einen bestimmten Werth annehmen müssen (348). Dieſer Werth wird im Allgemeinen durch Diviſion der beſonderen Werthe, welche fx und $f_1 x$ dann annehmen, gefunden. Aber wenn für $x = a$ ſowohl fx als $f_1 x$ null werden, ſo wird der Quotient dieſer beſonderen Werthe vollkommen unbestimmt, eine Unbestimmtheit, welche für den Bruch $\frac{fx}{f_1 x}$ durchaus aufgehoben werden muss, falls man den Bruch Verknüpfungen unterwerfen will, die auch für den Fall, dass $x = a$ ſei, ihre Geltung haben ſollen. An und für ſich ist es möglich, in dieſem Falle für jenen Bruch einen beliebigen bestimmten Werth b festzustellen, allein dann müsste in die Bezeichnung des Bruches dieſe Bestimmung, dass derselbe für $x = a$ den bestimmten Werth b annehmen ſollte, mit aufgenommen werden. Dieſe willkürliche Bestimmung wird überflüssig, wenn der in der obigen Erklärung aufgestellte Begriff festgehalten wird, nach welchem jener Bruch in $x = a$ stetig geſetzt wird. Aber dieſer Begriff ſetzt voraus, dass jener Bruch um $x = a$ nach einem bestimmten Werthe c zu konvergirt. Ist dies nicht der Fall, ſondern konvergirt der Bruch $\frac{f(a+qb)}{f_1(a+qb)}$ beim Verschwinden der poſitiven Zahlgrösse q nach verſchiedenen Gränzen zu, je nachdem b andere Werthe annimmt, z. B. bei Zahlgrössen, wenn b die Werthe $+1$, -1 oder $\cos.p + i\,\sin.p$ annimmt, ſo ist der oben gegebene Begriff nicht mehr anwendbar, und es bleibt nichts übrig, als dann eine willkürliche Bestimmung hinzuzufügen und mit in die Bezeichnung aufzunehmen. Die Verkennung aller dieſer Verhältnisse hat in die höhere Analyſis eine heilloſe Verwirrung gebracht, welche ſich häufig genug durch Widersprüche und fehlerhafte Reſultate verrieth. Um dieſen Irrthümern zu entgehen, hat man hier und da die Methode zu verbessern geſucht; namentlich ist es Cauchy's Verdienst, dass er durch einen unerschöpflichen Reichthum der genialsten Kunstgriffe die Methode überall, wo ſie schien zu Irrthümern führen zu können, gegen dieſelben ſicher zu stellen ſuchte. Aber auch er konnte damit nicht zum Ziele gelangen, weil er

Hosted by Google

das Uebel nicht bei der Wurzel ergriff, und nicht die wesentlichen Begriffsbestimmungen hinzufügte, aus deren Mangel alle jene Verwirrung hervorging. Ich habe mich daher genöthigt gesehen, diese Begriffsbestimmungen, so weit sie für das Folgende nothwendig erschienen, hier nachzutragen, und, statt mich auf frühere Bearbeitungen der Differenzialrechnung, der Potenzreihen und der Integralrechnung berufen zu können, musste ich diese Wissenschaften von vorne an aufbauen, um sie auch für extensive Grössen mit Sicherheit anwenden zu können. Es wurde dadurch um somehr geboten, mich nur auf das Nothwendigste zu beschränken. Ich bemerke hier noch, was sich aus dem oben Bemerkten leicht ergiebt, dass ähnliche Begriffsbestimmungen für alle die Fälle festzustellen sind, wo die zu verknüpfenden Funktionen für gewisse Werthe der Variabeln in solche Ausdrücke übergehen, welche keinen Verknüpfungen (oder wenigstens nicht denen, durch welche jene Funktionen unter sich verbunden sind) unterworfen werden dürfen, also namentlich, wenn eine oder mehrere derselben unendlich oder mehrdeutig werden. In allen diesen Fällen kann die Bestimmung ganz analog der so eben mitgetheilten getroffen werden. Die Bezeichnung, welche ich oben hinzugefügt, indem ich hinter die Funktion den besonderen Werth der Variabeln in Parenthese beifüge, um durch das Ganze den Werth auszudrücken, welchen die Funktion für diesen besonderen Werth der Variabeln annimmt, ist auch in vielen anderen Fällen mit Vortheil anwendbar, und zum Theil unvermeidlich.

Kap. 2. Differenzialrechnung.

§. 1. Differenzial erster Ordnung.

428. Erklärung. Wenn q eine reelle Zahlgrösse, dx aber eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist, bezeichnet, so verstehe ich unter der (nach der Veränderlichen x und dem Zahlfaktor q genommenen) Differenz der Funktion fx, geschrieben $d_{x,q}fx$, diejenige Funktion, welche der Gleichung

$$(a)\quad d_{x,q}fx = \frac{f(x+qdx) - fx}{q}$$

genügt (wobei die Division durch q in dem 427 bestimmten Sinne zu fassen ist).

429. Erklärung. Wenn der Ausdruck $d_{x,q}fx$ in $q = 0$ und in x (425) stetig ist, so bezeichne ich $d_{x,0}fx$ mit $d_x fx$

Hosted by Google

und nenne $d_x fx$ das nach x genommene Differenzial von fx, d. h. ich ſetze

$$d_x fx = d_{x,0} fx = \left[\frac{f(x + qdx) - fx}{q}\right](q = 0).$$

Wenn $d_{x,q} fx$ nicht die Eigenſchaft hat, dass es in $q = 0$ und in x ſtetig ſei, ſo ſage ich, dass auch $d_x fx$ unſtetig ſei. Wenn in einer Formel das vor eine Funktion geſetzte Differenzialzeichen d ohne jeden Index geſchrieben iſt, ſo ſoll das heissen, dass die Formel allgemein gelten ſoll, nach welcher Variabeln auch die dadurch ausgedrückte Differenziation genommen ſei, d. h. welchen Index man auch dem d hinzufügen mag, vorausgeſetzt nur, dass man dann in dieſer Formel jedem Differenzialzeichen d (was vor eine Grösse tritt) denſelben Index hinzufügt.

Anm. Es lässt ſich der Begriff des Differenzials auch für den Fall, dass dasſelbe unſtetig wird, feſtſtellen, und laſſen ſich mit ſolchen Differenzialen unter gewiſſen Umſtänden noch gültige Verknüpfungen vornehmen. Doch iſt es bei jeder Behandlung der Differenzialrechnung am zweckmässigsten, dieſen Fall zunächſt ganz auszuſchliessen, und namentlich den Fall, wo das Differenzial unendlich wird, im Zuſammenhange mit der allgemeinen Betrachtung unbegränzt wachsender Funktionen in einem eigenen, die ganze Analyſis des Unendlichen behandelnden Abſchnitte nachzuholen. Aus dem vorliegenden Werke ſchliessen wir jedoch dieſe Betrachtung aus, und ſetzen im Folgenden bei jedem Differenzial voraus, dass es ſtetig ſei. Noch bemerke ich, das die Stetigkeit von $d_x fx$ vorausſetzt, dass $f(x + qdx) - fx$ um $q = 0$ gleichfalls null werde, d. h. dass auch fx ſtetig ſei.

430. Wenn $d_x fx$ ſtetig iſt und $fx = y$ geſetzt wird, ſo iſt

$$f(x + qdx) = fx + q(d_x fx + N)$$
$$= y + q(d_x y + N),$$

wo N mit der reellen Zahlgrösse q zugleich null wird.

Beweis. Man ſetze

$$\frac{f(x + qdx) - fx}{q} - d_x fx = N.$$

Da $d_x fx$ ſtetig iſt (nach Hyp.), ſo iſt (nach 429) auch der Quotient $\frac{f(x + qdx) - fx}{q}$ in $q = 0$ ſtetig, und dann $= d_x fx$, alſo wird N als die Differenz dieſer beiden Ausdrücke mit q zugleich null. Dann erhalten wir aber

$$f(x + qdx) = fx + q(d_x fx + N) = y + q(d_x y + N).$$

Hosted by Google

431. Wenn A ein konstanter Lückenausdruck mit n Lücken (in jedem Gliede) ist, in welche Grössen von der Gattung x eintreten ſollen, ſo ist

(a) $d_x(Ax^n) = nAx^{n-1}dx$;

ins Beſondere ist

(b) $d_x(Ax) = A$

(c) $d_x A = 0$.

Beweis. Da für die Produkte, deren Faktoren in die Lücken eines Lückenausdruckes eintreten ſollen (nach 363), die gewöhnlichen Geſetze der Algebra gelten, ſo folgt, wie in der Algebra, dass

$$A(x + qdx)^n = Ax^n + nqAx^{n-1}dx + q^2B$$

ist, wo B eine steigende Potenzreihe von q ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass

$$\frac{A(x + qdx)^n - Ax^n}{q} = nAx^{n-1}dx + qB$$

in $q = 0$ stetig ist, alſo ist (nach 429)

$$d_x(Ax^n) = nAx^{n-1}dx.$$

Hieraus folgen die Formeln b und c für $n = 1$ und 0.

432. Wenn $u_1, u_2, \cdots$ beliebige Funktionen einer beliebigen Variabeln x ſind, ſo ist (wenn $du_1, du_2, \cdots$ stetig ſind)

$$d(u_1 + u_2 + \cdots) = du_1 + du_2 + \cdots.$$

Beweis. Es ſei $u_1 = f_1x$, $u_2 = f_2x$ u. ſ. w., ſo ist (nach 430)

$$f_1(x + qdx) = u_1 + q(du_1 + N_1),$$

wo N_1 mit q zugleich null wird, und ſo für jeden andern Index. Alſo

$$\overline{\sum f_\alpha(x + qdx)} = \overline{\sum u_\alpha + q(d_x u_\alpha + N_\alpha)}.$$

Alſo ist

$$\frac{\overline{\sum f_\alpha(x + qdx) - u_\alpha}}{q} = \overline{\sum d_x u_\alpha + N_\alpha}$$

$$= \overline{\sum d_x u_\alpha} + \overline{\sum N_\alpha}.$$

Da nun $N_1, N_2, \cdots$ mit q null werden, wie gezeigt, ſo wird auch (nach 421) ihre Summe $\overline{\sum N_\alpha}$ mit q null, alſo

$$\frac{\overline{\sum f_\alpha(x + qdx) - u_\alpha}}{q} (q = 0) = \overline{\sum d_x u_\alpha}.$$

Hosted by Google

Die linke Seite ist aber $d_x \sum \overline{f_\alpha x} = d_x \sum \overline{u_\alpha}$, also

$$d_x \sum \overline{u_\alpha} = \sum \overline{d_x u_\alpha},$$

oder da die Formel für jeden Index x gilt,

$$d \sum \overline{u_\alpha} = \sum \overline{du_\alpha}.$$

433. Wenn y und z beliebige Funktionen von x sind, und [yz] ein beliebiges Produkt derselben ist, so ist (vorausgesetzt, dass dy und dz stetig sind)

$$d[yz] = [dy \cdot z] + [y \cdot dz].$$

Beweis. Es sei $y = fx$, $z = Fx$, so ist (nach 430)

$$f(x + qdx) = y + q(dy + N),$$
$$F(x + qdx) = z + q(dz + N'),$$

wo N und N′ mit q zugleich null werden. Somit ist

$$d_x[yz] = \frac{[f(x + qdx) \cdot F(x + qdx)] - [yz]}{q} (q = 0)$$
$$= [y \cdot (d_x z + N')] + [(d_x y + N)z] \text{ für } q = 0,$$

oder (nach 429) mit Weglassung des Index,

$$d[yz] = [y \cdot dz] + [dy \cdot z] + [y \cdot N'] + [N \cdot z] \text{ für } q = 0.$$

Da nun N und N′ mit q null werden, so wird (nach 421) auch $[y \cdot l]N' + [l \cdot z]N$, wo l eine Lücke, in welche N eintreten soll, bezeichnet, mit q null, d. h. $[y \cdot N'] + [N \cdot z]$ wird mit q null, also ist

$$d[yz] = [y \cdot dz] + [dy \cdot z].$$

434. Wenn y aus seinen normalen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die Zahlgrössen $y_1, y_2, \cdots$ ableitbar ist, und $y_1, y_2, \cdots$ Funktionen einer beliebigen Variabeln x sind, so ist (vorausgesetzt, dass $dy_1, dy_2, \cdots$ stetig sind)

$$dy = e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots$$

Beweis. Da $y = e_1 y_1 + e_2 y_2 +$ ist (nach Hyp.), so ist

$$dy = d(e_1 y_1) + d(e_2 y_2) + \cdots \quad [432]$$
$$= e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots \quad [433, 431 \text{ c.}].$$

Anm. Hierdurch lässt sich das Differenzial einer extensiven Funktion auf die Differenziale von Zahlfunktionen zurückführen.

§. 2. Differenzialquotient erster Ordnung.

435. Erklärung. Unter $\frac{d}{dx} fx$ oder unter $f'x$ verstehe ich (vorausgesetzt dass $d_x fx$ stetig sei), den Ausdruck, welcher,

Hosted by Google

mit jeder Grösse dx (die mit x von gleicher Gattung ist) multiplicirt, $d_x fx$ liefert, d. h. welcher der Gleichung

$$\frac{d}{dx}fx \cdot dx = f'x \cdot dx = d_x fx = \left[\frac{f(x+qdx) - fx}{q}\right](q = 0)$$

genügt. Ich nenne $\frac{d}{dx}fx$ den nach x genommenen Differenzialquotienten erster Ordnung von fx, und f'x die erste abgeleitete Funktion von fx.

436. Erkl. Wenn man die Differenzialquotienten einer Funktion $u = f(x, y, \cdots)$ mehrerer Veränderlichen x, y, $\cdots$ auf die Weife bildet, dass man jedesmal den Differenzialquotienten nach einer diefer Veränderlichen nimmt, während man dabei die übrigen Veränderlichen wie Konstante behandelt, fo nenne ich die fo hervorgehenden Differenzialquotienten die zu dem Vereine der Veränderlichen x, y, $\cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten, und bezeichne dann den in diefem Sinne nach x genommenen Differenzialquotienten mit

$$\frac{d}{dx}u, \text{ oder } \frac{d}{dx}f(x, y, \cdot\cdot)$$

u. f. w.

Anm. Es ist bei den partiellen Differenzialquotienten unumgänglich nothwendig (worauf schon Jacobi in Crelle's Journal B. 22 S. 321 aufmerksam gemacht hat) den zugehörigen Verein der Veränderlichen anzugeben, alfo nicht bloss diejenige Veränderliche zu nennen, nach welcher der Differenzialquotient genommen werden foll, fondern auch diejenigen, welche bei der Bildung desfelben als Konstante behandelt werden follen. Denn wenn z. B. eine Gleichung zwischen x und y hervortritt, fo lässt fich die Anzahl der Veränderlichen um eine vermindern; schafft man z. B. x weg, fo bleiben nur y, z, $\cdots$ übrig; und betrachtet man jetzt diefe als den Verein der Veränderlichen bildend, fo gewinnt $\frac{d}{dy}u$ jetzt eine ganz andere Bedeutung und im Allgemeinen einen ganz andern Werth als vorher. Aber es würde fehr unbequem fein, wenn man den ganzen Verein der Variabeln, zu welchem die partiellen Differenzialquotienten gehören, mit in die Bezeichnung derfelben aufnehmen wollte. Man beugt allen Verwechselungen vor, wenn man den Verein der Veränderlichen jedesmal angiebt, und wenn man, fobald in einer zufammenhängenden Darstellung bei der Differenziation nach derfelben Variabeln, z. B. nach x, das eine Mal andere Grössen als konstant behandelt werden follen, als das andere Mal, ein neues,

Hosted by Google

im Uebrigen willkürliches Zeichen statt $\frac{d}{dx}$ fetzt, hat man dann die Bedeutung dieſes Zeichens angegeben, ſo iſt eine Verwechſelung unmöglich. Die allgemeine Bezeichnung durch $\frac{d}{dx}u$, welche ich für die partiellen Differenzialquotienten nach x gewählt habe, bedarf, obwohl ſie ungebräuchlich iſt, wohl kaum einer Rechtfertigung, indem ſie, ohne willkürlich zu ſein, äusserst bequem ist, und eine ſo ungehinderte Verwendung gestattet, wie keine andere.

437. Wenn $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$ ſind, und $\delta_1 fx$, $\delta_2 fx, \cdots$ die nach x_1, $x_2, \cdots$ genommenen Differenzialquotienten von x, welche zu dem Vereine der Veränderlichen x_1, $x_2 \cdots$ gehören, bezeichnen, ſo iſt (vorausgeſetzt, dass $d_x fx$ stetig ist)

$$d_x fx = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

Beweis 1. Es ſeien die normalen Einheiten e_1, $e_2, \cdots$ in zwei Gruppen zerlegt, und y aus der einen Gruppe, z aus der andern numerisch abgeleitet, und zwar ſo, dass $x = y + z$ ſei, ſo zeige ich, dass $d_x fx = d_y fx + d_z fx$ ſei, wo bei den durch d_y, d_z bezeichneten Differenziationen y und z als den Verein der Variabeln bildend gedacht ſind. In der That, es ſei dy aus denſelben Einheiten ableitbar wie y, und dz aus denſelben wie z, und ſei $dy + dz = dx = e_1dx_1 + e_2dx_2 + \cdots$. Nun ist (nach Hypotheſis) $d_x fx$ stetig, d. h. es ist $\left[\frac{f(x+qdx)-fx}{q}\right]$ für jeden Werth dx (der aus e_1, $e_2, \cdots$ ableitbar ist) in $q = 0$ und in x stetig, alſo auch, wenn man dy statt dx ſetzt, d. h. es ist $\frac{f(x+qdy)-fx}{q}$ in $q = 0$ und in x stetig ferner ist

$$\frac{f(x+qdy)-fx}{q} = \frac{f(y+qdy+z)-f(y+z)}{q} = d_{y,q}fx,$$

alſo ist $d_y fx$ von $d_{y,q}fx$ verschieden um eine Grösse N, die mit q null wird, ſomit

$$d_y fx = \frac{f(x+qdy)-fx}{q} + N$$

und ebenſo

$$d_z fx = \frac{f(x+qdz)-fx}{q} + N_1,$$

wo N und N_1 mit q null werden, und die ersten Glieder in

Hosted by Google

$q = 0$ und in x stetig ſind. Wenn nun eine Funktion φx in x stetig ist, ſo heisst das (nach 425), es konvergire $\varphi(x + qdx)$, wo dx eine beliebige Grösse, die mit x von gleicher Gattung ist, und q eine reelle Zahl bedeutet, um $q = 0$ nach einem Werthe zu, den es in $q = 0$ erreicht, d. h. es lasse ſich $\varphi(x + qdx)$ in der Form $\varphi x + N_2$ darstellen, wo N_2 mit q null wird. Wenden wir dies auf $d_y fx$ an, und ſetzen, da in $\varphi(x + qdx)$ das dx willkürlich war, dafür das obige dz, ſo erhalten wir

$$d_y fx = \frac{f(x + qdz + qdy) - f(x + qdz)}{q} + N + N_2.$$

Hier ist $qdz + qdy = q(dz + dy) = qdx$, da wir oben $dy + dz = dx$ ſetzten, alſo

$$d_y fx + d_z fx = \frac{f(x+qdx) - f(x+qdz) + f(x+qdz) - fx}{q} + N + N_1 + N_2.$$

Hier hebt ſich das zweite und dritte Glied im Zähler, und da $N + N_1 + N_2 = N$ (nach 421) mit q null wird, ſo erhalten wir

$$d_y fx + d_z fx = \frac{f(x + qdx) - fx}{q} + N,$$

wo N mit q null wird, alſo

$$d_y fx + d_z fx = d_x f(x).$$

2. Da man nun ebenſo, wie man x in y und z zerlegte, wieder y oder z zerlegen kann, ſo gilt der Satz auch für beliebig viele Stücke, in die man x in der Art zerlegen kann, dass jedes Stück aus einer Gruppe der Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ numerisch abgeleitet ist, und die verschiedenen Gruppen keine gleichen Einheiten enthalten; alſo namentlich, wenn $x_1 e_1 = y_1$, $x_2 e_2 = y_2, \cdots$ und demgemäss $dy_1 = e_1 dx_1$, $dy_2 = e_2 dy_2, \cdots$ ist, ſo ist

$$d_x fx = d_{y_1} fx + d_{y_2} fx + \cdots,$$

wo die durch d_{y_1} u. ſ. w. bezeichneten partiellen Differenziale ſich auf den Verein der Veränderlichen $y_1, y_2, \cdots$ beziehen.

3. Nun ist

$$d_{y_1} fx = \left[\frac{f(x + qdy_1) - fx}{q}\right] (q = 0).$$

Aber $f(x + qdy_1) = f(x + qe_1 dx_1) = f(x_1 e_1 + z + qe_1 dx_1)$,

Hosted by Google

wenn der Kürze wegen $x_2e_2 + x_3e_3 + \cdots$ mit z bezeichnet wird, alſo iſt $f(x + qdy_1) = f[e_1(x_1 + qdx_1) + z]$, alſo

$$d_y fx = \frac{f[e_1(x_1 + qdx_1) + z] - f(e_1x_1 + z)}{q} \quad (q=0)$$

$$= d_{x1}fx = \frac{d}{dx_1}fx \cdot dx_1 \qquad \text{[nach 436]}$$

$$= \delta_1 fx_1 dx_1,$$

und ebenſo für die übrigen Indices. Setzt man dieſe Werthe in die vorhergefundene Gleichung ein, ſo erhält man

$$d_x fx = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

438. Wenn $d_x fx$ ſtetig iſt, ſo iſt $\frac{d}{dx}fx$ oder $f'x$ ein von dx unabhängiger Quotient, und zwar, wenn $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $dx = e_1x_1 + e_2x_2 + \cdots$ ſind, ſo iſt

$$f'x \cdot e_r = \frac{d}{dx_r}fx = \delta_r fx$$

und

$$f'x = \frac{\delta_1 fx, \delta_2 fx, \cdots}{e_1, e_2, \cdots},$$

wo $\delta_1, \delta_2, \cdots$ oder $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \cdots$ die zu dem Verein der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \cdots$ bezeichnen.

Beweis. Wenn x eine Zahlgröſſe iſt, ſo iſt (nach 428) auch dx eine Zahlgröſſe und

$$\frac{d_{x,q}fx}{dx} = \frac{f(x + qdx) - fx}{qdx} = \frac{f(x + q') - fx}{q'},$$

wenn man qdx mit q' bezeichnet. Nun wird q' mit q null, alſo iſt

$$\frac{d_x fx}{dx} = \frac{d_{x,0}fx}{dx} = \left[\frac{f(x + q') - fx}{q'}\right](q' = 0),$$

alſo da (nach Hyp.) $d_x fx$, alſo auch $\frac{d_x fx}{dx}$ (wenn $dx \gtrless 0$ iſt) ſtetig iſt, ſo iſt auch $\frac{f(x + q') - fx}{q'}$ in $q = 0$ ſtetig, d. h. (nach 427) es konvergirt dieſer Ausdruck, wenn x konſtant iſt, um $q' = 0$ nach einem konſtanten (von q' unabhängigen)

Hosted by Google

Werthe, welchen er in $q' = 0$ erreicht; diefer Werth ist alfo bei variablem x eine blosse Funktion von x, unabhängig von q', d. h. von qdx. Es fei diefe Funktion φx, fo ist

$$d_x fx = \varphi x \cdot dx,$$

alfo ist φx die Grösse, welche mit jedem dx multiplicirt, $d_x fx$ liefert, d. h. (nach 435) $\varphi x = \frac{d}{dx} fx$, alfo ist $\frac{d}{dx} fx$ von dx unabhängig.

2. Es fei $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$, fo ist (nach 437)

$$d_x fx = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots,$$

wo δ_1, $\delta_2, \cdots$ die im Satze angegebene Bedeutung haben. Nun ist f'x (nach 435) der Ausdruck, welcher mit jedem $dx = e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots$ multiplicirt $d_x fx$ giebt, alfo hat man

$$f'x(e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots) = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots,$$

alfo

$$f'x \cdot e_1 dx_1 + f'x \cdot e_2 dx_2 + \cdots = \delta_1 fx \cdot dx_1 + \delta_2 fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

Nun find nach Bew. 1 die Grössen $\delta_1 fx$, $\delta_2 fx, \cdots$ blosse Funktionen von x, alfo von dx_1, $dx_2, \cdots$ unabhängig; d. h. für jeden Werth x ist die rechte Seite obiger Gleichung eine Summe von Produkten der variabeln Zahlgrössen dx_1, $dx_2, \cdots$ mit Grössen, welche bei unverändertem x fich nicht ändern; alfo muss auch die linke Seite von gleicher Form, und müssen die entsprechenden Koefficienten gleich fein, d. h. es ist

$$f'x e_1 = \delta_1 fx, \quad f'x e_2 = \delta_2 fx, \cdots$$

und f'x ist als derjenige Ausdruck bestimmt, welcher, mit e_1, $e_2, \cdots$ einzeln multiplicirt, beziehlich die Werthe $\delta_1 fx$, $d_2 fx, \cdots$ liefert, d. h. (nach 377) es ist

$$f'x = \frac{\delta_1 fx, \ \delta_2 fx, \cdots}{e_1, \quad e_2, \cdots}.$$

Anm. Hierdurch ist die Differenziation nach einer extenfiven Grösse x auf die partiellen Differenzialquotienten nach Zahlgrössen zurückgeführt, während in 434 das Differenzial der extenfiven Funktion auf die Differenziale von Zahlfunktionen zurückgeführt war, wodurch alfo die Reduktion des nach einer extenfiven Grösse genommenen Differenzialquotienten einer extenfiven Funktion auf die nach Zahlgrössen genommenen Differenzialquotienten von Zahlfunktionen vollendet ist.

Hosted by Google

439. Wenn z eine beliebige endliche Grösse, welche mit x von gleicher Gattung ist, und q wie bisher eine reelle Zahlgrösse bezeichnet, ſo ist

$$f(x + qz) = fx + q(zf'x + N),$$

wo N mit q null wird (und vorausgeſetzt ist, dass $d_x fx$ stetig ist).

Beweis. Es ist für jede endliche Grösse dx, welche mit x von gleicher Gattung ist, (nach 430)

$$f(x + qdx) = fx + q(d_x fx + N),$$

wo N mit q null wird. Es ist aber dann (nach 435) $d_x fx = dx \cdot f'x$, alſo

$$f(x + qdx) = fx + q(dx \cdot f'x + N);$$

da aber z nach der Vorausſetzung dieſelbe Bedeutung hat wie dx, ſo können wir auch jenes für dieſes ſetzen und erhalten die zu erweiſende Gleichung.

440. Es ist

$$dfy = f'y \cdot dy = \frac{d}{dy} fy \cdot dy = d_y fy$$

auch dann, wenn y wieder Funktion einer beliebigen Grösse ist, auf welche ſich die durch das vorgeſetzte Zeichen d dargeſtellte Differenziation bezieht (vorausgeſetzt, dass dy und dfy stetig ſind).

Beweis. Es beziehe ſich die Differenziation auf x und ſei $y = \varphi x$, ſo ist (nach 430)

$$(*) \quad \varphi(x + qdx) = y + q(dy + N),$$

wo N mit q null wird und

$$dfy = df(\varphi x) = \frac{f[\varphi(x + qdx)] - fy}{q} (q = 0) \quad [429]$$

$$= \frac{f[y + q(dy + N)] - fy}{q} (q = 0) \quad [*]$$

$$= \frac{fy + q[(dy + N)f'y + N'] - fy}{q} (q = 0) \quad [439],$$

wo N' mit q null wird,

$$= f'y(dy + N) + N' \text{ für } q = 0,$$

da nun N und N' mit q null werden, ſo wird (nach 421) auch f'yN + N' mit q null, und alſo ist

$$dfy = f'y \cdot dy.$$

Hosted by Google

441. Wenn x und $y = fx$ aus den n urſprünglichen Einheiten $e_1, e_2, \cdots e_n$ numerisch ableitbar ſind, und

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$
$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$$

ist, und $d_x y$ stetig ist, ſo ist der Potenzwerth des Quotienten $\frac{d}{dx}y$ gleich der Funktionaldeterminante von $y_1, y_2, \cdots$ nach $x_1, x_2, \cdots$, d. h. gleich der Determinante, welche aus den partiellen Differenzialquotienten der Funktionen $y_1, y_2, \cdots$ nach den Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ gebildet wird, d. h.

$$[f'x]^n = \left[\frac{d}{dx}y\right]^n = \sum \mp \frac{d}{dx_1}y_1 \cdot \frac{d}{dx_2}y_2 \cdot \cdots \frac{d}{dx_n}y_n,$$

wo für jeden Index r von 1 bis n, das Zeichen $\frac{d}{dx_r}$ den partiellen Differenzialquotienten bezeichnet, welcher nach x_r ſo genommen ist, dass alle übrigen unter den Variabeln $x_1, \cdots x_n$ (ausser x_r) bei der Differenziation als konstant geſetzt ſind.

Beweis. Es ist, wenn das Zeichen $\frac{d}{dx_r}$ der Kürze wegen durch δ_r erſetzt wird, (nach 438)

$$f'x = \frac{\delta_1 y,\ \delta_2 y, \cdots, \delta_n y}{e_1,\ e_2, \cdots,\ e_n},$$

alſo (nach 383) der Potenzwerth

$$[f'x]^n = [\delta_1 y \cdot \delta_2 y \cdots \delta_n y].$$

Aber da $y = e_1y_1 + e_2y_2 + \cdots$ ist, ſo ist (nach 434) $\delta_1 y = e_1\delta_1 y_1 + e_2\delta_1 y_2 + \cdots$, alſo

$$[f'x]^n = [(e_1\delta_1 y_1 + e_2\delta_1 y_2 + \cdots)(e_1\delta_2 y_1 + e_2\delta_2 y_2 + \cdots)\cdots (e_1\delta_n y_1 + e_2\delta_n y_2 + \cdots)]$$
$$= \sum \mp \delta_1 y_1 \cdot \delta_2 y_2 \cdot \cdots \cdot \delta_n y_n \qquad [63],$$

indem nämlich $[e_1e_2 \cdots e_n]$ (nach 94) gleich 1 ist.

Anm. Der Begriff der Funktionaldeterminante, wie er von Jacobi in Crelle's Journal, Bd. 22, p. 319ff., zuerſt aufgeſtellt wurde, tritt hier als Potenzwerth der abgeleiteten Funktion in ſeiner wahren Bedeutung hervor; und die dort nachgewieſenen Sätze ergeben ſich aus dieſer Bedeutung aufs leichteſte; ich überlasse dieſe Ableitung daher dem Leſer.

442. Wenn u eine beliebige Funktion der veränderlichen Grössen x, y, $\cdots$ ist, ſo ist

Hosted by Google

$$du = \frac{d}{dx}u \cdot dx + \frac{d}{dy}u \cdot dy + \cdots$$
$$= d_x u + d_y u + \cdots,$$

wo $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\cdots$ die zu dem Verein der Veränderlichen x, y, $\cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten und d_x, d_y, $\cdots$ in demfelben Sinne die partiellen Differenziale bezeichnen (und die letzteren als ſtetig vorausgeſetzt ſind).

Beweis. Es ſei x aus ſeinen normalen Einheiten durch die veränderlichen Zahlgrössen $x_1, x_2, \cdots$, ebenſo y aus ſeinen normalen Einheiten durch die veränderlichen Zahlgrössen $y_1, y_2, \cdots$ ableitbar u. ſ. w. Man bilde nun ein neues System normaler Einheiten $e_1, e_2, \cdots, f_1, f_2, \cdots, \cdots$, und ſetze $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + \cdots$, ſo wird u (nach 352) eine Funktion der einzigen Variabeln v und man erhält (nach 437)

$$d_v u = \frac{d}{dx_1}u \cdot dx_1 + \frac{d}{dx_2}u \cdot dx_2 + \cdots + \frac{d}{dy_1}u \cdot dy_1$$
$$+ \frac{d}{dy_2}u \cdot dy_2 + \cdots + \cdots,$$

wo $\frac{d}{dx_1}$ u. ſ. w. ſich auf den Verein der Variabeln $x_1, x_2, \cdots y_1, y_2, \cdots, \cdots$ beziehen. Da u eine Funktion von v iſt, ſo können wir (nach 429) ſtatt $d_v u$ auch du ſchreiben. Ferner iſt, wenn man y, z, $\cdots$, d. h. $y_1, y_2, \cdots z_1, z_2, \cdots, \cdots$ konſtant ſetzt (nach 437)

$$\frac{d}{dx}u \cdot dx = \frac{d}{dx_1}u \cdot dx_1 + \frac{d}{dx_2}u \cdot dx_2 + \cdots, \text{ und ebenſo}$$
$$\frac{d}{dy}u \cdot dy = \frac{d}{dy_1}u \cdot dy_1 + \frac{d}{dy_2}u \cdot dy_2 + \cdots$$

u. ſ. w. Alſo

$$du = \frac{d}{dx}u \cdot dx + \frac{d}{dy}u \cdot dy + \cdots.$$

§. 3. Differenziale höherer Ordnung.

443. Erklärung. Wenn u eine beliebige Funktion iſt, und δ und δ_1 zwei beliebige Differenzzeichen ($d_{x,q}$, $d_{y,q}$)

Hosted by Google

oder Differenzialzeichen (d_x, d_y) ſind, bei denen ſich jedoch die Differenziation auf ein und denſelben Verein von Variabeln bezieht, deren Differenziale bei jeder Differenziation konſtant geſetzt werden, ſo verſtehe ich unter $\delta\delta_1 u$ den Ausdruck $\delta(\delta_1 u)$, und nenne $\delta\delta_1$ in dieſem Sinne ein Produkt von Differenzzeichen; und halte dieſe Bestimmung auch dann noch feſt, wenn δ_1 ein Produkt von Differenzzeichen iſt, d. h. ich ſetze

$$\delta\delta_1 u = \delta(\delta_1 u)$$
$$\delta\delta_1\delta_2 u = \delta(\delta_1\delta_2 u) = \delta(\delta_1(\delta_2 u))$$
u. ſ. w.,

wo δ, δ_1, δ_2, $\cdots$ ſich auf denſelben Verein von Variabeln beziehen, deren Differenziale konſtant geſetzt werden.

444. Erklärung. Wenn δ ein beliebiges Differenzzeichen ($d_{x,q}$) iſt, ſo ſetze ich

$$\delta^0 u = u$$
$$\delta^{n+1} u = \delta\delta^n u,$$

letzteres jedoch nur, wenn $n + 1$ eine ganze poſitive Zahl iſt.

Anm. Es lässt ſich auch dem negativen Exponenten eine Bedeutung beilegen, was jedoch erſt in der Integralrechnung klar werden kann.

445. Es iſt

(a) $$d_{x,q} d_{y,q} f(x,y) = \frac{f(x+qdx, y+qdy) - f(x+qdx, y) - f(x, y+qdy) + fx}{q^2}$$

auch wenn $f(x,y)$ noch andere Veränderliche enthält, welche aber alle bei der Differenziation konſtant geſetzt werden, und ebenſo iſt

(b) $$d_{x,q} d_{y,q} u = d_{y,q} d_{x,q} u.$$

Beweis. Es iſt (nach 443)

$$d_{x,q} d_{y,q} f(x,y) = d_{x,q}[d_{y,q} f(x,y)] = d_{x,q} \frac{f(x, y+qdy) - f(x,y)}{q} \qquad [435]$$

und dies nach demſelben Satze

$$= \frac{f(x+qdx, y+qdy) - f(x+qdx, y) - f(x, y+dy) + f(x,y).}{q^2}$$

Hosted by Google

Alſo Formel a erwieſen. Aber aus dieſer Formel folgt ſogleich, dass $d_{y,q}d_{x,q}f(x, y)$ denſelben Ausdruck liefert, wie $d_{x,q}d_{y,q}f(x, y)$, alſo auch Formel b erwieſen.

Anm. Man hätte auch das zu y gehörige q von dem zu x gehörigen verſchieden ſetzen und jenes etwa mit q_1 bezeichnen können, ſo wären die Formeln noch beſtehen geblieben, eine Verallgemeinerung, die jedoch ohne beſonderen Nutzen iſt.

446. Die Ordnung der auf einander folgenden Differenzzeichen ($d_{x,q}$ u. ſ. w.), unter denen die Differenzialzeichen mit einbegriffen ſind, iſt gleichgültig für das Reſultat.

Beweis. Denn nach 445 b laſſen ſich je zwei auf einander folgende Differenzzeichen vertauſchen.

447. Wenn ein höheres Differenzial ſtetig iſt, ſo ſind auch die niederen Differenziale, durch deren fortſchreitende Differenziation jenes entſtanden iſt, ſtetig.

Beweis. Es ſei u ein beliebiges Differenzial, und ſei $d_x u$ ſtetig. Es wird u im Allgemeinen eine Funktion der Variabeln x, y, ·· und ihrer Differenziale ſein. Allein da bei der Differenziation nach x alle übrigen Variabeln und ſämmtliche Differenziale als konſtante behandelt werden, ſo genügt es für dieſe Differenziation, u als bloſſe Funktion von x zu betrachten. Es ſei in dieſem Sinne $u = fx$, ſo iſt

$$d_x u = \left[\frac{f(x + qdx) - fx}{q}\right] (q = 0).$$

Da nun $d_x u$ ſtetig iſt, ſo muſs der in Klammer geſchloſſene Bruch um $q = 0$ nach einer beſtimmten endlichen Gränze konvergiren, die es in $q = 0$ erreicht, alſo muſs mit dem Nenner (q) auch der Zähler null werden, d. h. $f(x + qdx) - fx$ muſs mit q null werden, d. h. (nach 425) fx iſt in x ſtetig, alſo auch u. Durch Fortſetzung dieſer Schluſsweiſe gelangt man zu dem allgemeinen Reſultate des Satzes.

448. Es iſt, wenn A einen Ausdruck mit n Lücken von der Gattung x bezeichnet,

$$d_x^m(Ax^n) = \frac{n!}{(n-m)!}Ax^{n-m}dx^m.$$

Beweis 1. Der Satz gilt (nach 431) für $m = 1$.

2. Wenn nun der Satz für irgend einen Werth m gilt, ſo gilt er auch für $m + 1$; denn dann iſt

Hosted by Google

$$d_x^{m+1}(Ax^n) = d_x(d_x^m Ax^n) \qquad [448]$$
$$= d_x\left[\frac{n!}{(n-m)!}Ax^{n-m}dx^m\right],$$

da nach der Annahme der Beweis für den angenommenen Werth m gilt; da nun (nach 443) dx bei der Differenziation als konstant betrachtet werden ſoll, und es mit x von gleicher Gattung ist, ſo ist $\frac{n!}{(n-m)!}Adx^m$ ein Ausdruck mit $n-m$ Lücken, folglich erhalten wir (nach 431) den zuletzt gefundenen Ausdruck

$$= \frac{(n-m)n!}{(n-m)!}Adx^m x^{n-m-1}dx$$
$$= \frac{n!}{(n-m-1)!}Ax^{n-m-1}dx^{m+1},$$

d. h. der Satz gilt dann auch, wenn man $m+1$ statt m ſetzt; da er nun (nach Bew. 1) für $m=1$ gilt, ſo gilt er auch für $m=2$, und weil für $m=2$, ſo auch für $m=3$, alſo für alle poſitiven Werthe.

449. Wenn $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$ ſind, und $\delta_1, \delta_2, \cdots$ die zu dem Vereine der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \cdots$ bezeichnen, ſo ist (vorausgeſetzt, dass $d_x^n u$ stetig ſei)

$$d_x^n u = \sum \delta_a \delta_b \cdots u \cdot dx_a \cdot dx_b \cdots,$$

wo die Anzahl der Faktoren $dx_a dx_b \cdots$ in jedem Gliede n ist, und die Summe ſich auf alle unter dieſer Bedingung möglichen ganzen poſitiven Werthe $a, b, \cdots$ bezieht.

Beweis. Nach 437 ist

$$d_x u = \sum \delta_a u \cdot dx_a.$$

Differenzirt man noch einmal nach x, ſo ist, da bei dieſer Differenziation (nach 443) dx, alſo auch $dx_1, dx_2, \cdots$ konstant zu ſetzen ſind, (nach 437)

$$d_x^2 u = \sum \delta_b \delta_a u \cdot dx_a dx_b = \sum \delta_a \delta_b u \cdot dx_a dx_b \qquad [446]$$

u. ſ. w.

450. Erklärung. Unter $\frac{d^n}{dx^n}fx$ oder unter $f^{(n)}x$ ververſtehe ich (vorausgeſetzt, dass $d_x^n fx$ stetig ist) den Aus-

Hosted by Google

druck, welcher mit dx^n multiplicirt, was auch dx für eine mit x gleichgattige Grösse fein mag, $d_x^n fx$ liefert.

451. Wenn $d_x^n fx$ stetig ist, so ist $f^{(n)}x$ derjenige Ausdruck mit je n Lücken (in jedem Gliede), welcher die Eigenschaft hat, dass

$$(a)\quad f^{(n)}x(e_r e_s \overset{n}{\smile} \cdots) = \delta_r \delta_s \cdots fx$$

ist, für jede Reihe von n Indices r, s, $\cdots$, wobei die Bedeutung von $e_1, e_2, \cdots, \delta_1, \delta_2, \cdots$, dieselbe ist, wie in 449.

Beweis. Nach 450 ist zu zeigen, dass allemal $f^{(n)}x \cdot dx^n = d_x^n fx$ ist, wenn $f^{(n)}x$ der Gleichung (a) genügt. Es ist dann

$$f^{(n)}x dx^n = f^{(n)}x(e_1 dx_1 + e_2 dx_2 + \cdots)^n$$

$$= \sum f^{(n)}x(e_\alpha e_\beta \overset{n}{\smile} \cdots) dx_\alpha dx_\beta \cdots$$

nach dem allgemeinen polynomischen Lehrsatze (oder auch nach 45)

$$= \sum \delta_\alpha \delta_\beta \cdots fx \cdot dx_\alpha dx_\beta \cdots \qquad [a]$$

$$= d_x^n fx \qquad [449].$$

452. Erklärung. Wenn x, y, $\cdots$ Zahlgrössen und u eine Funktion derselben ist, so verstehe ich, wenn $a + b + \cdots = n$ ist, unter $\frac{d^n}{dx^a dy^b \cdots} u$ den Ausdruck

$$\frac{d^n}{dx^a dy^b \cdots} u = \frac{d_x^a d_y^b \cdots u}{dx^a dy^b \cdots},$$

wo sich die Differenziationen auf den Verein der Variabeln x, y, $\cdots$ beziehen, und dx, dy, $\cdots$ von Null verschieden angenommen sind.

Anm. Die partiellen Differenzialquotienten nach verschiedenen extensiven Variabeln können fast überall entbehrt werden, da man mehrere extensive Variabeln stets auf eine einzige zurückführen kann (nach 352).

453. Wenn y noch wieder Funktion einer beliebigen Veränderlichen ist, so ist (die Stetigkeit der vorkommenden Differenziale vorausgesetzt)

$$\frac{d^n fy}{n!} = \sum \frac{f^{(r)}y}{r!} \cdot \left(\frac{d^a y}{a!} \cdot \frac{d^b y}{b!} \cdots \overset{r}{\smile} \right) (a + b + \cdots = n).$$

Beweis. Wie in der gewöhnlichen Analysis.

Hosted by Google

Kap. 3. Unendliche Reihen.

§. 1. Die unendlichen Reihen im Allgemeinen.

454. Erklärung. Eine Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ heisst ächt, wenn ſich eine poſitive Zahl $T > 1$ finden lässt von der Art, dass u_0, $u_1 T$, $u_2 T^2, \cdots$ bis ins Unendliche hin endlich bleiben, d. h. dass ſie numerisch kleiner bleiben als eine gewisse endliche Grösse M, ſo dass alſo

$$u_r T^r \text{ num.} < M$$

bleibt für jeden Index r.

455. Zuſatz. Setzen wir $\frac{1}{T} = t$, ſo können wir die Bedingung der Aechtheit auch ſo ausdrücken, dass ſich zwei poſitive Zahlen t und M, von denen $t < 1$ ist, finden lassen, ſo dass stets

$$u_r : t^r \text{ num.} < M$$

bleibe.

456. Jede ächte Reihe ist konvergent.

Beweis. Es ſei $R = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ eine ächte Reihe, ſo giebt es (nach 455) eine poſitive Zahl < 1 von der Art, dass, für jeden Index r, $u_r : t^r$, was wir mit a_r bezeichnen wollen, numerisch kleiner als eine gewisse endliche (poſitive) Zahl M ſei; dann wird

$$R = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, \text{ wo } a_r \text{ num.} < M.$$

Der Rest ϱ_n dieſer Reihe von dem Gliede $a_n t^n$ an ist

$$\varrho_n = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots.$$

Nun ist a_r num. $< M$, $a_r t^r$ num. $< M t^r$, alſo (nach 418)

$$\begin{aligned} \varrho_n \text{ num.} &< M t^n + M t^{n+1} + \cdots \\ &\text{num.} < M t^n (1 + t + t^2 + \cdots) \\ &\text{num.} < M \frac{t^n}{1 - t}. \end{aligned}$$

Nun lässt ſich hier n ſo gross wählen, dass ϱ_n num. kleiner wird als eine beliebig gegebene poſitive Grösse k, und auch bleibt, wenn n noch wächst; dies wird nämlich erfüllt, wenn

$$n > \log. \frac{M}{k(1 - t)} : \log. \left(\frac{1}{t}\right)$$

Hosted by Google

ist. Da alſo der Rest ϱ_n mit wachſendem n nach Null zu konvergirt, ſo ist die Reihe konvergent.

Anm. Um die Beziehung zwischen ächten, unächten, konvergenten und divergenten Reihen noch anschaulicher hervortreten zu lassen, will ich hier noch die unächten Reihen berühren. Wenn die ſämmtlichen Glieder einer unächten Reihe endlich bleiben, d. h. numerisch kleiner bleiben als eine endliche poſitive Zahl M, ſo will ich dieſe Reihe eine Uebergangsreihe nennen, wenn dagegen die Glieder einer Reihe unendlich werden, d. h. wenn es zu jeder poſitiven Zahl M Glieder der Reihe giebt, welche noch grösser als M ſind, ſo mag eine ſolche Reihe eine abſurde heissen. So z. B. ist die Reihe $t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots$ eine ächte, wenn der numerische Werth der Zahlgrösse t kleiner als 1 ist; ſie wird eine Uebergangsreihe, wenn t numerisch gleich 1 wird, und zwar eine divergente Uebergangsreihe, wenn $t=1$, eine konvergente, wenn $t=-1$ ist; ſie wird abſurd, wenn t num. >1 wird. Eine ſolche abſurde Reihe ist stets zu verwerfen. Hingegen hat die Uebergangsreihe mit der ächten noch das gemein, dass ſie den Werth der Funktion, welche durch die Reihe dargestellt werden ſoll, wirklich ausdrückt, gleichviel ob ſie konvergirt oder divergirt. Im letzteren Falle zeigt ſie, falls ſie ſich dem Unendlichen nähert, dass für dieſen Fall in der That die Funktion unendlich wird; ſo z. B. ist die obige Reihe bekanntlich die Reihe für $-\log.(1-t)$; dieſe Funktion wird mit $t=1$ unendlich, ebenſo wie die Reihe $t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots$; und dieſe stellt alſo auch für dieſen Fall noch den Werth jener Funktion dar. Oder, um ein einfacheres Beispiel zu wählen, die Reihe $1+t+t^2+\cdots$ wird für $t=\mp 1$ eine Uebergangsreihe; und zwar nimmt ſie für $t=1$, entsprechend der Funktion $\frac{1}{1-t}$, deren Entwickelung ſie darstellt, unendlichen Werth an. — Wenn hingegen die divergente Uebergangsreihe ſich keinem unendlichen Werthe annähert, ſondern stets, wie weit man ſie auch verfolge, zwischen verschiedenen Werthen hin und her schwankt, wie z. B. die Reihe $1+t+t^2+\cdots$ bei dem Werthe $t=-1$, ſo lässt ſich dennoch ihr Werth aus der Gränze bestimmen, nach welcher jene Reihe konvergirt, wenn man t zuerst kleiner als 1 ſetzt und ſich dann t der 1 unbegränzt annähern lässt. Aber alle dieſe Uebergangsreihen, ſelbst wenn ſie konvergiren, dürfen nur mit Vorſicht angewandt werden; da die Rechnungsgeſetze ächter Reihen auf ſie nicht mehr anwendbar ſind.

457. **Wenn a eine beliebige Grösse, b, c, $\cdots$ aber Zahlgrössen ſind, ſo ist der numerische Werth (ϱ) des Produktes ($abc\cdots$) dieſer Grössen, gleich dem Produkte ihrer numerischen Werthe (α, β, γ, $\cdots$); d. h.**

$$\varrho=\alpha\beta\gamma\cdots.$$

Hosted by Google

Beweis 1. Für zwei Grössen. Es seien e_1, e_2, $\cdots$ die reellen, ie_1, ie_2, $\cdots$ ($i = \sqrt{-1}$) die imaginären Einheiten von a und sei $a = \sum \alpha_a e_a + i\gamma_a e_a$, wo die α_a und γ_a alle reell sind und sei $b = \delta + \varepsilon i$, so ist (nach 414) $\alpha^2 = \sum \alpha_a^2 + \gamma_a^2$, $\beta^2 = \delta^2 + \varepsilon^2$. Ferner ist

$$ab = \sum (\delta\alpha_a - \varepsilon\gamma_a)e_a + i(\delta\gamma_a + \varepsilon\alpha_a)e_a, \text{ also}$$
$$\varrho^2 = \sum (\delta\alpha_a - \varepsilon\gamma_a)^2 + (\delta\gamma_a + \varepsilon\alpha_a)^2$$
$$= \sum \delta^2\alpha_a^2 + \varepsilon^2\gamma_a^2 + \delta^2\gamma_a^2 + \varepsilon^2\alpha_a^2$$
$$= (\delta^2 + \varepsilon^2)\sum \alpha_a^2 + \gamma_a^2 = \beta^2\alpha^2,$$

also, da ϱ, α, β positiv sind,

$$\varrho = \alpha\beta, \text{ d. h. ab num.} = \alpha\beta.$$

2. Da nun (nach Bew. 1) ab num. $= \alpha\beta$ ist, so ergiebt sich (nach Bew. 1) abc num. $= \alpha\beta\gamma$ u. s. w.

458. Wenn a und a_1 beliebige Grössen, b, c, $\cdots$ b_1, c_1, $\cdots$ aber Zahlgrössen sind und

$$a \text{ num.} < a_1,\ b \text{ num.} < b_1,\ c \text{ num.} < c_1, \cdots$$

sind, so ist auch

$$abc\cdots \text{ num.} < a_1b_1c_1\cdots.$$

Beweis. Denn es seien α, β, γ, $\cdots$, α_1, β_1, γ_1, $\cdots$ beziehlich die numerischen Werthe von a, b, c, $\cdots$, a_1, b_1, c_1, $\cdots$, so ist (nach 457) $\alpha\beta\gamma\cdots$ der numerische Werth von abc$\cdots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\cdots$ der von $a_1b_1c_1\cdots$. Da aber α, β, γ, $\cdots$, α_1, β_1, γ_1, $\cdots$ positive Zahlen sind und $\alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_1$, $\gamma < \gamma_1$, $\cdots$ ist, so ist auch $\alpha\beta\gamma\cdots < \alpha_1\beta_1\gamma_1\cdots$, d. h. abc$\cdots$ num. $< a_1b_1c_1\cdots$.

Anm. Diese zwei Sätze, welche systematischer nach 419 ständen, sind hier nachgeholt, um sie im Folgenden verwenden zu können.

459. Wenn mehrere Reihen ächt sind, so ist auch ihre Vielfachensumme ächt, d. h. wenn

$$R_1 = u_1 + u_1' + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} + \cdots$$
$$R_2 = u_2 + u_2' + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n = u_n + u_n' + u_n^{(2)} + u_n^{(3)} + \cdots$$

ächte Reihen sind, und α_1, α_2, $\cdots$ α_n beliebige endliche Zahlgrössen sind, so ist auch die Reihe

$$R = u + u' + u^{(2)} + u^{(3)} + \cdots,$$

wo für jeden Zeiger s

Hosted by Google

$$u^{(s)} = \alpha_1 u_1^{(s)} + \alpha_2 u_2^{(s)} + \cdots \alpha_n u_n^{(s)}$$

ist, eine ächte Reihe.

Beweis. Da R_1 eine ächte Reihe ist, fo giebt es (nach 454) zwei pofitive Zahlen T_1 und M_1, von denen die erstere > 1 ist, von der Art, dass für jeden Zeiger s

$$u_1^{(s)} T_1 \text{ num.} < M_1$$

fei. Ebenfo lassen fich für die übrigen Reihen $R_2, \cdots R_n$ folche pofitiven Zahlenpaare $T_2, M_2, \cdots T_n, M_n$ finden, von denen die erste jedes Zahlenpaares > 1, und fo, dass

$$u_2^{(s)} T_2 \text{ num.} < M_2, \cdots u_n^{(s)} T_n \text{ num.} < M_n$$

ist. Es fei T die kleinste der Zahlen $T_1, \cdots T_n$, alfo noch $T > 1$, fo bleibt

$$u_1^{(s)} T \text{ num.} < M_1,\ u_2^{(s)} T \text{ num.} < M_2, \cdots u_n^{(s)} T \text{ num.} < M_n,$$

alfo auch (nach 458), wenn $\beta_1, \cdots \beta_n$ die numerischen Werthe von $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ find,

$$\alpha_1 u_1^{(s)} T \text{ num.} < \beta_1 M_1, \cdots,\ \alpha_n u_n^{(s)} T \text{ num.} < \beta_n M_n;$$

folglich, da die rechten Seiten diefer Vergleichung pofitiv find, fo ist (nach 418)

$$\alpha_1 u_1^{(s)} T + \cdots + \alpha_n u_n^{(s)} T \text{ num.} < \beta_1 M_1 + \cdots + \beta_n M_n,$$

d. h.

$$u^{(s)} T \text{ num.} < M,$$

wenn $\beta_1 M_1 + \cdots \beta_n M_n$ mit M bezeichnet ist; folglich ist die Reihe R (nach 454) eine ächte.

§. 2. Die Reihen als Funktionen einer Zahlgrösse.

460. Der nach der Zahlgrösse x genommene Differenzialquotient einer ächten Reihe $R = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum a_\alpha x^\alpha$ ist wieder eine ächte Reihe.

Beweis 1. Da R eine ächte Reihe ist, fo müssen fich (nach 455) zwei pof. Grössen t und M, von denen die erste < 1 ist, finden lassen, fo dass für jedes r

$$\frac{a_r x^r}{t^r} \text{ num.} < M$$

ist. Nun fei τ eine pofitive Zahl zwischen t und 1, d. h. $\tau > t$ aber < 1, fo zeige ich, dass alle Glieder der Reihe

Hosted by Google

$$\frac{d}{dx}R = \sum \overline{\alpha a_\alpha x^{\alpha-1}}$$

die Eigenschaft haben, dass für jeden Index r bis ins Unendliche hin der Ausdruck $\frac{ra_r x^{r-1}}{\tau^r}$ endlich fei. In der That ist

$$\frac{ra_r x^{r-1}}{\tau^r} = \frac{rt^r}{x\tau^r} \cdot \frac{a_r x^r}{t^r}.$$

Der zweite Faktor ist (nach Hypoth.) numerisch kleiner als M, alfo (nach 459) der ganze Ausdruck

$$\text{num.} < \frac{rt^r}{\tau^r} M_1,$$

wenn wir der Kürze wegen den numerischen Werth von M : x mit M_1 bezeichnen. Nun fei $n > \frac{t}{\tau - t}$, was stets möglich ist, da τ grösser als t, alfo $\tau - t$ ungleich null ist. Dann wird $n > (n+1)\frac{t}{\tau}$, oder, indem wir mit $\frac{t^n}{\tau^n}$ multipliciren,

$$\frac{nt^n}{\tau^n} > \frac{(n+1)t^{n+1}}{\tau^{n+1}}, \text{ und aus gleichem Grunde}$$

$$\frac{(n+1)t^{n+1}}{\tau^{n+1}} > \frac{(n+2)t^{n+2}}{\tau^{n+1}} > \ldots.$$

Nun werden aber die Ausdrücke

$$\frac{t}{\tau}, \frac{2t^2}{\tau^2}, \ldots \frac{nt^n}{\tau^n},$$

da ihre Anzahl endlich ist, und fie alle endliche Werthe haben, kleiner fein als eine gewisse pofitive endliche Grösse; diefe heisse m. Da nun alle Ausdrücke $\frac{rt^r}{\tau^r}$ für jedes r, was grösser als n ist, wie eben bewiefen, kleiner als $\frac{nt^n}{\tau^n}$ find, und dies letztere $< m$ ist, fo werden alle jene Ausdrücke für jeden Werth von r kleiner als m fein, alfo auch

$$\frac{rt^r}{\tau^r} M_1 < mM_1.$$

Hier ist m eine endliche Grösse, aber auch M_1, wenn nicht etwa x gleich null ist, alfo auch mM_1 endlich, alfo auch $\frac{ra_r x^{r-1}}{\tau^r}$ numerisch kleiner als eine endliche Grösse, d. h. die

Hosted by Google

Reihe $\frac{d}{dx}R$ ist eine ächte, vorausgefetzt noch, dass $x \gtrless 0$ ist. Wenn aber $x = 0$ ist, fo ist $\frac{d}{dx}R = a_1$, alfo gewiss eine ächte Reihe.

2. Da nun $\frac{d}{dx}R$ eine ächte Reihe ist, fo ist (nach Beweis 1) auch deſſen Differenzialquotient nach x, d. h. $\frac{d^2}{dx^2}R$ eine ächte Reihe u. f. w.

461. Wenn eine Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ für irgend einen Werth x' der Zahlgrösse x ächt ist, fo ist ſie es auch für jeden Werth der numerisch gleich oder kleiner als x' ist.

Beweis. Denn wenn die Reihe für $x = x'$ ächt ist, fo müssen ſich (nach 454) zwei poſitive Werthe T und M, von denen der erste > 1 ist, angeben lassen, fo dass für jedes r

$$a_r x'^r T^r < M$$

ist. Dann ist aber, wenn x num. $= <$ x' ist,

$$a_r x^r T^r \text{ num.} = < a_r x'^r T^r \qquad [458]$$
$$\text{num.} < M_1,$$

d. h. die Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ ist dann auch eine ächte (nach 454).

Anm. Es folgt hieraus fogleich (nach 360), dass auch die nach x genommenen Differenzialquotienten jener Reihe für jedes x, was numerisch gleich oder kleiner als x' ist, ächte Reihen, alfo auch stetig ſein müssen. Daraus folgt auch umgekehrt, dass wenn eine Funktion fx für irgend einen Werth von x, der numerisch kleiner als x' ist, ſich in einer ächten Reihe foll entwickeln lassen, nothwendig fx und ſeine Differenziale für jeden Werth, der numerisch gleich oder kleiner als x' ist, auch stetig ſein müssen. Und es kommt darauf an, ob dieſe Bedingung der Stetigkeit ausreichend dafür ist, dass ſich fx in einer ächten Reihe entwickeln lasse. Zu dem Ende kommt es darauf an, fx für die verschiedenen numerisch gleichen Werthe zu betrachten, namentlich für eine Reihe ſolcher Werthe, von denen jeder folgende aus dem vorhergehenden durch gleiche circuläre Aenderung hervorgeht. Nun hat Cauchy nachgewieſen, dass, wenn f'x stetig ist, das arithmetische Mittel aller Werthe, welche fx erhält, indem x fortschreitend einer konstanten circulären Aenderung unterworfen wird, bis x wieder zu dem urſprünglichen Werthe zurückkehrt, ein Ausdruck ist, welcher stets nach einer konstanten (von x unabhängigen)

Hosted by Google

Gränze konvergirt, ſobald der Winkel der circulären Aenderung verſchwindend klein wird. Er hat aus dieſem Satze auf eine ſehr ſinnreiche Weiſe die Bedingung abgeleitet, unter welcher eine Funktion fx ſich in einer konvergenten (genauer in einer ächten) Reihe entwickeln lässt, worüber Moigno Leçons de calcul differentiel Tom. 1 p. 150 ss. zu vergleichen ist. Der Gang der folgenden Entwickelung ist im weſentlichen derſelbe, wie er in dem angeführten Werke gewählt ist; doch ist hier die Betrachtung verallgemeinert, in ſofern fx als extenſive Grösse betrachtet wird, während x ſelbst eine Zahlgrösse bleibt.

462. Lehrſatz und Erklärung. Wenn f'x stetig ist für jede Zahlgrösse x, deren numerischer Werth zwischen den Gränzen a und b liegt, und Θ eine n-te Wurzel der abſoluten Einheit und zwar $\Theta = \cos.\frac{2\pi}{n} + i\,\sin.\frac{2\pi}{n}$ ist, ſo konvergirt der Ausdruck

$$\frac{1}{n}\sum f(x\Theta^{\alpha}) = \frac{f(x\Theta) + f(x\Theta^{2}) + \cdots + f(x\Theta^{n})}{n}$$

mit unendlich wachſendem n nach einer konstanten (von x unabhängigen) Gränze. Dieſe konstante Gränze ſei das zu jenem Stetigkeitsgebiete gehörende konstante Glied der Funktion fx genannt und mit C(fx) bezeichnet.

Beweis des Lehrſatzes. Da f'x stetig ist, ſo ist (nach 439)

$$f(x+q) - fx = q(f'x + N),$$

wo N mit q null wird. Da nun Θ^{α} numerisch gleich 1 ist, ſo ist $x\Theta^{\alpha}$ numerisch $= x$, alſo auch $f'(x\Theta^{\alpha})$ stetig. Setzt man nun in die obige Gleichung $x\Theta^{\alpha}$ statt x, und $q = x\Theta^{\alpha}(\Theta - 1)$; ſo verwandelt ſich $x + q$ in $x\Theta^{\alpha+1}$ und wir erhalten, wenn wir noch dem N den Zeiger α beifügen,

$$f(x\Theta^{\alpha+1}) - f(x\Theta^{\alpha}) = x\Theta^{\alpha}(\Theta - 1)[f'(x\Theta^{\alpha}) + N_{\alpha}].$$

Nun ist, wenn wir $\frac{d}{dx}$ mit δ bezeichnen, $\delta f(x\Theta^{\alpha}) = \Theta^{\alpha} f'(x\Theta^{\alpha})$ (nach 440); alſo wird

$$\frac{f(x\Theta^{\alpha+1}) - f(x\Theta^{\alpha})}{x(\Theta - 1)} = \delta f(x\Theta^{\alpha}) + N'_{\alpha},$$

indem wir statt $\Theta^{\alpha}N_{\alpha}$, welches mit N_{α} numerisch gleich ist, alſo, eben ſo wie dies, mit q zugleich null wird, N'_{α} geschrieben haben.

Hosted by Google

Gehen wir nun zum arithmetischen Mittel über, ſo wird, wenn die folgenden Summen von $\alpha = 1$ bis n genommen werden,

$$\frac{1}{nx(\Theta-1)}\sum \overline{f(x\Theta^{\alpha+1}) - f(x\Theta^{\alpha})} = \delta \sum \frac{\overline{f(x\Theta^{\alpha})}}{n} + \frac{1}{n}\sum \overline{N'_{\alpha}}.$$

Die linke Seite ist null; denn die dort erscheinende Summe ist gleich

$$f(x\Theta^{n+1}) + f(x\Theta^{n}) + \cdots + f(x\Theta^{2}) - f(x\Theta^{n}) - \cdots - f(x\Theta^{2}) - f(x\Theta), \text{ alſo } = f(x\Theta^{n+1}) - f(x\Theta) = 0,$$

da $\Theta^{n} = 1$, alſo $x\Theta^{n+1} = x\Theta$ iſt. Somit erhalten wir

$$\delta \sum \frac{\overline{f(x\Theta^{\alpha})}}{n} = -\frac{1}{n}\sum \overline{N'_{\alpha}}.$$

Aber $\frac{1}{n}\sum \overline{N'_{\alpha}}$ iſt das arithmetische Mittel der Grössen $N'_1, N'_2, \cdots$, iſt alſo, wie gross auch n ſei, numerisch kleiner als der grösste numerische Werth dieſer Grössen, den wir mit N' bezeichnen wollen. Wenn nun n unendlich wird, ſo konvergirt $\Theta = \cos.\frac{2\pi}{n} + i\,\sin.\frac{2\pi}{n}$ nach 1, alſo $\Theta - 1$ nach 0, alſo konvergirt auch $q = x\Theta^{\alpha}(\Theta - 1)$, was mit $x(\Theta - 1)$ numerisch gleich iſt, nach 0, alſo auch $N'_1, N'_2, \cdots$, alſo auch N'; alſo auch $\delta \sum \frac{\overline{f(xN^{\alpha})}}{n}$, da ſein numerischer Werth noch kleiner iſt als der von N'. Setzen wir die Gränze, nach welcher $\sum \frac{\overline{f(x\Theta^{\alpha})}}{n}$ konvergirt $= \varphi x$, ſo haben wir alſo

$$\delta\varphi x = 0, \text{ d. h. } \varphi x = \text{Const.}$$

Anm. Ich habe hier den Satz, dass, wenn das Differenzial einer Funktion null bleibt, die Funktion konstant ſei, als bekannt vorausgeſetzt, um hier nicht die Entwickelung zu unterbrechen. Der Beweis dieſes Satzes ist im Eingange des folgenden Kapitels (der Integralrechnung) nachgeholt, und zwar ohne dass in dieſem Beweiſe auf irgend einen Satz des gegenwärtigen Kapitels zurückgegangen ſei.

463. Das konstante Glied einer Vielfachenſumme von Funktionen (deren erste abgeleitete Funktionen stetig ſind), ist die entsprechende Vielfachenſumme aus den konstanten Gliedern der Funktionen, d. h. (wenn $f'_1x, f'_2x, \cdots$ stetig ſind, ſo ist)

$$C[\alpha_1 f_1 x + \alpha_2 f_2 x + \cdots] = \alpha_1 C(f_1 x) + \alpha_2 C(f_2 x) + \cdots.$$

Hosted by Google

Beweis. Wenn Θ dieſelbe Bedeutung wie in 462 hat, ſo iſt $C(f_1x)$ die Gränze, nach welcher $\frac{1}{n}\sum\overline{f_1(x\Theta^a)}$ mit unendlichem n konvergirt, d. h. es verſchwindet $\frac{1}{n}\sum\overline{f_1(x\Theta^a)} - C(f_1x)$ mit $\frac{1}{n}$, ebenſo $\frac{1}{n}\sum\overline{f_2(x\Theta^a)} - C(f_2x)$ u. ſ. w., alſo (nach 421) auch ihre Vielfachenſumme, d. h.

$$\frac{1}{n}\sum\overline{\alpha_1 f_1(x\Theta^a) + \alpha_2 f_2(x\Theta^a) + \cdots} - \alpha_1 C(f_1x) - \alpha_2 C(f_2x) - \cdots,$$

d. h. es konvergirt

$$\frac{1}{n}\sum\overline{\alpha_1 f_1(x\Theta^a) + \alpha_2 f_2(x\Theta^u) + \cdots}$$

nach $\alpha_1 C(f_1x) + \alpha_2 C(f_2x) + \cdots$. Aber die Gränze, nach welcher jener Ausdruck konvergirt, iſt (nach 462) mit $C(\alpha_1 f_1x + \alpha_2 f_2x + \cdots)$ bezeichnet, alſo

$$C(\alpha_1 f_1x + \alpha_2 f_2x + \cdots) = \alpha_1 C(f_1x) + \alpha_2 C(f_2x) + \cdots.$$

464. Wenn m eine ganze Zahl, aber ungleich null iſt, ſo iſt

$$C(x^m) = 0.$$

Beweis. $C(x^m)$ iſt (nach 462) die Gränze, nach welcher $\frac{1}{n}\sum\overline{(x\Theta^a)^m}$ mit unendlich wachſendem n konvergirt. Es iſt aber $\frac{1}{n}\sum\overline{(x\Theta^a)^m} = \frac{x^m}{n}\sum\overline{\Theta^{ma}}$. Nehmen wir n ſo groß an, daſs m num. $<$ n iſt, und ſetzen $\sum\overline{\Theta^{ma}} = s$, ſo iſt

$$s = \Theta^m + \Theta^{2m} + \cdots + \Theta^{nm}$$
$$s = 1 + \Theta^m + \Theta^{2m} + \cdots + \Theta^{(n-1)m},$$

weil $\Theta^{nm} = 1$ iſt. Es geht aber der obere Ausdruck aus dem unteren durch Multiplikation mit Θ^m hervor; alſo haben wir

$$s\Theta^m = s, \text{ d. h. } s(1 - \Theta^m) = 0.$$

Es iſt aber (nach 462) $\Theta = \cos.\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{ſin}.\frac{2\pi}{n}$, alſo $\Theta^m = \cos.\frac{2m\pi}{n} + i\,\mathrm{ſin}.\frac{2m\pi}{n}$; alſo da $\frac{m}{n}$ ein ächter Bruch iſt, ſo iſt $\Theta^m \gtrless 1$, alſo folgt aus der Gleichung $s(1 - \Theta^m) = 0$, daſs

Hosted by Google

s gleich null ist, alſo auch $\frac{x^m}{n}\sum\overline{\Theta^{ma}}=0$, d. h. $\frac{1}{n}\sum\overline{(x\Theta^a)^m}=0$, ſobald $n > m$ ist, alſo die Gränze, nach welcher dieſer Ausdruck mit unendlich wachſendem n konvergirt, 0, d. h. $C(x^m)=0$.

Anm. In dieſen Sätzen liegt der Grund der obigen Benennung, indem, wenn fx eine beliebige (begränzte) Potenzreihe von x mit ganzen poſitiven oder negativen Exponenten und dem konstanten Gliede a ist, C(fx) gleich dieſem konstanten Gliede a ist.

465. Wenn x num. $>$ a ist, ſo ist

$$C\frac{x}{x-a}=1.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{x}{x-a}=1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\cdots+\frac{a^{r-1}}{x^{r-1}}+\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}.$$

Alſo (nach 463)

$$C\frac{x}{x-a}=1+C\left[\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}\right].$$

Nun ist das letzte Glied der rechten Seite (nach 462) numerisch kleiner als der grösste der Ausdrücke, welche aus $\frac{a^r}{x^{r-1}(x-a)}$ hervorgehen, indem man statt x beliebige mit x numerisch gleiche Werthe ſetzt. Der grösste dieſer Ausdrücke ist, wenn A und X die numerischen Werthe von a und x ſind, $=\frac{A^r}{X^{r-1}(X-A)}$. Ist nun p eine beliebige poſitive Grösse, ſo kann man r stets ſo gross wählen, dass $\frac{A^r}{X^{r-1}(X-A)}$ num. $<$ p wird, und auch bleibt, wenn p noch wächst; alſo wird dann

$$C\left[\frac{x}{x-a}\right]-1 \text{ num.} < p,$$

d. h. numerisch kleiner als jede poſitive Grösse, d. h. $=0$, alſo

$$C\left[\frac{x}{x-a}\right]=1.$$

466. Wenn die zweite abgeleitete Funktion von fx stetig ist für jeden Zahlwerth x, der numerisch kleiner als x′ ist, ſo lässt ſich fx in einer ächten, nach Potenzen von x aufsteigenden Reihe entwickeln. Und zwar, wenn z num. $>$ x,

Hosted by Google

aber num. $< x'$ und das Zeichen C ſich auf die Variable z bezieht, während x als konstant geſetzt wird, ſo ist

$$fx = C\left[\frac{zfz}{z-x}\right] = \sum \overline{x^a C\left[\frac{fz}{z^a}\right]},$$

und wenn X und Z beziehlich die numerischen Werthe von x und z ſind, und F der grösste der numerischen Werthe ist, welche fz für die verschiedenen Werthe von z, welche numerisch $= Z$ ſind, annimmt, ſo ist jedes Glied der obigen Entwickelungsreihe von fx, und auch der Rest der Reihe numerisch kleiner als das entsprechende Glied und als der entsprechende Rest der nach Potenzen von X entwickelten Reihe

$$\frac{ZF}{Z-X} = F\sum \overline{\frac{X^a}{Z^a}}.$$

Beweis. Es ſei zunächst für z nur vorausgeſetzt, dass es numerisch kleiner als x' ſei, ſo ist (nach Hyp.) $f''z$ stetig, alſo (nach 447) auch $f'z$ und fz. Nun ſei x als konstant betrachtet, und nur z als variabel, und ſei das konstante Glied der Funktion

$$* \quad \varphi z = \frac{z(fz - fx)}{z - x}$$

betrachtet; alſo zunächst die Stetigkeit von $\varphi'z$ unterſucht. Es ist zuerst für $z = x$ der Ausdruck $\frac{fz - fx}{z - x}$ (nach 429, wo man nur $dx = 1$, und $x + q = z$ zu ſetzen hat) $= f'x = f'z$, alſo in dieſem Falle $\varphi z = zf'z$, alſo $\varphi'z$ in dieſem Falle $= f'z + zf''z$, alſo stetig, da $f'z$ und $f''z$ es ſind. Ferner, wenn $z \gtrless x$, alſo $z - x \gtrless 0$ ist, ſo ist

$$\varphi'z = \frac{fz - fx}{z - x} + \frac{zf'z}{z - x} - \frac{z(fz - fx)}{(z - x)^2}.$$

Da nun fz, $f'x$, z stetig ſind, und $z - x \gtrless 0$ ist, ſo ist auch in dieſem Falle $\varphi'z$ stetig; alſo $\varphi'z$ ſo lange stetig, als z num. $< x'$ ist. Somit bleibt $C(\varphi z)$ (nach 462) von unverändertem Werthe, ſo lange z num. $< x'$ ist, aber für $z = 0$ wird (nach *) φz gleichfalls null, ſomit ist $C(\varphi 0) = 0$, alſo auch $C(\varphi z)$, alſo erhalten wir die Gleichung

$$C\left[\frac{z(fz - fx)}{z - x}\right] = 0.$$

Hosted by Google

Nehmen wir jetzt z numerisch $>$ x aber noch immer num. $<$ x′ an, fo ist $z - x \gtrless 0$ und es find daher $\frac{zfz}{z-x}$ und $\frac{zfx}{z-x}$ fo wie ihre Differenziale nach z ſtetig, alſo (nach 463)

$$C\left[\frac{zfz}{z-x}\right] - fxC\left[\frac{z}{z-x}\right] = 0.$$

Aber $C\frac{z}{z-x} = 1$ (nach 465, wo man nur z ſtatt x, und x ſtatt a zu ſchreiben hat), folglich hat man

$$fx = C\left[\frac{zfz}{z-x}\right].$$

Nun iſt $\frac{z}{z-x} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{z^{r-1}} + \frac{x^r}{z^{r-1}(z-x)}$, alſo (nach 463)

$$fx = C(fz) + xC\left(\frac{fz}{z}\right) + x^2C\left(\frac{fz}{z^2}\right) + \cdots + x^{r-1}C\left(\frac{fz}{z^{r-1}}\right) + C\frac{x^r fz}{z^{r-1}(z-x)}.$$

Hier iſt das letzte Glied (nach 462) numeriſch kleiner als der numeriſch gröſste der Ausdrücke, die man erhält, wenn man in $\frac{x^r fz}{z^{r-1}(z-x)}$ ſtatt z alle möglichen mit ihm numeriſch gleichen Werthe ſetzt. Der gröſste der numeriſchen Werthe, die dabei fz annimmt, iſt oben mit F bezeichnet, die numeriſchen Werthe von z und x aber mit Z und X; der numeriſch gröſste Werth, den $\frac{1}{z-x}$ annehmen kann, iſt $\frac{1}{Z-X}$; alſo iſt $C\frac{x^r fz}{z^{r-1}(z-x)}$ num. $< \frac{X^r F}{Z^{r-1}(Z-X)}$; und aus gleichem Grunde ſind die übrigen Glieder, vom erſten anfangend, numeriſch kleiner als F, $\frac{XF}{Z}$, $\frac{X^2F}{Z^2}$, $\cdots$ $\frac{X^{r-1}F}{Z^{r-1}}$; dies ſind aber die entſprechenden Glieder und erſteres der entſprechende Reſt der Reihe $\frac{FZ}{X-Z} = F\sum\frac{X^a}{Z^a}$. Da nun endlich die letztgenannte Reihe eine ächte iſt, ſo iſt auch die Reihe für fx, da ihre Glieder numeriſch noch kleiner ſind, als die Glieder dieſer Reihe, eine ächte.

Hosted by Google

467. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz. Wenn $f''x$ stetig ist für jedes x, was numerisch kleiner als x' ist, so ist in demselben Umfange

$$fx = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}0 + \cdots$$
$$= \sum f^{(\alpha)}0\frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Beweis. Denn dann lässt sich fx (nach 466) in einer Reihe entwickeln. Es sei diese Reihe

(*) $fx = \sum a_\alpha x^\alpha$,

so ist

$$f^{(n)}x = \sum \frac{\alpha!}{(\alpha - n)!}a_\alpha x^{\alpha - n} \qquad [448],$$

also $f^{(n)}0 = n!\,a_n$, da alle übrigen Glieder null sind, also

$$a_n = \frac{f^{(n)}0}{n!}.$$

Dies in (*) eingesetzt giebt die zu erweisende Gleichung.

Anm. Da $f(a + x)$ als Funktion von x betrachtet werden kann, so ist es überflüssig, den Satz in zwei Sätze (den Taylor'schen und Maclaurin'schen) zu zertrennen.

§. 3. Entwickelung der Funktionen mehrerer Zahlgrössen oder Einer extensiven Grösse in Reihen.

468. Lehrsatz und Erklärung (Erweiterung von 462). Wenn $f(x_1, x_2, \cdots)$ eine Funktion mehrerer veränderlicher Zahlgrössen $x_1, x_2, \cdots$ ist, und die zu diesem Vereine gehörigen partiellen ersten Differenzialquotienten $\frac{d}{dx_1}f(x_1, x_2, \cdots)$, $\frac{d}{dx_2}f(x_1, x_2, \cdots), \cdots$ allemal stetig sind, sobald gleichzeitig der numerische Werth von x_1 zwischen den Gränzen a_1 und b_1, der von x_2 zwischen den Gränzen a_2 und b_2 liegt u. s. w.; und wenn endlich $\Theta_1 = \cos.\frac{2\pi}{n_1} + i\sin.\frac{2\pi}{n_1}$, $\Theta_2 = \cos.\frac{2\pi}{n_2} + i\sin.\frac{2\pi}{n_2}, \cdots$, so konvergirt der Ausdruck

$$\frac{1}{n_1 n_2 \cdots}\sum f(x_1\Theta_1^\alpha, x_2\Theta_2^\beta, \cdots)$$

Hosted by Google

mit den unbegränzt wachfenden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \cdots$ nach einer konstanten (von $x_1, x_2, \cdots$ unabhängigen) Gränze. Diefe konstante Gränze fei das zu jenem Stetigkeitsgebiete gehörende konstante Glied der Funktion $f(x_1, x_2, \cdots)$ genannt und mit $C[f(x_1, x_2, \cdots)]$ bezeichnet. Dann ist für 2 Variabeln

$$C[f(x_1, x_2)] = C_1(C_2[f(x_1, x_2)]),$$

wo C_2 fich nur auf die Variable x_2 bezieht (x_1 als konstant gefetzt) und C_1 fich nur auf die Variable x_1 bezieht (x_2 als konstant gefetzt); und entsprechend für mehr Variabeln.

Beweis 1 (für 2 Variabeln). Nach der Bedeutung der Summenbezeichnung ist

$$\frac{1}{n_1 n_2}\sum f(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}}, x_2\Theta_2^{\mathfrak{b}}) = \sum\frac{1}{n_1}\sum\frac{1}{n_2}f(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}}, x_2\Theta_2^{\mathfrak{b}}),$$

wo die innere Summe fich nur auf den Index $\mathfrak{b}$ bezieht, die äussere nur auf den Index $\mathfrak{a}$. Lassen wir nun zunächst n_2 unbegränzt wachfen, fo konvergirt die innere Summe (nach 462) nach einer von x_2 unabhängigen Gränze, welche wir mit $C_2[f(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}}, x_2)]$ zu bezeichnen haben. Diefe Gränze wird alfo nur noch eine Funktion von $x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}}$ fein, und fei diefelbe mit $\varphi(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}})$ bezeichnet; fo ist die Gränze, nach welcher der obige Ausdruck mit unbegränzt wachfendem n_2 konvergirt,

$$= \frac{1}{n_1}\sum\varphi(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}});$$

wächst nun auch n_1 unbegränzt, fo konvergirt (nach 462) diefer Ausdruck nach der auch von x_1 unabhängigen Gränze $C_1[\varphi x_1]$. Nach diefer Gränze konvergirt alfo der urfprüngliche Ausdruck, wenn in ihm fowohl n_1 als n_2 unbegränzt wachfen; d. h. es ist

$$C[f(x_1, x_2)] = C_1[\varphi x_1].$$

Aber es war $\varphi(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}}) = C_2[f(x_1\Theta_1^{\mathfrak{a}}, x_2)]$ gefetzt, alfo ist (für $\mathfrak{a} = 0$), $\varphi x_1 = C_2[f(x_1, x_2)]$; alfo

$$C[f(x_1, x_2)] = C_1(C_2[f(x_1, x_2)]).$$

2. Diefelbe Schlussreihe lässt fich auf beliebig viele Veränderliche übertragen.

Anm. Es verfteht fich von felbst, dass man auch $n_1 = n_2 = \cdots$, alfo auch $\Theta_1 = \Theta_2 = \cdots$ fetzen kann, ohne dass der Satz aufhört richtig zu fein.

Hosted by Google

469. (Erweiterung von 466). Wenn $f(x_1, x_2, \cdots)$ eine Funktion mehrerer veränderlichen Zahlgrössen $x_1, x_2, \cdots$ ist, und die zu dem Vereine dieſer Veränderlichen gehörigen partiellen zweiten Differenzialquotienten $\frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, x_2, \cdots)$, $\frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, x_2, \cdots), \cdots$ allemal stetig ſind, ſobald gleichzeitig x_1 numerisch kleiner als x'_1, x_2 numerisch kleiner als x'_2 ist u. ſ. w., ſo lässt ſich $f(x_1, x_2, \cdots)$ in einer nach ganzen homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \cdots$ aufsteigenden ächten Reihe entwickeln. Und zwar wenn ſich das Zeichen C auf die Veränderlichen $z_1, z_2, \cdots$ bezieht, während $x_1, x_2 \cdots$ als konstant geſetzt werden, ſo ist

$$\text{(a)} \quad f(x_1, x_2, \cdot\cdot) = C\left[f(z_1, z_2, \cdot\cdot)\frac{z_1}{z_2 - x_2}\cdot\frac{z_2}{z_1 - x_1}\cdots\right]$$

$$\text{(b)} \quad = \sum x_1^a, x_2^b, \cdots C\left[\frac{f(z_1, z_2, \cdot\cdot)}{z_1^a, z_2^b \cdots}\right];$$

und wenn $X_1, Z_1, X_2, Z_2, \cdots$ beziehlich die numerischen Werthe von $x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots$ ſind, und F der grösste der numerischen Werthe ist, welche $f(z_1, z_2, \cdots)$ für die verſchiedenen Werthe von $z_1, z_2, \cdots$, welche beziehlich numerisch $= Z_1, Z_2, \cdots$ ſind, annimmt, ſo ist jedes Glied der obigen Entwickelungsreihe von $f(x_1, x_2, \cdots)$, ſo wie auch jede Summe jener Glieder und namentlich der mit dem homogenen Gliede eines beliebigen (n-ten) Grades beginnende Rest der Reihe numerisch kleiner als das entsprechende Glied, oder die entsprechende Summe oder der entsprechende Rest in der Reihe

$$F\frac{Z_1}{Z_1 - X_1}\cdot\frac{Z_2}{Z_2 - X_2}\cdots = \sum F\cdot\frac{X_1^a}{Z_1^a}\cdot\frac{X_2^b}{Z_2^b}\cdots.$$

Beweis 1 (für 2 Veränderliche). Betrachten wir zunächst x_1 als konstant, ſo ist (nach 466)

$$(*) \quad f(x_1, x_2) = C_2\left[\frac{z_2 f(x_1, z_2)}{z_2 - x_2}\right].$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nur noch eine Funktion von x_1 und x_2; dieſe Funktion ſei mit $\varphi(x_1, x_2)$ bezeichnet, ſo ist (nach 466)

Hosted by Google

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) = C_1\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1}\varphi(z_1, x_2)\right],$$

wo C_1 sich nur auf die Veränderliche z_1 bezieht. Setzen wir nun statt $\varphi(z_1, x_2)$ seinen Werth, welcher aus der rechten Seite der obigen Gleichung (*) dadurch hervorgeht, dass man z_1 statt x_1 setzt, so erhält man

$$f(x_1, x_2) = C_1\left(\frac{z_1}{z_1 - x_1} C_2\left[\frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right]\right).$$

Da C_2 sich nur auf die Variable z_2 bezieht, also $\frac{z_1}{z_1 - x_1}$ in Bezug auf C_2 als konstant gesetzt wird, so können wir (nach 463) auch das Zeichen C_2 vor diesen Faktor setzen und erhalten

$$f(x_1, x_2) = C_1\left(C_2\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right]\right)$$
$$= C\left[\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} f(z_1, z_2)\right] \text{ [nach 468]},$$

also Formel (a) bewiesen. Es kommt nun darauf an, hier den in Klammern geschlossenen Ausdruck, in welchem wir der Kürze wegen f statt $f(z_1, z_2)$ schreiben wollen, in einer Reihe nach steigenden ganzen homogenen Funktionen von x_1 und x_2 zu entwickeln, und den zugehörigen Rest hinzuzufügen. Setzen wir $u_0, u_1, \cdots u_{n-1}$ als die n ersten Glieder und r_n als den zugehörigen Rest dieser Reihe, also

$$** \quad \frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} \cdot f = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n,$$

so ist bekanntlich $u_0 = f$, $u_1 = \left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2}\right)f$, und für jeden Index r

$$*** \quad u_r = \sum \frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} (a + b = r),$$

$$\text{und } r_n = \frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} u_n.$$

Dann ist also

$$f(x_1, x_2) = u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots C(u_{n-1}) + C(r_n).$$

Hier ist jedes Glied der rechten Seite (nach 462) numerisch kleiner als der numerisch grösste der Ausdrücke, die

Hosted by Google

man erhält, wenn man in die in Klammer geschlossene Funktion von z_1 und z_2 statt dieſer Variabeln alle möglichen mit ihnen numerisch gleichen Werthe ſetzt. Der grösste der numerischen Werthe, die dabei f annimmt, ist oben mit F bezeichnet, die numerischen Werthe von z_1 und z_2, x_1 und x_2 mit Z_1 und Z_2, X_1 und X_2. Folglich ist

$$\frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} \text{ num.} < \frac{X_1^a X_2^b F}{Z_1^a Z_2^b};$$

alſo da der Ausdruck rechts poſitiv ist, ſo ist (nach 418) auch

$$\sum \frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} \text{ num.} < \sum \frac{X_1^a X_2^b F}{Z_1^a Z_2^b},$$

alſo auch (nach ***) für jeden Index r

$$u_r \text{ num.} < U_r,$$

wo U_r dasjenige bezeichnet, was aus u_r hervorgeht, wenn man darin X_1, Z_1, X_2, Z_2, F statt x_1, z_1, x_2, z_2, f ſetzt, ſo dass alſo

$$(****) \quad \frac{Z_1}{Z_1 - X_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2 - X_2} F = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + R_n$$

wird, wo auch der Rest R_n aus r_n durch dieſelben Substitutionen hervorgeht. Dieſer Rest ist noch zu unterſuchen. Es ist, wie ſo eben gezeigt,

$$u_n \text{ num.} < U_n.$$

Ferner aber auch, da unter allen Werthen welche $z_1 - x_1$ annehmen kann, wenn statt z_1 und x_1 alle möglichen mit ihnen numerisch gleichen Werthe geſetzt werden, $Z_1 - X_1$ der numerisch kleinste ist, ſo ist

$$\frac{z_1}{z_1 - x_1} \text{ num.} < \frac{Z_1}{Z_1 - X_1}, \text{ und aus gleichem Grunde}$$

$$\frac{z_2}{z_2 - x_2} \text{ num.} < \frac{Z_2}{Z_2 - X_2}.$$

Alſo da die beiden letzten Vergleichungen nur Zahlgrössen enthalten, ſo ist (nach 458)

$$\frac{z_1}{z_1 - x_1} \cdot \frac{z_2}{z_2 - x_2} u_n \text{ num.} < \frac{Z_1}{Z_1 - X_1} \cdot \frac{Z_2}{Z_2 - X_2} \cdot U_n,$$

d. h. $r_n \text{ num.} < R_n$.

Alſo ist auch (nach 462)

$$C(u_r) \text{ num.} < U_r, \; C(r_n) \text{ num.} < R_n,$$

Hosted by Google

d. h. jedes Entwickelungsglied der Reihe für $f(x_1, x_2)$, und der Rest derfelben ist numerisch kleiner als das entsprechende Glied und als der entsprechende Rest der Entwickelungsreihe (****). Diefe letztere Reihe ist aber bekanntlich konvergent, d. h. ihr Rest R_n konvergirt mit unbegränzt wachfendem n nach null; alfo thut dies auch der Rest $C(r_n)$, da er noch numerisch kleiner als R_n ist, d. h. auch die Entwickelungsreihe für $f(x_1, x_2)$ ist konvergent, fo lange nämlich die Bedingung erfüllt wird, dass x_1 num. $< x'$ und x_2 num. $< x'_2$ bleibt. Die Reihe für $f(x_1, x_2)$ war aber, wenn wir den Rest, wie dies bei konvergenten Reihen gestattet ist, weglassen,

$$f(x_1, x_2) = u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots,$$

wo $$C(u_r) = C \sum \frac{x_1^a x_2^b f}{z_1^a z_2^b} (a + b = r), \text{ d. h.}$$

$$= \sum x_1^a x_2^b C\left[\frac{f(z_1, z_2)}{z_1^a z_2^b}\right](a + b = r),$$

womit die Formel (b) bewiefen ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Reihe $f(x_1, x_2) = u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots$ nicht bloss eine konvergente, fondern auch eine ächte ist. Da x_1, x_2 num. $< x'_1, x'_2$ find, fo find $\frac{x'_1}{x_1}$ und $\frac{x'_2}{x_2}$ num. > 1; folglich muss es eine pofitive Zahl T geben, welche > 1 aber numerisch kleiner als $\frac{x'_1}{x_1}$ und $\frac{x'_2}{x_2}$ ist. Dann hat man $x_1 T$ num. $< x'_1$ und $x_2 T$ num. $< x'_2$, folglich muss die Reihe für $f(x_1, x_2)$ noch konvergent bleiben, wenn man $x_1 T$ statt x_1 und $x_2 T$ statt x_2 fetzt; dann verwandelt fich aber $C(u_r)$, da es eine homogene Funktion r-ten Grades von x_1, x_2 ist, in $T^r C(u_r)$, folglich bleibt die Reihe

$$u_0 + TC(u_1) + T^2 C(u_2) + \cdots$$

konvergent, alfo auch ihre Glieder bis ins Unendliche hin endlich, alfo (nach 454) die Reihe

$$u_0 + C(u_1) + C(u_2) + \cdots$$

eine ächte.

2. Der Beweis 1 ist überall fo geführt, dass er fich unmittelbar auf beliebig viele Variable übertragen lässt.

Hosted by Google

470. Der Taylor'sche Satz (467) gilt auch, wenn x eine beliebige extenfive Grösse ist; d. h. es ist auch in diefem Falle

$$fx = f(0) + xf'0 + \frac{x^2}{2}f''0 + \cdots = \sum \frac{x^a}{a!}f^{(a)}0,$$

vorausgefetzt, dass d^2fx für jeden Werth x, der numerisch kleiner als x' ist, stetig fei.

Beweis. Es fei $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$, wo $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten von x find, fo ist (nach Hyp.) d^2fx stetig; aber (nach 449)

$$d_x^2fx = \delta_1^2fx \cdot dx_1^2 + \delta_2^2fx \cdot dx_2^2 + \cdots + 2\delta_1\delta_2fx \cdot dx_1dx_2 + \cdots,$$

wo $\delta_1, \delta_2, \cdots$ die zu dem Vereine der Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten find. Diefe Gleichung gilt für jede Werthreihe von $dx_1, dx_2, \cdots$, alfo namentlich, wenn man $dx_2, dx_3, \cdots$ null fetzt. Dann aber wird $d^2fx = \delta_1^2fx \cdot dx_1^2$, alfo ist δ_1^2fx stetig, aus gleichem Grunde δ_2^2fx u. f. w.; alfo lässt fich (nach 469) fx, als Funktion von $x_1, x_2, \cdots$ in einer ächten Reihe entwickeln, deren Glieder nach ganzen homogenen Funktionen von $x_1, x_2, \cdots$ fortschreiten, es fei

$$fx = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

diefe Reihe, wo

$$u_r = \sum a_{a,b,\ldots}x_1^a x_2^b \cdots (a + b + \cdots = r)$$

ist. Setzen wir hier

$$\sum a_{a,b,\ldots}[1|e_1]^a[1|e_2]^b \cdots (a + b + \cdots = r) = a_r,$$

wo 1 eine durch x ausfüllbare Lücke bezeichnet, fo wird $u_r = a_rx^r$, und alfo

$$(*)\quad fx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots.$$

Setzen wir hier $x = yz$, wo z eine Zahl ist; fo wird

$$fx = f(yz) = a_0 + a_1y \cdot z + a_2y^2 \cdot z^2 \cdots = \sum a_ay^a \cdot z^a.$$

Alfo find (nach 460) die Differenzialquotienten diefer Reihe nach z gleichfalls ächte Reihen, und es wird alfo

$$\frac{d^n}{dz^n}f(yz) = \sum \frac{a!}{(a-n)!}a_ay^a \cdot z^{a-n}.$$

Aber (nach 440) ist $\frac{d}{dz}f(yz) = f'(yz)\frac{d}{dz}(yz) = f'x \cdot y$, und

Hosted by Google

ebenfo $\frac{d^2}{dz^2}f(yz) = f''x \cdot y^2$ u. f. w., $\frac{d^n}{dz^n}f(yz) = f^{(n)}x \cdot y^n$. Alfo

$$f^{(n)}x \cdot y^n = \sum \frac{a!}{(a-n)!} a_a y^a \cdot z^{a-n}.$$

Setzt man nun $z = 0$, fo wird auch $x = yz = 0$, alfo

$$f^{(n)}0 \cdot y^n = n! a_n \cdot y^n,$$

da alle übrigen Glieder der rechten Seite verschwinden. Somit, da diefe Gleichung für jeden Werth y gilt, fo ist, wie aus 357 leicht hervorgeht,

$$f^{(n)}0 = n! a_n, \text{ alfo } a_n = \frac{f^{(n)}0}{n!},$$

was, in die obige Gleichung (*) eingeführt, die zu erweifende Formel liefert.

Kap. 4. Integralrechnung.

§. 1. Integration von Differenzialausdrücken.

471. Wenn ft eine reelle Zahlfunktion der reellen Zahl-Grösse t ist, und die abgeleitete Funktion f't zwischen $t = t_1$ und t_2 stetig und pofitiv ist, fo wächst zwischen denfelben Gränzen ft mit t; wenn dagegen f't stetig und negativ ist, fo nimmt ft ab, während t wächst.

Beweis. Es ist (nach 439, indem man hier t statt x, und $z = 1$ fetzt)

$$f(t+q) = ft + q(f't + N),$$

wo N mit q verschwindet, alfo

$$f(t+q) - ft = q(f't + N).$$

Da N mit q verschwindet, fo muss für gehörig kleine Werthe von q auch $f't + N$ mit f't gleichbezeichnet fein; alfo wenn q und f't gleichbezeichnete Grössen find, fo wird dann $q(f't + N)$ pofitiv, alfo auch $f(t+q) > ft$ fein; d. h. ft wächst mit t, wenn aber q und f't ungleichbezeichnete Grössen find, fo wird $q(f't + N)$ negativ, alfo $f(t+q) < ft$, d. h. ft nimmt ab wenn t wächst.

472. Wenn die reelle Zahlfunktion ft der reellen Zahl-Grösse t für $t = t_1$ denfelben Werth annimmt, wie für $t = t_2$, wo $t_2 > t_1$ ist und f't für jeden Werth t, der zwischen t_1

Hosted by Google

und t_2 liegt, stetig ist, so muss für irgend einen Werth t, der zwischen t_1 und t_2 liegt, $f't = 0$ sein.

Beweis. Wenn $f't$ für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t von Null verschieden wäre, so müsste es fortdauernd positiv oder fortdauernd negativ sein. Denn wäre $f't$ für einige Werthe positiv, für andere negativ, so müsste es mindestens einen Werth geben, wo $f't$ aufhörte positiv zu sein und anfinge negativ zu werden oder umgekehrt; da aber $f't$ (nach Hyp.) stetig ist, so müsste es bei diesem Werthe von t nothwendig null werden. Wenn aber $f't$ dauernd positiv wäre, so würde (nach 471) $ft_2 > ft_1$ sein, was mit der Voraussetzung, dass $ft_1 = ft_2$ sei, streitet; es müsste also $f't$ dauernd negativ sein; allein dann wäre $ft_1 < ft_2$ (nach 471), was gleichfalls mit der Voraussetzung streitet, also ist die Annahme, dass $f'(t)$ für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t von Null verschieden sei, unmöglich, d. h. $f't$ ist für irgend ein zwischen t_1 und t_2 liegendes t null.

473. Wenn ft eine reelle Zahlfunktion einer reellen Zahlgrösse t ist, und $f't$ für jedes zwischen t_1 und t_2 liegende t stetig ist, so muss für irgend ein zwischen diesen Gränzen liegendes t

$$\frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1} = f't$$

sein.

Beweis. Die Funktion

$$\varphi t = ft - \frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)$$

nimmt für $t = t_1$ den Werth ft_1, für $t = t_2$ denselben Werth ft_1 an; da nun $\varphi't = f't - (ft_2 - ft_1) : (t_2 - t_1)$ ist, so ist also auch $\varphi't$ zwischen jenen Gränzen stetig, folglich giebt es (nach 472) einen zwischen denselben Gränzen liegenden Werth t, für welchen $\varphi't = 0$, d. h.

$$f't = \frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1}$$

ist.

474. Wenn ft eine beliebige Funktion der reellen Zahlgrösse t ist, so ist, so lange $f't = 0$ ist, auch ft nothwendig konstant.

Hosted by Google

Beweis 1. ft sei eine reelle Zahlfunktion. Angenommen, es habe ft für zwei verschiedene Werthe t_1 und t_2 ungleiche Werthe, also $ft_1 \gtrless ft_2$, während doch f't zwischen t_1 und t_2 null sei, so hätte man (nach 473) für irgend ein zwischen t_1 und t_2 liegendes t, $f't = \frac{ft_2 - ft_1}{t_2 - t_1}$ also ungleich null, was mit der Voraussetzung streitet; also ist die Annahme, dass ft für irgend zwei Werthe, welche noch innerhalb der Gränzen liegen, zwischen welchen $f't = 0$ ist, ungleiche Werthe annehme, unmöglich, d. h. ft ist innerhalb dieser Gränzen konstant.

2. Wenn ft eine beliebige Funktion ist, und $e_1, e_2, \cdots$ ihre normalen Einheiten und $f_1t, f_2t, \cdots$ die zugehörigen Ableitzahlen sind, also

$$ft = e_1f_1t + e_2f_2t + \cdots$$

ist; so ist (nach 434)

$$dft = e_1df_1t + e_2df_2t + \cdots, \text{ d. h.}$$
$$f't = e_1f'_1t + e_2f'_2t + \cdots.$$

Da nun vorausgesetzt war, dass $f't = 0$ sei, so sind (nach 28)

$$f'_1t = f'_2t = \cdots = 0,$$

also (nach Bew. 1, da f_1t u. s. w. Zahlfunktionen sind) $f_1t, f_2t, \cdots$ konstant, also auch $e_1f_1t + e_2f_2t + \cdots$ konstant, d. h. ft konstant.

475. Wenn d_xfx innerhalb gewisser Gränzen, für jedes dx, null ist, so ist innerhalb derselben Gränzen fx konstant.

Beweis. Es seien $e_1, e_2, \cdots$ die normalen Einheiten, und $x_1, x_2, \cdots$ die zugehörigen Ableitzahlen von x, also $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots$, und seien die zu dem Vereine der Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, \cdots$ beziehlich mit $\delta_1, \delta_2, \cdots$ bezeichnet, so ist (nach 437)

$$d_xfx = \delta_1fx \cdot dx_1 + \delta_2fx \cdot dx_2 + \cdots.$$

Da nun d_xfx (nach Hypoth.) für jedes dx null ist, also auch wenn $dx_1 \gtrless 0$, $dx_2, dx_3, \cdots$ null sind, so hat man $\delta_1fx = 0$, also (nach 474) fx von x_1 unabhängig, und aus gleichem Grunde auch fx von $x_2, x_3, \cdots$ unabhängig, d. h. von x unabhängig, also konstant.

476. Wenn innerhalb gewisser Gränzen die Differenziale der Funktionen fx und φx fortdauernd gleich sind, und für irgend einen Werth x innerhalb jener Gränzen die Funktionen

Hosted by Google

ſelbst einander gleich ſind, ſo findet dieſe Gleichheit auch für jeden andern zwischen jenen Gränzen liegenden Werth x statt.

Beweis. Es ſei $Fx = fx - \varphi x$, ſo hat man $dFx = dfx - d\varphi x$, alſo dFx innerhalb jener Gränzen, für welche die Vorausſetzung, dass $dfx = d\varphi x$ ſei, statt fand, null; alſo (nach 475) innerhalb derſelben Gränzen Fx konstant, d. h. $fx - \varphi x = \text{Konst.}$ Da nun für einen gewissen Werth von x, nach der Vorausſetzung, $fx = \varphi x$ ist, ſo ist die obige Konstante null, alſo für jeden Werth x innerhalb jener Gränzen $fx - \varphi x = 0$, d. h. $fx = \varphi x$.

477. Erklärung. Wenn t eine poſitive Zahl ist und die Funktion ft zwischen $t = 0$ und $t = t_1$ stetig ist, ſo verſtehe ich unter dem Integral von ftdt diejenige Funktion Ft, welche mit t null wird und deren nach t genommenes Differenzial für jedes t, welches zwischen jenen Gränzen liegt, gleich ftdt ist. Ich bezeichne dies Integral mit $d^{-1}ftdt$; d. h. es ist

$$d^{-1}ft \cdot dt = Ft,$$

wenn $d_t F(t) = ft \cdot dt$ und $F(0) = 0$ ist.

Anm. Die gewählte Bezeichnung gewährt vor der gewöhnlichen den Vorzug, dass ſie nur als eine Erweiterung der für die Differenzialrechnung geltenden erscheint; eine neue Bezeichnung schien aber wünschenswerth, da der Begriff des Integrals, wie er oben aufgeſtellt ist, mit dem gewöhnlichen Begriffe desſelben nicht deckend ist. Wenn wir bei der gewählten Bezeichnung feſtſetzen, dass das Differenzial, auf welches ſich die Integration bezieht (hier dt) stets an den Schluss des zu integrirenden Ausdruckes geſtellt werde, ſo können wir bei derſelben die Klammer, welche eigentlich den zu integrirenden Ausdruck umſchliessen müsste, entbehren. Eben ſo hat man nicht nöthig, die Grösse, nach welcher integrirt werden ſoll, dem Integrationszeichen beizufügen, da dieſe gleichfalls durch das an den Schluss geſtellte Differenzial schon bezeichnet ist. Allein dann muss man feſthalten, dass man dann nicht für dies Differenzial einen ihm gleichen Ausdruck, welcher ein anderes Differenzial enthält, ſetzen darf, wenn man nicht zuvor nachgewieſen hat, dass das Integral, wenn es ſich auf dies neue Differenzial bezieht, denſelben Werth beibehält. Die Aenderung in dem Begriffe des Integrals, wie ſie die obige Definition zeigt, besteht darin, dass die Unbestimmtheit, welche das ſogenannte allgemeine Integral vermöge der willkürlich hinzuzufügenden Konstanten erhält, aufgehoben ist, indem das Integral nach dem aufgeſtellten Begriffe stets zwischen zwei genau feſtgeſtellten Gränzen genommen

Hosted by Google

ist, indem nämlich als Anfangsgränze 0, als Endgränze der Werth der Variabeln ſelbst geſetzt ist. Das allgemeine Integral ist als für ſich bestehende Grösse aus der Mathematik aus demſelben Grunde gänzlich zu verbannen, wie alle andern mehrdeutigen Grössen und Grössenverknüpfungen, weil nämlich kein algebraisches Geſetz für ſolche mehrdeutigen Ausdrücke allgemeine Geltung behält. Es hat alſo nur das bestimmte Integral wissenschaftliche Berechtigung. Die gewählte Bezeichnung reicht aber aus, um jedes bestimmte Integral zu bezeichnen. Denn ſoll z. B. das Integral von fz·dz zwischen den Gränzen a und a + b genommen werden, ſo hat man nur z = a + t zu ſetzen und $d^{-1}f(a+t)dt$ zu nehmen und nach der Integration t = b zu ſetzen. Noch bemerke ich, dass die Stetigkeit der zu intergrirenden Funktion im Folgenden überall vorausgeſetzt wird, auch wenn dieſe Bedingung nicht ausdrücklich hinzugefügt ist.

478. Zuſatz. Es ist

$$d_t(d^{-1}ft\cdot dt) = ft\cdot dt, \text{ und } [d^{-1}ftdt](t=0) = 0.$$

479. Wenn f(0) = 0 ist, ſo ist für jedes t, was zwischen den Gränzen 0 und t′ liegt, zwischen welchen dft stetig ist,

$$d^{-1}dft = ft.$$

Beweis. Nach 478 ist, wenn alle Differenziale nach t genommen ſind,

$$d(d^{-1}dft) = dft \text{ und } [d^{-1}dft](t=0) = 0;$$

alſo haben die beiden Funktionen $d^{-1}dft$ und ft die Eigenschaft, dass für jedes zwischen 0 und t′ liegende t ihre Differenziale gleich ſind, und dass für t = 0 beide Funktionen einander gleich, nämlich gleich null werden; denn für $d^{-1}dft$ haben wir es ſo eben bewieſen, und für ft ist es (nach Hyp.) der Fall. Alſo ſind (nach 476) beide Funktionen einander gleich.

480. Eine Summe integrirt man, indem man die Stücke integrirt, und ein Produkt, dessen einer Faktor konstant ist, integrirt man, indem man den variablen Faktor integrirt, und den konstanten unverändert lässt; oder beides zu einer allgemeineren Formel zuſammengefasst,

$$d^{-1}\sum a_\alpha f_\alpha(t)dt = \sum a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt.$$

Beweis. Nach 478 wird die Funktion $d^{-1}f_\alpha(t)dt$ mit t null, alſo auch $a_\alpha d^{-1}f_\alpha(t)dt$, alſo auch die Summe dieſer Ausdrücke; folglich ist (nach 479)

Hosted by Google

$$\sum \overline{a_\alpha d^{-1} f_\alpha(t) dt} = d^{-1} d \sum \overline{a_\alpha d^{-1} f_\alpha(t) dt}$$
$$= d^{-1} \sum \overline{a_\alpha d d^{-1} f_\alpha(t) dt} \quad [432, 433]$$
$$= d^{-1} \sum \overline{a_\alpha f_\alpha(t) dt} \quad [478].$$

481. Wenn ft stetig ist für jede zwischen den Gränzen 0 und t′ liegende positive Zahlgrösse t, so ist für jedes solche t auch die Integration von ftdt ausführbar.

Beweis. Wenn ft eine reelle Zahlfunktion ist, so ist der Beweis bekannt (vergl. z. B. Moigno Calcul intégral p. 1 ss.). Wenn aber ft eine beliebige Grösse ist, und $e_1, e_2, \cdots$ ihre normalen Einheiten, $f_1 t, f_2 t, \cdots$ ihre Ableitzahlen sind, also $ft = e_1 f_1 t + e_2 f_2 t + \cdots$ ist, so ist (nach 480)

$$d^{-1} ftdt = e_1 d^{-1} f_1 tdt + e_2 d^{-2} f_2 tdt + \cdots.$$

Da nun (nach 413) $f_1 t, f_2 t, \cdots$ reell sind, so sind, wie eben gezeigt, die Integrationen $d^{-1} f_1 tdt, d^{-1} f_2 tdt, \cdots$ ausführbar, also auch die Integration $d^{-1} ftdt$.

482. Wenn die positive Zahlgrösse $t = \varphi u$ Funktion einer andern positiven Zahlgrösse u ist, und φu mit u zugleich null wird, so ist

$$d^{-1} ft \cdot dt = d^{-1} ft \cdot \varphi' u \cdot du.$$

Beweis. Es sei $d^{-1} ft \cdot dt = Ft$, d. h. $d_t Ft = ftdt$ und $F(0) = 0$. Da nun $d_t Ft = F' tdt$ ist, so folgt aus der ersteren Gleichung $F' t = ft$. Nun ist (nach 440)

$$d_u Ft = F' t \cdot d_u t = F' t \cdot d_u \varphi u$$
$$= F' t \cdot \varphi' u \cdot du \quad [440].$$

Ferner ist, wie oben gezeigt, $F' t = ft$, und $Ft = F\varphi(u)$, also da φu mit u zugleich null wird, so wird Ft nicht bloss mit t, sondern auch mit u null; und wir erhalten also

$$d_u F\varphi(u) = ft \cdot \varphi' u \cdot du \text{ und}$$
$$F\varphi(0) = 0,$$

also ist (nach 477) $F\varphi u = d^{-1} ft \cdot \varphi' u \cdot du$; aber es war auch $F\varphi u = Ft = d^{-1} ftdt$, also

$$d^{-1} ftdt = d^{-1} ft \cdot \varphi' u \cdot du.$$

483. Erklärung. Wenn x eine beliebige Grösse ist, deren numerischer Werth t ist, und $x : t$ mit e bezeichnet wird (wo also der numerische Werth von e gleich 1 und $x = et$ ist), so setze ich

$$d^{-1} fxdx = d^{-1} f(et) \cdot edt,$$

Hosted by Google

wo e bei der Integration als konstant gefetzt und vorausgefetzt wird, dass f(et) in t ſtetig ist, und auch bleibt, wenn t bis null hin abnimmt. Wenn ſich eine mit x verſchwindende Funktion von x finden lässt, deren nach x genommenes Differenzial fxdx ist, ſo ſagen wir, dass in dieſem Falle fxdx allſeitig integrirbar ſei.

Anm. Wir werden ſpäterhin zeigen, dass jedesmal, wenn es eine Funktion Fx von der Art giebt, dass $d_x Fx = fxdx$, und $F0 = 0$ ſei, dann auch für jedes x jene Funktion $Fx = d^{-1}fxdx$ ſei, wobei $d^{-1}fxdx$ in dem oben gegebenen Sinne aufzufaſſen ist. Dagegen wird ſich zeigen, dass es nicht zu jedem fxdx eine Funktion Fx von der genannten Eigenſchaft giebt, während auf der andern Seite $d^{-1}fxdx = d^{-1}f(et)\cdot edt$ (nach 481) ſtets gefunden werden kann. Es ist alſo $d^{-}fxdx$ in der Weiſe, wie wir es oben definirt haben, als das allgemeine ſtets mögliche Integral von fxdx aufzufaſſen, welches ſich nur in ſpeciellen Fällen als Funktion von x in der Art darſtellen lässt, dass das nach x genommene Differenzial dieſer Funktion gleich fxdx ſei.

484. Statt eine Summe zu integriren, kann man die Stücke einzeln integriren, d. h.

$$d^{-1}(f_1x + f_2x + \cdots)dx = d^{-1}f_1xdx + d^{-1}f_2xdx + \cdots$$

oder

$$d^{-1}\sum f_\alpha x\,dx = \sum \overline{d^{-1}f_\alpha x\cdot dx.}$$

Beweis. Es ſei $x = et$, wo t eine poſitive Zahlgrösse und e numeriſch gleich 1 ist, ſo ist

$$\begin{aligned} d^{-1}\sum f_\alpha x\,dx &= d^{-1}\sum f_\alpha x\,edt && [483]\\ &= d^{-1}\sum \overline{f_\alpha x\cdot e}\,dt && [39]\\ &= \sum \overline{d^{-1}f_\alpha x\cdot edt} && [480], \end{aligned}$$

weil nämlich t eine poſitive Zahlgrösse ist,

$$= \sum \overline{d^{-1}f_\alpha x\cdot dx} \qquad [483].$$

485. Statt ein Produkt zweier Faktoren, von denen der eine konſtant ist, zu integriren, kann man den andern Faktor integriren, und den konſtanten Faktor unverändert laſſen, d. h.

$$d^{-1}afxdx = ad^{-1}fxdx,$$

wo fx im Allgemeinen einen Ausdruck mit zwei Lücken darſtellt, von denen die eine durch a, die andere durch dx ausgefüllt werden ſoll. Bezeichnen wir die erſtere Lücke durch l, die letztere durch l_1, und ſchreiben ſtatt a und dx beziehlich $\frac{a}{l}$ und $\frac{dx}{l_1}$, um dadurch ſymboliſch auszudrücken, dass a

Hosted by Google

in die Lücke l, und dx in die Lücke l_1 eintreten ſoll, ſo können wir die obige Formel bezeichnender schreiben

$$d^{-1}\frac{a}{l}fx\cdot\frac{dx}{l_1}=\frac{a}{l}d^{-1}fx\cdot\frac{dx}{l_1}.$$

Beweis. Setzen wir $x=et$ (in dem Sinne von 483), ſo ist

$$\frac{a}{l}d^{-1}fx\cdot\frac{dx}{l_1}=\frac{a}{l}d^{-1}f(et)\cdot\frac{e}{l_1}dt \qquad [483]$$

$$=d^{-1}d\left[\frac{a}{l}d^{-1}f(et)\frac{e}{l_1}dt\right] \qquad [479]$$

$$=d^{-1}\frac{a}{l}dd^{-1}f(et)\frac{e}{l_1}dt \qquad [433, 431\,c]$$

$$=d^{-1}\frac{a}{l}f(et)\frac{e}{l_1}dt \qquad [478]$$

$$=d^{-1}\frac{a}{l}fx\cdot\frac{dx}{l_1} \qquad [483].$$

Anm. Es verſteht ſich von ſelbſt, dass, wenn eine der Grössen a oder x (alſo auch dx) eine Zahlgrösse ist, die zugehörige Lücke wegfällt und daher die Unterſcheidung der Lücken überflüssig wird; ebenſo wenn die beiden Lücken vertauſchbar ſind, d. h. wenn stets dasſelbe Reſultat hervorgeht, ſobald von zwei beliebigen Grössen (hier a und dx) die eine in die erste, die andere in die zweite Lücke eintritt, oder umgekehrt jene in die zweite, dieſe in die erste. Noch bemerke ich nachträglich, dass in dem ganzen vorhergehenden Abſchnitte überall, wo von einem Lückenausdrucke mit n Lücken die Rede ist, ohne dass eine nähere Bestimmung hinzugefügt ist, stets die n Lücken als vertauſchbar geſetzt ſind.

486. Es ist fxdx dann und nur dann allſeitig integrirbar, wenn die abgeleitete Funktion f′x entweder ein lückenloſer Ausdruck (d. h. x eine reelle Zahlgrösse) oder ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken ist, nämlich ſo, dass es für das Reſultat gleichgültig ist, in welcher Vertheilung zwei Grössen in die beiden Lücken eintreten. Wenn dieſe Bedingung erfüllt ist und Fx die mit x verſchwindende Funktion von x ist, deren nach x genommenes Differenzial fxdx ist, ſo ist allemal

$$Fx=d^{-1}fxdx.$$

Beweis 1. Wenn es eine mit x verſchwindende Funktion Fx giebt, ſo dass $d_xFx=fxdx$ ist, ſo ist $F'x=fx$ (nach

Hosted by Google

435), alſo $F''x = f'x$ (nach 450). Aber $F''x$ iſt (nach 451) ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken, alſo auch das ihm gleiche $f'x$. Wenn die Lücken von nullter Stufe ſind (d. h. x eine Zahlgrösse iſt), ſo können die Lücken weggelaſſen werden, und wird dann $f'x$ ein lückenloſer Ausdruck.

2. Es ſei $x = yt$, wo y numeriſch gleich 1 und t eine poſitive Zahl iſt und ſei vorausgeſetzt, dass $f'x$ ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken ſei, ſo hat man (nach 483) $d^{-1}fxdx = d^{-1}f(yt)ydt$, wo bei der Integration y als konſtant betrachtet wird. Es ſei dies Integral gleich $F(y, t)$ geſetzt, d. h. es ſei $d_tF(y, t) = f(yt)\cdot ydt$, und $F(y, 0) = 0$, ſo beweiſe ich, dass $d_xF(y, t) = fxdx$ ſei. Da y und t von einander unabhängig ſind, ſo iſt, wenn d_y und d_t die auf den Verein dieſer beiden Variabeln bezüglichen Differenziale ſind, (nach 437)

$$d_xF(y, t) = d_yF(y, t) + d_tF(y, t) = d_yF(y, t) + f(yt)\cdot ydt.$$

Ferner iſt (nach 446)

$$\begin{aligned} d_t[d_yF(y, t)] &= d_y[d_tF(y, t)] = d_y[f(yt)\cdot ydt] \\ &= f'(yt)\cdot tdy\cdot ydt + f(yt)dydt \qquad [433] \\ &= d_tf(yt)\cdot tdy + f(yt)dtdy \qquad [440] \\ &= d_t[f(yt)\cdot tdy] \qquad [433]. \end{aligned}$$

Da nun, wie oben gezeigt, $F(y, 0) = 0$ iſt für jedes y, ſo iſt auch $d_yF(y, 0)$ gleich null, ebenſo wird $f(yt)\cdot tdy$ mit t null, alſo iſt (nach 479)

$$d_yF(y, t) = f(yt)\cdot tdy.$$

Indem wir nun dieſen Werth in den oben für $d_xF(y, t)$ gefundenen Ausdruck einführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_xF(y, t) &= f(yt)\cdot tdy + f(yt)\cdot ydt \\ &= f(yt)\cdot d(yt) = fx\cdot dx. \end{aligned}$$

Hier ſind y und t Funktionen von x (nämlich $t = \sqrt{x^2}$, $y = x : \sqrt{x^2}$), alſo iſt $F(y, t)$ auch als Funktion von x zu faſſen und ſei als ſolche mit Fx bezeichnet; ſo haben wir alſo in jedem Falle, wo $f'x$ ein Ausdruck mit zwei vertauſchbaren Lücken iſt (wohin auch der Fall gerechnet werden kann, wo $f'x$ ein lückenloſer Ausdruck iſt), eine mit $x = yt$ verſchwindende Funktion Fx gefunden, deren nach x genommenes Differenzial gleich $fx\cdot dx$ iſt; und zwar war dieſe Funktion gleich $d^{-1}fx\cdot dx$.

Hosted by Google

3. Ausser der Funktion $Fx = d^{-1}fxdx$ kann es keine andere Funktion φx geben, deren nach x genommenes Differenzial in demfelben Umfange, wie das von Fx, gleich fxdx ist, und welche mit x verschwindet; denn wenn $d_x Fx = d_x \varphi x$ und für irgend einen Werth (hier für $x = 0$) $Fx = \varphi x$ ist, fo findet (nach 476) diefe Gleichheit allgemein statt. Folglich, fo bald $d_x Fx = fxdx$ und $F(0) = 0$ ist, muss auch $Fx = d^{-1}fxdx$ fein.

487. Wenn x aus feinen normalen Einheiten $e_1, e_2, \cdots$ durch die Zahlen $x_1, x_2, \cdots$ ableitbar, alfo $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots$ ist, und wenn zugleich $fxdx = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots$ ist, wo $A_1, A_2, \cdots$ Funktionen von $x_1, x_2, \cdots$ find: fo ist die Bedingung (allfeitiger Integrirbarkeit), dass f'x ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken fei, identisch der Bedingung, dass für je zwei Indices r und s

$$\delta_r A_s = \delta_s A_r$$

fei, wo $\delta_1, \delta_2, \cdots$ die zu dem Vereine der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ gehörigen partiellen Differenzialquotienten nach $dx_1, dx_2, \cdots$ bezeichnen.

Beweis. Statt $A_1 dx_1 + A dx_2 + \cdots$ können wir, da (nach 142) $[e_r|e_r] = 1$, und $[e_r|e_s] = 0$ ist, wenn $r \gtrless s$ ist, schreiben $(A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots)dx$. Alfo da, für jedes dx, $fxdx = (A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots)dx$ ist, fo ist (nach 357)

$$fx = A_1[l|e_1] + A_2[l|e_2] + \cdots = \sum \overline{A_a[l|e_a]}.$$

Nun ist (nach 437)

$$d_x fx = \sum \delta_b \overline{fx \cdot dx_b} = \sum \overline{\delta_b A_a [l|e_a] dx_b}$$

$$f'xdx = \sum \overline{\delta_b A_a [l|e_a][l_1|e_b]} \frac{dx}{l_1},$$

wo l_1 eine Lücke ist, in welche dx eintreten foll. Somit wird (nach 357)

$$f'x = \sum \overline{\delta_b A_a [l|e_a][l_1|e_b]}.$$

Sind nun l und l_1 vertauschbare Lücken, fo hat man für je zwei Zeiger r und s

$$\sum \overline{\delta_b A_a [e_s|e_a][e_r|e_b]} = \sum \delta_b A_a [e_r|e_a][e_s|e_b].$$

Da aber $[e_r|e_s]$ null ist für je zwei verschiedene Zeiger r und s, und gleich 1 ist, für je zwei gleiche, fo erhält man

Hosted by Google

$$\delta_r A_s = \delta_s A_r,$$

und ebenfo geht umgekehrt aus diefen letzteren Gleichungen die vorletzte, welche die Vertauschbarkeit der Lücken ausfagt, hervor.

488. Wenn fx innerhalb gewisser Gränzen, in denen auch $x = 0$ und $x = a$ liegt, stetig ist, und

$$F(x) = d^{-1} f x dx$$

ist, fo ist auch, wenn $x = a + y$ ist,

$$F(a + y) - Fa = d^{-1} f(a + y) dy.$$

Beweis. Wenn $F(x) = d^{-1} f(x) dx$ ist, fo ist $d_x Fx = fx \cdot dx$, d. h. $F'x = fx$; alfo $d_y [F(a + y) - Fa] = F'(a + y) dy$ [nach 440] $= f(a + y) dy$. Ferner ist $F(a + y) - Fa$ für $y = 0$ gleichfalls null, alfo (nach 487) $F(a + y) - Fa = d^{-1} f(a + y) dy$.

489. Es ist, wenn a einen Ausdruck mit n Lücken l und einer Lücke l_1 bezeichnet,

$$d^{-1} a \left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{dx}{l_1} = \frac{1}{n+1} a x^{n+1}$$

Beweis. Es fei $x = et$, wo t der numerische Werth von x, und e numerisch gleich 1 ist, fo ist

$$d^{-1} a \left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{dx}{l_1} = d^{-1} a \left(\frac{e}{l}\right)^n \frac{e}{l_1} t^n dt.$$

Es fei ae^{n+1}, was wir, da in die Lücken l und l_1 in dem Ausdrucke $a\left(\frac{e}{l}\right)^n \frac{e}{l_1}$ diefelbe Grösse e eintritt, ftatt diefes Ausdruckes fetzen können, mit b bezeichnet, fo erhalten wir

$$d^{-1} a \left(\frac{x}{l}\right)^n \frac{dx}{l_1} = d^{-1} b t^n dt = \frac{1}{n+1} b t^{n+1},$$

da der letzte Ausdruck mit t verschwindet und nach t differenziirt $bt^n dt$ liefert, alfo

$$= \frac{1}{n+1} a e^{n+1} t^{n+1} = \frac{1}{n+1} a x^{n+1}.$$

490. Wenn die Reihe $\sum a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1}$, in welcher a_α einen Ausdruck mit α Lücken l und einer Lücke l_1 darstellt, eine ächte ist, fo ist

$$d^{-1} \sum a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1} = \sum \frac{a_\alpha}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

Hosted by Google

Beweis. Man hat (nach 484)

$$d^{-1}\sum \overline{a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1}} = \sum \overline{d^{-1} a_\alpha \left(\frac{x}{l}\right)^\alpha \frac{dx}{l_1}}$$

$$= \sum \overline{\frac{a_\alpha}{\alpha+1} x^{\alpha+1}} \quad \text{(nach 489).}$$

Anm. Durch diese Formel, welche nur dann das allseitige Integral darstellt, wenn die Bedingung allseitiger Integrirbarkeit (486) erfüllt wird, ist die Aufgabe der Integration von Differenzialausdrücken allgemein gelöst. Da es uns hier nur auf die Darstellung der Integralrechnung in ihren wesentlichsten Zügen ankommt, so können wir mit dieser Lösung der Aufgabe uns hier begnügen.

§. 2. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine Zahlgrösse ist.

491. Erklärung. Einen gegebenen Verein von Differenzialgleichungen (der aber auch aus einer einzigen Gleichung bestehen kann) vollständig integriren, heisst die sämmtlichen Vereine von Gleichungen finden, welche keine Differenziale mehr enthalten, und von denen jeder Verein die Eigenschaft hat, dass, wenn er erfüllt ist, auch der gegebene Verein erfüllt sei; jeder solche Verein heisst ein (den gegebenen Verein) integrirender Verein. Wenn also A ein Verein von Differenzialgleichungen und B ein ihn integrirender Verein ist, so heisst das 1) B enthält keine Differenziale mehr und 2) sobald die Gleichungen des Vereins B als richtig vorausgesetzt sind, so lassen sich daraus die Gleichungen des Vereines A als richtig nachweisen.

Anm. Es soll in diesem §. vorausgesetzt werden, dass, wenn alle Variabeln als veränderliche Zahlgrössen aufgefasst werden, von einer derselben (t) alle übrigen $(x_1, \cdots x_n)$ abhängen. Soll diese Abhängigkeit durch die gegebenen Differenzialgleichungen so genau bestimmt werden, als dies überhaupt durch Differenzialgleichungen möglich ist, so müssen so viel (n) von einander unabhängige Differenzialgleichungen gegeben sein, als es abhängige Variabeln giebt. Ist t die unabhängige (variable) Zahlgrösse und sind $x_1, \cdots x_n$ die abhängigen Zahlgrössen, so können wir ein System von n Einheiten e_1, $e_2, \cdots e_n$ annehmen und $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = x$ setzen. Da t als die unabhängige Variable angenommen ist, so werden alle in den gegebenen Differenzialgleichungen vorkommenden Differenzialquotienten

Hosted by Google

nach t genommen ſein müssen. Wenn dieſe Differenzialquotienten bis zur m-ten Ordnung aufsteigen, ſo wird jede der n Gleichungen die Form haben, dass eine Zahlfunktion von t, x und den Differenzialquotienten von x bis zur m-ten Ordnung hin gleich 0 geſetzt ist. Sind nun $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \cdots f_n = 0$ dieſe n Gleichungen, ſo ſetze man $e_1 f_1 + \cdots e_n f_n = f$, ſo haben wir eine Gleichung

$$f\left(t, x, \frac{d}{dt}x, \cdots \frac{d^m}{dt^m}x\right) = 0$$

aufzulöſen, in welcher t eine Zahlgrösse ist, hingegen x und die Funktion f aus n Einheiten numerisch ableitbar ſind. Die Löſung dieſer Gleichung bildet alſo den Gegenstand dieſes §. Zunächst behandeln wir die Differenzialgleichungen erster Ordnung, d. h. den Fall, wo $m = 1$ ist.

492. Aufgabe. Die Gleichung $f(t, x, \delta x) = 0$, in welcher t eine Zahlgrösse, x und $f(t, x, \delta x)$ Grössen ſind, die aus n Einheiten ableitbar ſind, und δx das Differenzial von x nach t bezeichnet, zu integriren; wobei vorausgeſetzt wird, dass ſich $f(t, x, \delta x)$ nicht aus weniger als n Einheiten ableiten lasse.

Auflöſung. Es ſeien $e_1, \cdots e_n$ die Einheiten, aus denen $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$ und $f = e_1 f_1 + \cdots e_n f_n$ numerisch abgeleitet ſind. Es wird vorausgeſetzt, dass die Gleichungen $f_1 = 0, \cdots f_n = 0$, welche in $f = 0$ enthalten ſind, nicht von einander abhängig ſind, d. h. dass keine derſelben aus den übrigen ſich mit Nothwendigkeit ergebe. Denn dann würde ſich in der Gleichung $f = 0$, f aus weniger als n Einheiten numerisch ableiten lassen, was oben ausgeschlossen wurde. Es ſind hier $f_1, \cdots f_n$ Funktionen der Zahlgrössen, $t, x_1, \cdots x_n, \delta x_1, \cdots \delta x_n$. Man bestimme aus einer der Gleichungen $f_1, \cdots f_n$ eine der Unbekannten $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ und ſetze den gefundenen Werth in die übrigen Gleichungen ein, mit den ſo erhaltenen, und überhaupt mit den jedesmal noch übrig bleibenden Gleichungen, ſo fern ſie noch eine der Variabeln $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ enthalten, verfahre man ebenſo, ſo erhält man zuletzt entweder aus der zuletzt übrig bleibenden Gleichung den Werth der letzten jener Unbekannten, und dadurch dann nach und nach alle jene Unbekannten $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ als Funktionen von $t, x_1, \cdots x_n$, d. h. δx als Funktion von t und x, oder es ſind aus der letzten oder auch ſchon aus den letzten

Hosted by Google

m Gleichungen die ſämmtlichen Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ verſchwunden. In dieſem Falle bleiben m Gleichungen übrig, welche nur Beziehungen zwiſchen t, $x_1, \cdots x_n$ ausdrücken, und zwar müſſen dieſe Gleichungen alle von einander unabhängig ſein, weil im entgegengeſetzten Falle auch die n urſprünglichen Gleichungen von einander abhängig wären. Dieſe m Gleichungen bilden dann einen Theil der geſuchten Integralgleichungen. Durch ſie kann man m der Werthe t, $x_1, \cdots x_n$ durch die übrigen $n - m + 1$ ausdrücken, und dadurch reduciren ſich die $n - m$ erſten Differenzialgleichungen (vermittelſt welcher man $n - m$ der Unbekannten $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ ausdrückte) auf $n - m$ Gleichungen, in welchen ausſer t nur $n - m$ der Grössen $x_1, \cdots x_n$ und die entſprechenden $n - m$ der Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_n$ vorkommen; und durch welche ſich dieſe letzteren als Funktionen der erſteren darſtellen laſſen. Somit kommt es nur auf die Integration der Gleichungen von der Form $\delta x = f(t, x)$, d. h. $dx = f(t, x)dt$ an. Dieſe Integration ſoll in den nächſtfolgenden Nummern behandelt werden.

493. Wenn

$$dx = f(t)dt$$

iſt, wo t eine Zahlgrösse und x eine aus einem Syſteme von n Einheiten ableitbare Grösse iſt, ſo iſt

$$x = d^{-1}f(t)dt + c,$$

wo c eine (aus n Einheiten ableitbare) willkürliche Konſtante iſt.

Beweis. Es ſei $d^{-1}f(t)dt$ gleich y geſetzt, ſo iſt (nach 478) $dy = f(t)dt$, alſo $dx - dy = 0$, d. h. (nach 484) $d(x - y) = 0$, alſo (nach 475) $x - y$ konſtant. Dieſe Konſtante, welche mit x von gleicher Gattung, alſo aus n Einheiten ableitbar iſt, ſei c, ſo hat man $x = y + c = d^{-1}f(t)dt + c$.

494. Wenn

(a) $\delta x = f(x, t)$

iſt, und man überall mit δ den allgemeinen Differenzialquotienten nach t (auch x als von t abhängig gedacht), hingegen unter $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dt}$ die partiellen Differenzialquotienten in Bezug auf den Verein der Variabeln x, t, von denen die erſte eine

Hosted by Google

extenſive Grösse, die letztere eine Zahlgrösse darstellt, bezeichnet: ſo ist

$$(b)\quad \begin{cases} \delta^2 x = \frac{d}{dt} f + f\frac{d}{dx} f \\ \delta^3 x = \frac{d}{dt}(\delta^2 x) + f\frac{d}{dx}(\delta^2 x) \text{ u. ſ. w.} \\ \delta^{r+1} x = \frac{d}{dt}(\delta^r x) + f\frac{d}{dx}(\delta^r x), \end{cases}$$

und wenn man

$$\delta^{r+1} x = f_r(x, t)$$

ſetzt, ſo ist

$$(c)\quad x = c + f(c, 0)\cdot t + f_1(c, 0)\frac{t^2}{2} + f_2(c, 0)\frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist, nämlich der Werth, den x annimmt, wenn t null wird, und wo vorausgeſetzt wird, dass die Reihe auf der rechten Seite eine ächte ſei. Aus der Gleichung (d) findet man auch c als Funktion von x und t, nämlich:

$$(d)\quad c = x - f(x, t)t + f_1(x, t)\frac{t^2}{2} - f_2(x, t)\frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Beweis. Die Formeln (b) ergeben ſich unmittelbar aus (a), indem, wenn φ eine beliebige Funktion von x und t ist, und x als von t abhängig gedacht wird, $d\varphi = \frac{d}{dx}\varphi \cdot dx + \frac{d}{dt}\varphi \cdot dt$, alſo $\frac{d\varphi}{dt}$, d. h. $\delta\varphi = \frac{d}{dx}\varphi \cdot \delta x + \frac{d}{dt}\varphi$ ist; es ist aber nach (a) $\delta x = f$, alſo erhält man $\delta\varphi = f\frac{d}{dx}\varphi + \frac{d}{dt}\varphi$, woraus die Formeln (b) hervorgehen, indem man statt φ nach und nach δx, $\delta^2 x, \cdots \delta^r x$ ſetzt. Dann aber ergiebt ſich die Formel (c) unmittelbar aus dem Taylor'ſchen (Maclaurin'ſchen) Satze (470). Setzen wir $x = F(t)$, ſo können wir den Taylor'ſchen Satz auch in der Form darſtellen

$$F(t + \tau) = x + f(x, t)\tau + f_1(x, t)\frac{\tau^2}{2!} + \cdots,$$

oder, wenn wir $\tau = -t$ ſetzen,

$$F(0) = x - f(x, t)t + f_1(x, t)\frac{t^2}{2!} - f_2(x, t)\frac{t^3}{3!} + \cdots,$$

Hosted by Google

F(0) ist aber der Werth von $x = F(t)$ für $t = 0$, d. h. F(0) ist gleich c, fomit auch Gleichung (d) bewiefen.

Anm. Es verfteht fich von felbst, dass die willkürliche Konstante c mit x von gleicher Gattung ist, und alfo n numerische Konstanten einschliesst, wenn x aus einem Systeme von n Einheiten ableitbar ist. Die Integrationsgleichung in der Form (d) ist von befonderem Interesse, in fo fern in ihr eine Funktion von x und t einer Konstanten gleich gefetzt ist, und zwar derjenigen Konstanten, welcher x gleich wird, wenn $t = 0$ wird, worauf wir im folgenden §. zurückkommen werden. Wir haben oben die Differenzialquotienten $\delta^2 x$, $\delta^3 x, \cdots$ fortschreitend jeden aus dem nächstvorhergehenden abgeleitet. Es ist von Interesse, auch eine unmittelbare Darstellung diefer Differenzialquotienten als Funktionen von x und t zu verfuchen; was in dem folgenden Satze geschehen ist, dessen fich leicht ergebenden aber etwas umständlichen Beweis ich dem Lefer überlasse.

495. Wenn in dem Sinne von 494

$$\delta x = f(x, t)$$

ist, fo ist

$$\delta^{r+1} x = \sum \alpha_{a, \mathfrak{a}, b, \mathfrak{b} \ldots} f^{\mathfrak{f}} \cdot \frac{d^{a+\mathfrak{a}}}{dt^a dx^{\mathfrak{a}}} f \cdot \frac{d^{b+\mathfrak{b}}}{dt^b dx^{\mathfrak{b}}} f \cdot \cdots,$$

wo fich die Summe auf alle möglichen ganzen, aber nicht negativen Werthe a, $\mathfrak{a}$, b, $\mathfrak{b}, \cdots \mathfrak{f}$ bezieht, welche den Bedingungen unterworfen find, dass $\mathfrak{f} = 1 + (\mathfrak{a} - 1) + (\mathfrak{b} - 1) + \cdots$, dass ferner $a + \mathfrak{a} + b + \mathfrak{b} + \cdots = r$, und die Summen $a + \mathfrak{a}$, $b + \mathfrak{b}, \cdots$ alle grösser als null feien, und wo

$$\alpha_{a, \mathfrak{a}, b, \mathfrak{b} \ldots} = \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - 1)(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} - 2) \cdots}{(r - a)(r - a - b - 1)(r - a - b - c - 2) \cdots} \cdot \frac{n!}{a!\,\mathfrak{a}!\,b!\,\mathfrak{b}! \cdots}$$

ist.

496. Aufgabe. Die Gleichung

$$f(\delta^m x, \delta^{m-1} x, \cdots \delta^0 x, t) = 0,$$

wo x fowohl als f aus einem Systeme von n Einheiten ableitbar find, t eine Zahlgrösse darstellt, δ der allgemeine Differenzialquotient nach t (x als von t abhängig gedacht) bezeichnet, und $\delta^0 x$ statt x geschrieben ist, zu integriren.

Auflöfung. Man fetze $\delta^0 x = p_0$, $\delta x = p_1, \cdots \delta^{m-1} x = p_{m-1}$, fo wird $\delta^m x = \delta p_{m-1}$ und man hat die m Gleichungen:

Hosted by Google

$$\delta p_0 = p_1$$
$$\delta p_1 = p_2$$
$$\vdots$$
$$\delta p_{m-2} = p_{m-1}$$

und die Gleichung $f(\delta p_{m-1}, p_{m-1}, \cdots p_1, p_0, t) = 0$. Aus der letzten Gleichung bestimme man δp_{m-1}, es sei

$$\delta p_{m-1} = \varphi(p_0, p_1, \cdots p_{m-1}, t).$$

Nun nehme man ausser den n Einheiten $e_1, \cdots e_n$, aus denen x abgeleitet ist, noch m neue Einheiten $e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots e^{(m-1)}$ an und multiplicire die obigen m Gleichungen beziehlich mit $e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots e^{(m-1)}$ und addire. Man setze ferner

$$p_0 e^{(0)} + p_1 e^{(1)} + \cdots + p_{m-1} e^{(m-1)} = p$$

und

$$p_1 e^{(0)} + p_2 e^{(1)} + \cdots + p_{m-1} e^{(m-2)} + e^{(m-1)} \varphi(p_0, p_1, \cdots p_{m-1}, t) = F(p, t),$$

so sind p und F aus den nm Einheiten $e^{(r)} e_s$ (wo r jeden der m Werthe 0 bis m — 1, und s jeden der n Werthe 1 bis n annehmen kann) ableitbar, und man erhält die Gleichung

$$\delta p = F(p, t).$$

Diese Gleichung ist nach der Methode von 496 zu integriren und liefert eine aus nm Einheiten $(e^{(r)} e_s)$ ableitbare willkürliche Konstante.

Anm. Hierdurch ist die für diesen §. vorgesteckte Aufgabe durch Anwendung unendlicher Reihen ganz allgemein gelöst, denn auch die sogenannten besonderen Auflösungen sind, wie dies schon die Allgemeinheit der angewandten Beweismethode zu erkennen giebt, in der oben mitgetheilten allgemeinen Auflösungsmethode vollständig mit eingeschlossen. Da jedoch diejenigen Differenzialgleichungen, welche in Bezug auf die abhängige Variable (x) und deren Differenziale von erstem Grade sind, und welche die unabhängige numerische Variable (t) nur in Gliedern enthalten, in denen jene Variable und deren Differenziale nicht vorkommen, durch Gleichungen von endlicher Form integrirbar sind, so will ich diesen Fall hier noch behandeln.

498. Die Gleichung

$$(a) \quad \delta x + Ax = 0,$$

in welcher δ und x die Bedeutung der vorigen Nummern haben, A aber einen Bruch mit n Nennern (377 ff.) darstellt, wird, wenn $m_1, \cdots m_n$, die wir alle von einander verschieden

Hosted by Google

vorausfetzen, die n Hauptzahlen des Bruches A, und $a_1, \cdots a_n$ die zugehörigen Hauptgebiete erster Stufe (388, 389) find, integrirt durch die Gleichung

$$(b) \quad x = \sum \alpha_\alpha a_\alpha e^{-m_\alpha t},$$

wo e die Bafis des natürlichen Logarithmenfystems ist, und $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ willkürliche konstante Zahlen bezeichnen, und die Summe fich auf $\alpha = 1$ bis n bezieht. Die n Werthe $m = m_1, \cdots m_n$ find durch die Gleichung n-ten Gradès

$$(c) \quad [(A - m)^n] = 0$$

bestimmt und die n Grössen $a_1, \cdots a_n$ durch die Gleichung

$$(d) \quad a_r \equiv [(A - m_r)^{n-1}].$$

Beweis. Dass die n Hauptzahlen $m = m_1, m_2, \cdots m_n$ die n Wurzeln der Gleichung (c) und die n zugehörigen Hauptgebiete $a_1, \cdots a_n$ durch die Gleichung (d) bestimmt find, folgt fogleich aus 388 und 389, womit noch die Anmerkung zu 383 zu vergleichen ist. Die Hauptgebiete $a_1, \cdots a_n$ haben (nach 389) die Eigenschaft, dass fie in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen und $Aa_r = m_r a_r$ ist. Es muss fich alfo x aus $a_1, \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen. Es fei

$$(*) \quad x = \sum x_\alpha a_\alpha$$

der Ausdruck diefer Ableitung, fo verwandelt fich die Gleichung (a) in

$$0 = \sum a_\alpha \delta x_\alpha + \sum A a_\alpha \cdot x_\alpha,$$

alfo da $Aa_r = m_r a_r$ ist, fo erhalten wir

$$0 = \sum a_\alpha (\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha).$$

Da hier $\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha$ eine Zahlgrösse ist, und $a_1, \cdots a_n$ in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, fo hat man (nach 28) $\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha = 0$, d. h. $dx_\alpha = -m_\alpha x_\alpha dt$, alfo

$$x_\alpha = \alpha_\alpha e^{-m_\alpha t},$$

wo α_α eine willkürliche konstante Zahl ist. Setzen wir diefen Werth in die obige Gleichung (*) ein, fo erhalten wir

$$x = \sum \alpha_\alpha e^{-m_\alpha t} \cdot a_\alpha.$$

Anm. Es find hier die Hauptzahlen des Bruches A als verschieden von einander vorausgefetzt. Sind einige derfelben gleich, fo gelangt man leicht zu dem Refultate, wenn man in bekannter Weife diejenigen unter ihnen, welche gleich werden follen, zunächst als unendlich wenig von einander verschieden fetzt, dann x nach dem

Hosted by Google

obigen Satze entwickelt, und endlich, nachdem man die unendlich kleinen Differenzen aus den Nennern weggeschafft hat, diese Differenzen ganz verschwinden lässt. Ob Wurzeln imaginär werden oder nicht, ist für die ganze Behandlung gleichgültig; auch kann man die imaginären Formen der Endresultate leicht in reelle Formen umsetzen.

499. Wenn

$$(a)\quad \delta x + Ax = f(t)$$

ist, wo δ, x, A, t die Bedeutung wie in 498 haben, so wird die obige Gleichung, wenn man auch den Grössen $m_1, \cdots m_n$, $a_1, \cdots a_n$ dieselbe Bedeutung giebt, wie dort, und

$$(b)\quad f(t) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots a_n f_n$$

ist, und $d^{-1} f_r e^{m_r t} dt = y_r$ gesetzt wird, integrirt durch die Gleichung

$$(c)\quad x = \sum (y_\alpha + \alpha_\alpha) e^{-m_\alpha t} a_\alpha,$$

in welcher $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ willkürliche Konstanten sind.

Beweis. Da $a_1, \cdots a_n$ (nach 389) in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, so lassen sich sowohl f (wie oben geschehen), als auch x aus ihnen numerisch ableiten. Es sei

$$*\quad x = \sum a_\alpha x_\alpha,$$

so hat man, da (nach 389) $Aa_\alpha = m_\alpha a_\alpha$ ist, aus der Gleichung (a)

$$0 = \sum a_\alpha (\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha - f_\alpha),$$

also (nach 28) $\delta x_\alpha + m_\alpha x_\alpha - f_\alpha = 0$, wo alle Grössen Zahlgrössen sind, d. h. $dx_\alpha + m_\alpha x_\alpha dt = f_\alpha dt$. Setzt man hier $x_\alpha = (y_\alpha + \alpha_\alpha) e^{-m_\alpha t}$, wo y_α eine Funktion von t ist, die mit t verschwindet, und α_α konstant ist, so erhält man, indem man dies in die vorige Gleichung einsetzt, $dy_\alpha = f_\alpha e^{-m_\alpha t} dt$, also (nach 477) $y_\alpha = d^{-1} f_\alpha e^{-m_\alpha t} dt$, wie oben. Setzt man dann statt x_α den gefundenen Werth in die Gleichung * ein, so erhält man die zu erweisende Gleichung.

Anm. Die Integration einer Gleichung, welche Differenzialquotienten höherer Ordnung nach t enthält, im Uebrigen aber die Form der Gleichungen 498 und 499 hat, reducirt sich nach der Methode in 497 auf Gleichungen, welche ganz diese Form der Gleichungen 498 und 499 haben, nur dass statt der n Einheiten $e_1, \cdots e_n$ hier, wenn die Differenzialgleichung von m-ter Ordnung ist, mn Einheiten hervortreten.

Hosted by Google

§. 3. Integration von Differenzialgleichungen, wenn die unabhängige Variable eine extensive Grösse ist.

500. Die Integration jeder beliebigen partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung lässt sich zurückführen auf die Integration einer Differenzialgleichung der Form $Xdx = 0$, in welcher x eine extensive Grösse, Xdx eine Zahlgrösse darstellt.

Beweis. Wenn $x_1, \cdots x_n$ die unabhängigen Variabeln und x_0 die von ihnen abhängige Variable ist, und $x_0, x_1, \cdots x_n$ Zahlgrössen sind, so wird jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen diesen Grössen sich in Form einer Gleichung darstellen lassen, welche zwischen den Grössen $x_0, x_1, \cdots x_n, \frac{d}{dx_1}x_0, \frac{d}{dx_2}x_0, \cdots \frac{d}{dx_n}x_0$ stattfindet. Bezeichnen wir die Grössen $\frac{d}{dx_1}x_0, \cdots \frac{d}{dx_n}x_0$ mit $p_1, \cdots p_n$, so können wir vermittelst jener Gleichung eine der Grössen $p_1, \cdots p_n$, z. B. p_n, als Funktion der sämmtlichen Grössen $x_0, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_{n-1}$ darstellen, und also der zu integrirenden partiellen Differenzialgleichung die Form geben

$$(*) \quad p_n = f(x_0, x_1, \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}) = f.$$

Nun ist $dx_0 = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots p_n dx_n$. Und umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, so sind $p_1, \cdots p_n$ die partiellen Differenzialquotienten von x_0 nach $x_1, x_2, \cdots x_n$. Setzt man daher in dieser Gleichung statt p_n seinen Werth aus der vorigen, so ist, wenn die Gleichung

$$(**) \quad dx_0 = p_1 dx_1 + \cdots p_{n-1} dx_{n-1} + f dx_n$$

erfüllt ist, auch die gegebene erfüllt. Jeder Verein von Gleichungen also, welcher die letztere integrirt, erfüllt auch die erstere und es kommt also nur auf die Integration dieser letzteren an. Setzen wir nun $e_0, e_1, \cdots e_n$ als ein System von Einheiten und $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$,, also $dx = e_0 dx_0 + e_1 dx_1 + \cdots e_n dx_n$, und setzen ferner, wenn l eine Lücke darstellt,

$$X = [l|e_0] - p_1[l|e_1] - p_2[l|e_2] - \cdots - p_{n-1}[l|e_{n-1}] - f[l|e_n],$$

Hosted by Google

ſo verwandelt ſich die Gleichung (**) in

$$Xdx = 0,$$

auf deren Integration es alſo nur ankommt.

Anm. Die Integration der Gleichung $Xdx = 0$, auf welche es hier ankommt, ist nach der berühmten Pfaff'schen Methode, wie ſie namentlich durch Jacobi (Crelle Journal B. 2, p. 347 und B. 17, p. 138) vereinfacht ist, vollständig zu löſen, oder genauer, auf die im vorigen §. behandelten Integrationen zurückzuführen. Die Darstellung und Ergänzung dieſer Methode durch Anwendung extenſiver Grössen, durch welche ſich die löſenden Formeln grösstentheils in einer erstaunenswerthen Einfachheit darstellen, ſollen den Hauptgegenstand der folgenden Entwickelung bilden. Doch wollen wir zuvor den aufgestellten Satz auch auf partielle Differenzialgleichungen höherer Ordnungen ausdehnen.

501. Die Integration jeder beliebigen partiellen Differenzialgleichung von höherer als erster Ordnung lässt ſich zurückführen auf die Integration einer Differenzialgleichung der Form $Xdx = 0$, in welcher ſowohl x als Xdx extenſive Grössen darstellen.

Beweis. Es ſei z die abhängige Variable und $y_1, \cdots y_n$ ſeien die unabhängigen Variabeln, wo z, $y_1, \cdots y_n$ Zahlgrössen darstellen. Um die partiellen Differenzialquotienten höherer Ordnung bequem bezeichnen zu können, nehmen wir zunächst ein System von n Einheiten $e_1, \cdots e_n$ an und ſetzen $y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n = y$, ſo werden die verschiedenen Differenzialquotienten bis zur m-ten Ordnung hin ſich darstellen lassen in der Form $\frac{d}{dy}z$, $\frac{d^2}{dy^2}z, \cdots \frac{d^m}{dy^m}z$. Hier stellt jeder dieſer Differenzialquotienten einen Ausdruck mit ſo viel (unter einander vertauschbaren) Lücken dar, als die Ordnung des Differenzialquotienten beträgt, und zwar in der Art, dass der Ausdruck nach Ausfüllung dieſer Lücken durch die Einheiten von y, einen Zahlausdruck liefert und zwar jedesmal einen der gewöhnlichen (numerischen) Differenzialquotienten; z. B. stellt $\frac{d^2}{dy^2}z$ einen Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken dar und zwar ſo, dass $\frac{d^2}{dy^2}z \cdot e_1e_2 = \frac{d^2}{dy_1dy_2}z$ ist u. ſ. w. Es ſeien nun

$$\frac{d}{dy}z = p_1,\ \frac{d^2}{dy^2}z = p_2, \cdots \frac{d^m}{dy^m}z = p_m$$

gefetzt, ſo wird die partielle Differenzialgleichung in ihrer vollſtändigsten Allgemeinheit die Form annehmen

(*) $f(y, z, p_1, p_2, \cdots p_m) = 0.$

Von den hierin vorkommenden Variabeln ist nur z eine Zahlgrösse, alle übrigen ſind extenſive Grössen, und zwar enthält y, vermöge der ihm beigelegten Bedeutung, n veränderliche Zahlgrössen, und jede der Grössen $p_1, \cdots p_m$ ſo viel veränderliche Zahlgrössen, als es Kombinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur ſo vielten Klasse giebt, als der Index jener Grösse beträgt. Die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen, welche in den ſämmtlichen in der obigen Gleichung (*) vorkommenden Variabeln enthalten ſind, ſei r, ſo kann man vermöge der Gleichung (*) eine dieſer Variabeln durch die übrigen $r - 1$ ausdrücken. Es bleiben alſo noch $r - 1$ Variabeln übrig. Jetzt erweitere man das System der n Einheiten $e_1, \cdots e_n$ ſo, dass es nun $r - 1$ Einheiten enthält und multiplicire mit jeder derſelben eine der $r - 1$ veränderlichen Zahlgrössen, und ſetze die Summe dieſer Produkte $= x$, ſo enthält x die ſämmtlichen $r - 1$ veränderlichen Zahlgrössen. Nun hat man ferner vermöge der oben angegebenen Bedeutung der Grössen $p_1, \cdots p_m$

(**) $dz = p_1 dy,\ dp_1 = p_2 dy, \cdots dp_{m-1} = p_m dy,$

und wenn dieſe Gleichungen erfüllt ſind, und zugleich vermittelst der Gleichung (*) eine der r veränderlichen Zahlgrössen, welche in jenen Gleichungen (**) enthalten ſind, durch die $(r - 1)$ übrigen ausgedrückt ſind, ſo ist damit die gegebene partielle Differenzialgleichung (*) erfüllt. Folglich kommt es nur darauf an, die Gleichungen (**) zu integriren. Von dieſen ist nur die erste eine Zahlgleichung, die folgenden enthalten, da dp_1 mit p_1 von gleicher Grössengattung ist, u. ſ. w. jedesmal ſo viel Zahlgleichungen als in den Grössen $p_1, \cdots p_{m-1}$ veränderliche Zahlgrössen enthalten ſind. Die Anzahl der ſämmtlichen Zahlgleichungen, welche in den obigen Gleichungen (**) enthalten ſind, ſei s, ſo ist s kleiner als r (nämlich um ſo viel als die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen

Hosted by Google

beträgt, welche in y und p_m zuſammen enthalten ſind). Man bringe dieſe Zahlgleichungen auf die Form, dass die rechte Seite null ist, und multiplicire ſie nach der Reihe mit den Einheiten $e_1, \cdots e_s$, ſo werden ſie die Form haben $e_1X_1dx = 0$, $e_2X_2dx = 0, \cdots, e_sX_sdx = 0$. Dann ſind dieſe Gleichungen gleichbedeutend der einen Gleichung $e_1X_1dx + e_2X_2dx + \cdots + e_sX_sdx = 0$, d. h. $(e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots e_sX_s)dx = 0$; ſetzt man alſo $e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots e_sX_s = X$, ſo werden jene Gleichungen (**) gleichbedeutend der Gleichung

$$Xdx = 0,$$

auf deren Integration es alſo allein ankommt.

Anm. 1. Es ergiebt ſich leicht, dass die Zahlen r und s von n und m auf die Weiſe abhängen, dass

$$r = n + \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots m}, \quad s = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots m-1}$$

ist, ferner dass in dx, wie es in der Gleichung Xdx hervortritt, nicht die Differenziale aller r Unbekannten enthalten ſind, ſondern die Differenziale der zu p_m gehörigen veränderlichen Zahlgrössen in dx nicht erscheinen, die Zahl der numerischen Differenziale, die in dx hervortreten, ist $s + n$. Als Beispiel ſei die partielle Differenzialgleichung 2-ter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gewählt. Man erhält damit, indem wir die Bezeichnung der Unbekannten ändern, drei Gleichungen der Form

$$dz = pdx + qdy$$
$$dp = rdx + sdy$$
$$dq = sdx + tdy,$$

welche die acht Variabeln z, x, y, p, q, r, s, t enthalten, von denen eine vermittelst der gegebenen partiellen Differenzialgleichung durch die übrigen ausgedrückt werden kann; ferner kommen in ihr fünf Differenziale vor (dx, dy, dz, dp, dq).

Anm. 2. Man ſieht, dass die Integration der Gleichung Xdx, wenn dx und Xdx extenſive Grössen darstellen, die allgemeinste, ja man kann ſagen, die einzige Aufgabe der Integralrechnung ist, indem auch die in den früheren Abschnitten behandelten Aufgaben der Integralrechnung ſich hierauf zurückführen lassen, und auch, da jede Zahlgrösse zugleich als specielle Gattung der extenſiven Grössen erscheint, die vorher (in 500) behandelte Aufgabe in ihr enthalten ist. Mit der Löſung dieſer Aufgabe wäre man alſo am Ziele der Integralrechnung angelangt. Allein die Pfaff'sche Methode ist für den Fall, wo auch Xdx eine extenſive Grösse ist, d. h. wo mehrere numerische Differenzialgleichungen hervortreten, nicht mehr anwendbar, und die Methoden, welche man für die Auflöſung der partiellen Differenzial-

Hosted by Google

gleichungen höherer Ordnungen anwendet, und welche auch für die Löfung diefer allgemeineren Aufgabe förderlich fein würden, haben nur eine äusserst beschränkte Sphäre. Daher werde ich nur den Fall ins Auge fassen, wo Xdx eine Zahlgrösse ist, und werde auf den allgemeineren Fall nur gelegentlich hindeuten.

502. Wenn die Gleichung

$$Xdx = 0,$$

(in welcher, wie im Folgenden überall, Xdx eine Zahlgrösse, X eine Funktion von x, und x aus einem Systeme von m Einheiten $e_1, \cdots e_m$ numerisch ableitbar ist) durch einen Verein von n Zahlgleichungen $u_1 = c_1, \cdots u_n = c_n$, wo $c_1, \cdots c_n$ konstant find, integrirt wird, fo lässt fich Xdx auf die Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

bringen.

Beweis 1. Es fei $x = x_1 e_1 + \cdots x_m e_m$, fo find $u_1, \cdots u_n$ als Funktionen von $x_1, \cdots x_m$ aufzufassen. Da nun die Gleichungen $u_1 = c_1, \cdots u_n = c_n$ einen die Gleichung $Xdx = 0$ integrirenden Verein bilden, fo heisst das (nach 491), es muss fich aus jenen Gleichungen die letztere ableiten lassen, d. h. wenn man aus den Gleichungen $du_1 = 0, \cdots du_n = 0$, welche in Bezug auf die m Differenziale $dx_1, \cdots dx_m$ homogen vom ersten Grade find, n diefer letzteren Grössen durch die übrigen ausdrückt, und diefe Ausdrücke in Xdx einführt, fo muss dadurch Xdx identisch gleich null werden, oder, was nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen dasfelbe ist, es müssen fich Grössen $U_1, U_2, \cdots U_n$ finden lassen, welche die Gleichung

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$$

erfüllen.

2. (Ich füge einen zweiten Beweis hinzu, um zugleich die Grössen $U_1, \cdots U_n$ finden zu lehren.) Die Funktionen $u_1, \cdots u_n$ können als von einander unabhängig aufgefasst werden, weil fonst die gegebene Gleichung schon durch einen Theil derfelben integrirt werden würde. Sind aber $u_1, \cdots u_n$ von einander unabhängige Funktionen von $x_1, \cdots x_m$, fo lassen fich n diefer letzteren Grössen, z. B. $x_1, \cdots x_n$, als Funktionen der übrigen und der Grössen $u_1, \cdots u_n$ darstellen. Es fei $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = y$, und $x_{n+1} e_{n+1} + \cdots + x_m e_m = z$ ge-

Hosted by Google

ſetzt, und ſeien die auf den Verein der Variabeln $u_1, \cdots u_n, z$ bezüglichen partiellen Differenzialquotienten erster Ordnung nach der Reihe mit $\delta_1, \cdots \delta_n, \delta$ bezeichnet, von denen alſo der letzte nach der extenſiven Grösse z genommen ist, ſo wird

$$dy = \delta_1 y \cdot du_1 + \cdots + \delta_n y \cdot du_n + \delta y \cdot dz,$$

und alſo

$$\begin{aligned} Xdx &= X(dy + dz) \\ &= X\delta_1 y \cdot du_1 + \cdots + X\delta_n y \cdot du_n + (X\delta y + X)dz, \end{aligned}$$

oder wenn wir

$$X\delta_1 y = U_1, \cdots X\delta_n y = U_n$$

ſetzen, ſo wird

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n + (X\delta y + X)dz.$$

Da nun, wenn man $u_1, \cdots u_n$ als konstant ſetzt, Xdx identisch gleich null werden muss, und da dann $du_1, \cdots du_n = 0$ ſind, ſo hat man $(X\delta y + X)dz = 0$, und alſo

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n.$$

Anm. Es gilt dieſer Satz auch, wenn Xdx eine extenſive Grösse ist, und namentlich gilt der zweite der oben mitgetheilten Beweiſe unmittelbar auch für dieſen Fall.

503. Wenn ſich der Ausdruck Xdx (in dem Sinne von 502) auf n Glieder, nämlich auf $U_1 du_1 + \cdots + U_n du_n$ zurückführen lässt, aber nicht auf weniger als n ſolche Glieder, ſo wird die Gleichung

(a) $Xdx = 0$

integrirt durch Vereine von je n von einander unabhängigen Gleichungen, und zwar bilden die folgenden Vereine von je n Gleichungen:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(u_{r+1}, \cdots u_n), \cdots, \; u_r = \varphi_r(u_{r+1}, \cdots u_n) \\ U_1 \dfrac{d}{du_{r+1}} \varphi_1 + \cdots + U_r \dfrac{d}{du_{r+1}} \varphi_r + U_{r+1} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ U_1 \dfrac{d}{du_n} \varphi_1 + \cdots + U_r \dfrac{d}{du_n} \varphi_r + U_n = 0, \end{cases}$$

wo r jeden der Werthe 0, 1, 2, $\cdots$ n annehmen kann, und $\varphi_1, \cdots \varphi_r$ willkürliche Funktionen bezeichnen, das vollſtändige System der integrirenden Vereine. Wenn ins Beſondere $r = 0$ ist, ſo hat man den Verein

Hosted by Google

(c) $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = 0$,

und wenn $r = n$ ist, den Verein

(d) $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2, \cdots, u_n = c_n$,

wo $c_1, \cdots c_n$ willkürliche Konstanten ſind.

Beweis. Die Gleichung Xdx kann nicht durch einen Verein von weniger als n Zahlgleichungen integrirt werden, weil ſonst (nach 502) Xdx auf weniger als n Glieder der Form Udu zurückgeführt werden könnte, was mit der Vorausſetzung ſtreitet. Es kommt alſo darauf an, Vereine von n Gleichungen zu finden, welche die Gleichung $Xdx = 0$ integriren und zwar die ſämmtlichen möglichen Vereine dieſer Art. Es mögen die n von einander unabhängigen Gleichungen $v_1 = 0$, $v_2 = 0, \cdots$, $v_n = 0$ einen die Gleichung $Xdx = 0$ integrirenden Verein bilden, ſo laſſen ſich die Funktionen $v_1, \cdots, v_n$, welche urſprünglich als Funktionen der m Varibeln $x_1, \cdots x_m$ angenommen ſein mögen, zugleich darſtellen als Funktionen von $u_1, \cdots u_n$ und von $n - m$ der Grössen $x_1, \cdots x_m$, z. B. als Funktionen von $u_1, \cdots u_n, x_{n+1}, \cdots x_m$. Wenn alle jene Funktionen $v_1, \cdots v_n$ dann nur $u_1, \cdots u_n$ enthalten, aber von $x_{n+1}, \cdots x_m$ unabhängig ſind, ſo ergeben ſich $u_1, \cdots u_n$ als konſtant, und es tritt der beſondere Fall (d) ein. Wenn aber mindeſtens eine der Funktionen $v_1, \cdots v_n$, z. B. v_n, noch mindeſtens eine der Variabeln $x_{n+1}, \cdots x_m$, z. B. x_m, enthält, ſo läſſt ſich, vermittelſt der Gleichung $v_n = 0$, x_m durch die übrigen ($u_1, \cdots u_n, x_{n+1}, \cdots x_{m-1}$) ausdrücken. Führt man dieſen Ausdruck in die übrigen Gleichungen $v_1 = 0, \cdots v_{n-1} = 0$ ein, ſo iſt es möglich, dass in den ſo erhaltenen Gleichungen noch mindeſtens eine der Variabeln $x_{n+1}, \cdots x_{m-1}$ vorkommt, z. B. x_{m-1} in $v_{n-1} = 0$; in dieſem Falle drücke man x_{m-1} vermittelſt dieſer Gleichung durch die noch übrigen Variabeln $u_1, \cdots u_n, x_{n+1}, \cdots x_{m-2}$ aus, und ſetze dieſen Ausdruck in die übrigen Gleichungen ein; und ſo fahre man fort, bis man endlich entweder alle Gleichungen $v_1 = 0, \cdots v_n = 0$ erſchöpft hat, oder bis nur noch ſolche Gleichungen übrig bleiben, die nur $u_1, \cdots u_n$ enthalten. Im erſteren Falle muss (nach 491) der Ausdruck $U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$ identiſch $= 0$ werden, alſo $U_1 = 0, \cdots U_n = 0$, was den beſonderen Fall (c) liefert. Im letzteren Falle mögen zu-

Hosted by Google

letzt r Gleichungen $v_1 = 0, \cdots v_r = 0$ übrig geblieben ſein, welche nur die Variabeln $u_1, \cdots u_n$ enthalten, ſo können wir vermittelst dieſer Gleichungen r der Grössen $u_1, \cdots u_n$ als Funktionen der übrigen darstellen, z. B. $u_1, \cdots u_r$ als Funktionen von $u_{r+1}, \cdots u_n$. Der Verein wird in dieſem Falle stets ein integrirender ſein, wenn nur, von welcher Art auch jene r Funktionen ſein mögen, durch ſie der Ausdruck $U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$ identisch gleich null gemacht wird. Da wir $u_1, \cdots u_r$ als Funktionen von $u_{r+1}, \cdots u_n$ dargestellt haben, ſo erhalten wir

$$\begin{cases} U_1 \frac{d}{du_{r+1}} u_1 + \cdots U_r \frac{d}{du_{r+1}} u_r + U_{r+1} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ U_1 \frac{d}{du_n} u_1 + \cdots U_r \frac{d}{du_n} u_r + U_n = 0, \end{cases}$$

als die nothwendigen, aber ausreichenden Bedingungen, damit in dieſem Falle $U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$ identisch gleich null werde. Somit haben ſich die Vereine b (von welchen (c) und (d) nur specielle Fälle darstellen) als die ſämmtlichen möglichen Vereine ergeben, welche die Gleichung $Xdx = 0$ unter der Vorausſetzung des Satzes integriren.

Anm. Es ist dieſer Satz nach ſeiner einen Seite hin in der angeführten Abhandlung Jacobi's (Crelle Journal B. 2 p. 348) nachgewieſen. Aber es ist dort die wichtigste Seite unſeres Satzes, dass es nämlich ausser den Gleichungsvereinen (b) keinen Verein integrirender Gleichungen gebe, nicht nachgewieſen. Auch ist dort nicht gezeigt, worin der verschiedene Charakter der integrirenden Vereine (b) je nach dem Werthe des Index r bestehe, obgleich Jacobi mehrfach auf die Verschiedenheit dieſes Charakters hinweist. Offenbar war Jacobi auch mit dieſer Seite unſeres Satzes vollkommen vertraut, und es lag nur in dem beſonderen Zwecke jener Abhandlungen, dass er ſich darüber nicht weiter ausspricht. — Man ſieht aus dieſem und dem vorhergehenden Satze, dass es dasſelbe ist, zu ſagen, es lasse ſich $Xdx = 0$ durch Vereine von je n (und nicht weniger als n) Gleichungen integriren, oder zu ſagen, es lasse ſich Xdx (in dem Sinne von 502) auf eine Summe von n (und nicht weniger als n) Glieder der Form Udu zurückführen. Alſo kommt es darauf an, die Bedingungen aufzufinden, unter denen dieſe Reduktion möglich ist, und wenn dieſe Bedingungen erfüllt ſind, die Methode der Reduktion anzugeben. Um beides auf eine leichte Weiſe zu erreichen, wird es

Hosted by Google

zweckmässig ſein, die folgenden Bestimmungen und Sätze über Lückenausdrücke mit nicht vertauschbaren Lücken aufzustellen. Noch bemerke ich, dass der vorstehende Satz nicht mehr gilt, wenn Xdx eine extenſive Grösse ist; und dass, wenn die Reduktion von Xdx auf die möglichst geringste Anzahl von Gliedern der Form Udu vollzogen ist, doch damit noch keineswegs die Integration der Gleichung $Xdx = 0$ gegeben ist. Aber aus 502 folgt, dass, wenn man die ſämmtlichen möglichen Reduktionen dieſer Art kennt, man auch die Gleichung $Xdx = 0$ zugleich vollständig integrirt habe. Und dieſe Betrachtung scheint mir den Weg anzugeben, auf welchem man hoffen kann, zu dieſem letzten Ziele der Integralrechnung zu gelangen.

504. Erklärung. Wenn L einen Ausdruck mit n Lücken gleicher Gattung darstellt, für welche jedoch nicht Vertauschbarkeit der Lücken vorausgeſetzt ist, ſo verstehe ich unter $[La_1a_2 \cdots a_n]$ den Ausdruck, welcher hervorgeht, wenn man $a_1, \cdots a_n$ in allen möglichen Ordnungen in die n Lücken von L eintreten lässt, den erhaltenen Ausdrücken das Zeichen + oder — vorſetzt, je nachdem das kombinatorische Produkt der Grössen, welche nach der Reihe in die n Lücken von L eintreten, dem Produkte $[a_1a_2 \cdots a_n]$ gleich oder entgegengeſetzt ist, und dann die Summe der ſo erhaltenen Glieder durch deren Anzahl dividirt. Wenn L weniger als n, z. B. nur $n - r$ Lücken enthält, ſo verstehe ich unter $[La_1a_2 \cdots a_n]$ den Ausdruck, welcher hieraus hervorgeht, indem man dem L noch r Faktoren 1 voranstellt, von denen man jeden als Ausdruck mit einer Lücke betrachtet, indem nämlich, wenn man dieſe Lücke durch eine Grösse a ausgefüllt denkt, aus 1 die Grösse $1 \cdot a$, d. h. a, hervorgeht. Hierdurch ist dieſer Fall auf den vorigen zurückgeführt. Wenn ins Beſondere L ein Ausdruck mit $n - 1$ Lücken ist, der durch Ausfüllung dieſer Lücken eine Zahlgrösse wird, ſo wird

$$[La_1 \cdots a_n] = \frac{1}{n}(a_1[LA_1] + \cdots a_n[LA_n]),$$

wo A_r (für jeden Index r) alle Grössen $a_1, \cdots a_n$, mit Ausschluss von a_r, als Faktoren enthält und $[a_rA_r] = [a_1a_2 \cdots a_n$ ist. Ich nenne auch dieſe Produkte (wie überhaupt alle welche durch die scharfe Klammer umschlossen ſind, ſ. 94) bezügliche Produkte, und zwar ſetze ich als das Hauptgebiet, auf welches ſie ſich beziehen, das Gebiet der Einheiten, aus

Hosted by Google

welchen die ſämmtlichen Grössen, welche in die Lücken einzutreten fähig ſind, abgeleitet werden können.

505. Wenn L einen Ausdruck mit n Lücken bezeichnet, und

1) $[a_1 \cdots a_n] = [b_1 \cdots b_n]$

ist, ſo ist auch

$$[La_1 \cdots a_n] = [Lb_1 \cdots b_n],$$

und wenn

2) $[a_1 \cdots a_n] = 0$

ist, ſo ist auch

$$[La_1 \cdots a_n] = 0.$$

Beweis. Wenn zwei der Grössen $a_1, \cdots a_n$, z. B. a_r und a_s, einander gleich werden, ſo ordne man die Ausdrücke, welche (nach 504) bei der Entwickelung von $[La_1 \cdots a_n]$ dadurch hervorgehen, dass man $a_1, \cdots a_n$ in allen möglichen Folgen in die Lücken von L eintreten lässt, paarweiſe ſo, dass je zwei derſelben, bei denen ſich die Reihenfolge jener Grössen nur durch die gegenſeitige Stellung von a_r und a_s unterscheiden, ein Paar bilden. Dann werden die Ausdrücke jedes Paares (nach 504) entgegengeſetztes Vorzeichen haben; wenn nun a_r und a_s einander gleich werden, ſo werden dieſe Ausdrücke, abgeſehen von dem entgegengeſetzten Vorzeichen, identisch; alſo wird ihre Summe null, alſo in dieſem Falle auch $[La_1 \cdots a_n] = 0$.

2. Wenn $[a_1 \cdots a_n] = 0$ ist, ſo heisst das (nach 66), es stehen die Faktoren $a_1, \cdots a_n$ in einer Zahlbeziehung, d. h. (nach 2) eine derſelben, z. B. a_n, wird ſich als Vielfachenſumme der übrigen $a_1, \cdots a_{n-1}$ ausdrücken lassen. Führt man dieſen Ausdruck für a_n in $[La_1 \cdots a_{n-1}a_n]$ ein, und löst die dieſen Ausdruck umschliessende Klammer auf, ſo stellt ſich $[La_1 \cdots a_{n-1}a_n]$ als eine Vielfachenſumme von Ausdrücken dar, deren jeder zwei gleiche unter den Grössen $a_1, \cdots a_{n-1}$ enthält, alſo (nach Bew. 1) null ist. Alſo ist auch jene Vielfachenſumme, d. h. $[La_1 \cdots a_n]$, gleich null.

3. Wenn die Reihe der Grössen $a_1, \cdots a_n$ eine einfache lineale Aenderung erleidet (vergl. 71), z. B. a_r ſich in $a_r + \alpha a_s$ verwandelt, wo α eine Zahlgrösse ist, und r und s von ein-

Hosted by Google

ander verschieden sind, so verwandelt sich $[La_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n]$ in $[La_1 \cdots a_r a_{r+1} \cdots a_n] + \alpha[La_1 \cdots a_{r-1} a_s a_{r+1} \cdots a_n]$; der zweite dieser Ausdrücke enthält, da s von r verschieden ist, a_s zweimal, ist also (nach Bew. 1) gleich null, also bleibt der Ausdruck $[La_1 \cdots a_n]$ von unverändertem Werthe, wenn die Reihe der Grössen $a_1 \cdots a_n$ eine einfache lineale Aenderung erfährt, also auch, wenn sie wiederholt eine einfache lineale Aenderung erfährt, d. h. (nach 71) wenn jene Reihe sich überhaupt lineal ändert. Wenn nun $[a_1 a_2 \cdots a_n] = [b_1 b_2 \cdots b_n] \gtrless 0$ ist, so lässt sich (nach 76) die Reihe $b_1, b_2, \cdots b_n$ aus der Reihe $a_1, a_2, \cdots a_n$ durch lineale Aenderung ableiten, wobei, wie eben bewiesen, der Werth von $[La_1 \cdots a_n]$ unverändert bleibt, d. h. es ist dann $[La_1 \cdots a_n] = [Lb_1 \cdots b_n]$.

506. Erklärung. Wenn ein Ausdruck L mit n Lücken die Eigenschaft hat, dass er mit je n Grössen $a_1 \cdots a_n$, die in die Lücken eintreten können, ein Produkt $[La_1 \cdots a_n]$ liefert, welches null ist, so setze ich $[L] = 0$. Wenn ferner ein Produkt $[a_1 \cdots a_n] = 1$ ist, und L n Lücken enthält, so setze ich $[L] = [La_1 \cdots a_n]$.

Anm. Es ist schon früher bei der Behandlung des Potenzwerthes eines Bruches Q (No. 383), obwohl nur gelegentlich, die hier gewählte Bezeichnung angewandt, indem, wenn $e_1, \cdots e_n$ die n Nenner sind, deren Produkt $[e_1 \cdots e_n] = 1$ ist, und $a_1, \cdots a_n$ die zugehörigen Zähler, unter $[Q^n]$ das Produkt $[a_1 \cdots a_n]$ verstanden war. Da nun Q als Lückenausdruck mit einer Lücke aufgefasst werden kann, indem nämlich (für jeden Index r) $Qe_r = a_r$ ist, so wird Q^n ein Ausdruck mit n Lücken, und gehört also $[Q^n]$ zu den hier (in 506) definirten Ausdrücken. Man überzeugt sich leicht, dass auch nach dieser Definition (506) der Ausdruck $[Q_n] = [a_1 \cdot a_2 \cdots a_n]$ wird, und also beide Definitionen in vollkommener Uebereinstimmung stehen. Es hat sich mir die Allgemeinheit der hier (in 504 und 506) aufgestellten Begriffe, und ihre wesentliche Bedeutung für die Analysis erst während der Arbeit ergeben. Sonst würde ich diese Begriffe und die daraus fliessenden Sätze sogleich an ihrer Stelle (im ersten Kapitel dieses Theiles) behandelt haben. Da hier diese Sätze den Gang der Entwickelung unterbrechen, so beschränke ich mich auf diejenigen Sätze, welche für die folgende Darstellung unentbehrlich erscheinen.

507. Wenn L zwei oder mehrere vertauschbare Lücken enthält, so ist $[L] = 0$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass wenn von den n Lücken

Hosted by Google

von L auch nur zwei mit einander vertauschbar ſind, allemal $[La_1, \cdots a_n]$ null ist, was auch $a_1, \cdots a_n$ für Grössen ſein mögen. Denn es ſeien die übrigen Lücken durch beliebige jener Grössen ausgefüllt, ſo geht ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken hervor, dieſer Ausdruck ſei P. Sind nun b und c zwei beliebige Grössen, welche in dieſe zwei Lücken eintreten können, ſo ist, da die Lücken vertauschbar ſind, $Pbc = Pcb$; aber $[Pbc] = \frac{1}{2}(Pbc - Pcb)$, alſo $= 0$, alſo auch $[La_1 \cdots a_n] = 0$, für beliebige Grössen $a_1, \cdots a_n$, d. h. (nach 506) $[L] = 0$.

508. Wenn $A_1, \cdots A_n$ Grössen mit je einer Lücke derſelben Gattung ſind, welche entweder alle, oder doch alle bis auf eine derſelben, nach Ausfüllung dieſer Lücken Zahlgrössen werden, und P ein Ausdruck mit beliebig vielen Lücken ist, ſo ist das Produkt

$$[A_1 \cdots A_n P]$$

ganz den Geſetzen der kombinatorischen Multiplikation (52 ff.) unterworfen und zwar in dem Sinne, dass $A_1, \cdots A_n$ als einfache kombinatorische Faktoren betrachtet werden, namentlich ſind zwei Produkte, welche ſich nur durch die gegenſeitige Stellung zweier dieſer Faktoren unterscheiden, einander entgegengeſetzt, d. h.

(a) $[A_1 \cdot A_r \cdot A_s \cdot A_n P] = [A_1 \cdot A_s \cdot A_r \cdot A_n P]$,

wo beide Seiten der Gleichung ſich nur durch die gegenſeitige Stellung der Faktoren A_r und A_s unterscheiden, und wenn zwei jener Faktoren gleich werden, ſo ist das Produkt null, d. h.

(b) $[A_1 \cdots A_r \cdots A_r \cdots A_n P] = 0$.

Beweis. Betrachtet man z. B. nur die beiden ersten Faktoren A_1 und A_2 und nennt das Produkt der übrigen Q, und ſetzt $e_1, \cdots e_n$ als Einheiten, deren kombinatorisches Produkt 1 ist, ſo ist

$$[A_1 A_2 Q] = [A_1 A_2 Q e_1 e_2 e_3 \cdots e_n].$$

Hier ſollen (nach 504) die Faktoren $e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$ in allen möglichen Ordnungen in die Lücken von $A_1 A_2 Q$ eintreten, und das Vorzeichen wird poſitiv, wenn e_1, e_2, $e_3, \cdots e_n$ entweder in dieſer Ordnung, alſo e_1 in A_1, e_2 in A_2 und die übrigen

Hosted by Google

$e_3 \cdots e_n$ nach der Reihe in Q, eintreten, oder in irgend einer andern Ordnung, welche durch eine gerade Anzahl von Verfetzungen aus jener Ordnung hervorgeht; ganz diefelbe Bedeutung hat aber $[A_2A_1Qe_2e_1e_3 \cdots e_n]$, indem auch hier das Zeichen pofitiv wird wenn e_1 in A_1, e_2 in A_2, und $e_3, \cdots e_n$ in diefer Reihe in Q eintreten u. f. w., alfo ist $[A_1A_2Qe_1e_2e_3 \cdots e_n] = [A_2A_1Qe_2e_1e_3 \cdots e_n]$, letzteres ist aber, da (nach 55) $[e_2e_1e_3 \cdots e_n] = -[e_1e_2e_3 \cdots e_n]$ ist, (nach 505) gleich $-[A_2A_1Qe_1e_2e_3 \cdots e_n]$, alfo $[A_1A_2Q] = -[A_2A_1Q]$. Werden A_1 und A_2 einander gleich, fo folgt aus diefer letzten Formel, dass dann $[A_1A_2Q]$ null wird. Dasfelbe gilt nun aus demfelben Grunde, wenn man ftatt der beiden erften Faktoren des Ausdruckes $[A_1A_2 \cdots A_nP]$ irgend zwei andere, A_r und A_s, betrachtet. Somit gelten die Formeln (a) und (b) und auf ihnen beruhen die übrigen Gefetze der kombinatorischen Multiplikation.

509. Wenn A ein Ausdruck mit einer Lücke und B ein Ausdruck mit $m-1$ Lücken derfelben Gattung ist, und $a_1, \cdots a_m$ Grössen diefer Gattung find, fo ist

$$[ABa_1 \cdots a_m] = A[Ba_1 \cdots a_m] = \frac{1}{m}\sum \overline{Aa_\alpha}[BA_\alpha],$$

wo A_α alle Faktoren $a_1, \cdots a_m$, mit Ausnahme des Faktors a_α, enthält, und zwar fo, dass $[a_\alpha A_\alpha] = [a_1a_2 \cdots a_m]$ ist, und wo die Summe fich auf die Werthe $\alpha = 1, \cdots m$ bezieht.

Beweis 1. Um den Ausdruck $[ABa_1 \cdots a_m]$ zu entwickeln, muss man in die Lücken von AB nach und nach alle möglichen Anordnungen der Faktoren $a_1, \cdots a_m$ eintreten lassen; dabei muss alfo in A nach und nach jede der Grössen $a_1, \cdots a_m$ eintreten. Wenn nun zuerst in A die Grösse a_1 eintritt, fo müssen in B die übrigen Faktoren, alfo die Faktoren von A_1 in allen möglichen Folgen und zwar gleichfalls mit dem Zeichengefetz eintreten, dass zwei fo hervorgehende Ausdrücke gleiches oder entgegengefetztes Vorzeichen haben, je nachdem die beiden Reihenfolgen ein gleiches oder entgegengefetztes kombinatorisches Produkt liefern. Die fo hervorgehenden Glieder werden alfo $\mp Aa_1[BA_1]$ liefern. Hier ist jedoch das $+$-Zeichen zu wählen, weil $[a_1A_1] = [a_1a_2 \cdots a_m]$ ist. Aus gleichem Grunde

Hosted by Google

ist die Summe der Glieder, bei denen in A die Grösse a_2 eintritt, $= + Aa_2[BA_2]$ u. f. w.; alfo wird, da man diefe Summe noch durch die Anzahl ihrer Glieder dividiren muss,

$$[ABa_1 \cdots a_m] = \frac{1}{m}\sum \overline{Aa_a[BA_a]}.$$

2. Ferner ist (nach 504)

$$A[Ba_1 \cdots a_m] = \frac{1}{m}A\sum \overline{a_a[BA_a]}$$
$$= \frac{1}{m}\sum \overline{Aa_a[BA_a]} \qquad [39]$$
$$= [ABa_1 \cdots a_m] \qquad [\text{Bew. } 1].$$

510. Wenn C ein Ausdruck mit zwei Lücken gleicher Gattung ist, welcher durch Ausfüllung feiner Lücken eine Zahlgrösse wird, und a eine Grösse jener Gattung, B aber ein Produkt von $2n-1$ folchen Grössen, und $2n$ die Anzahl der Einheiten ist, aus welchen die Grössen diefer Gattung ableitbar find, fo ist

$$[Ca[C^{n-1}B]] = [C^naB]$$
$$[C[C^{n-1}B]a] = [C^nBa].$$

Beweis. $[C^naB]$ drückt, da die n Faktoren C alle einander gleich find, und nach Ausfüllung ihrer Lücken Zahlfaktoren werden, alfo untereinander vertauschbar find, aus, dass a in eine Lücke eines der Faktoren, z. B. des ersten Faktors C, eintritt, während die $2n-1$ Faktoren von B in die andere Lücke jenes Faktors und in die übrigen Faktoren eintreten. Dasfelbe drückt aber die Formel $[Ca[C^{n-1}B]]$ aus, alfo find beide gleich. Auf gleiche Weife ergiebt fich die zweite Formel.

511. Wenn Xdx (in dem Sinne von 502) auf n Glieder der Form Udu zurückführbar fein foll, d. h.

$$Xdx = U_1du_1 + \cdots U_ndu_n$$

fein foll, fo muss nothwendig

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

fein.

Beweis. Es fei $U_1du_1 + \cdots U_ndu_n$ der Kürze wegen mit $\sum \overline{U_adu_a}$ bezeichnet, fo ist

Hosted by Google

$$\Sigma\overline{U_a du_a} = \sum\overline{U_a \frac{d}{dx} u_a dx},$$

alſo

$$X = \sum\overline{U_a \frac{d}{dx} u_a}.$$

Somit

$$\frac{d}{dx}X = \frac{d}{dx}\sum\overline{U_a \frac{d}{dx} u_a}$$
$$= \sum\overline{\frac{d}{dx}U_a \cdot \frac{d}{dx}u_a} + \sum\overline{U_a \frac{d^2}{dx^2}u_a}.$$

Da $\frac{d^2}{dx^2}u_a$ ein Ausdruck mit zwei vertauschbaren Lücken ist (451), ſo können wir bei der Subſtitution von $\frac{d}{dx}X$ in den Ausdruck $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ (nach 507) die Glieder $\sum\overline{U_a \frac{d^2}{dx^2}u_a}$ weglaſſen, und erhalten

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = \left[\sum\overline{U_a \frac{d}{dx}u_a}\left(\sum\overline{\frac{d}{dx}U_a \frac{d}{dx}u_a}\right)^n\right]$$
$$= \sum\overline{\left[U_a \frac{d}{dx}u_a \cdot \frac{d}{dx}U_b \frac{d}{dx}u_b \cdot \frac{d}{dx}U_c \frac{d}{dx}u_c \cdots\right]},$$

wo die Anzahl der Indices $a, b, c, \cdots$ gleich $n+1$ iſt. Da aber u nur n verſchiedene Indices hat, ſo müſſen unter den Indices $a, b, \cdots$ nothwendig mindeſtens zwei gleiche vorkommen; alſo werden auch unter den Grössen $\frac{d}{dx}u_a$, $\frac{d}{dx}u_b$, $\frac{d}{dx}u_c, \cdots$ nothwendig zwei gleiche vorkommen, alſo iſt (nach 508) jedes Glied der obigen Summe null, alſo die Summe ſelbſt, d. h.

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0.$$

Anm. Ich werde im Folgenden zeigen, daſs dieſe Bedingungsgleichung zugleich die vollkommen ausreichende iſt, ſo daſs, wenn ſie erfüllt wird, auch allemal die Reduktion auf n Glieder der Form Udu, alſo auch (nach 503) die Integration durch Vereine von n Gleichungen möglich iſt. Es iſt daher dieſe in der That wunderbar ein-

Hosted by Google

fache Formel von fehr weitreichender Bedeutung. Der Beweis derfelben ist oben fo geführt, dass auch die Art, wie diefelbe gefunden ist, unmittelbar hindurchleuchtet. Auch hält es nicht schwer, die entsprechenden Formeln für den Fall zu entwickeln, dass Xdx eine extenfive Grösse ist; und ich habe diefe letzteren Formeln hier nur deshalb nicht aufgestellt, weil, wie schon oben angedeutet, die Behandlung diefes allgemeinen, die ganze Integralrechnung abschliessenden Falles hier unterbleiben musste. Dagegen werde ich die oben mitgetheilte Formel in der folgenden Nummer in die gewöhnliche Analyfis kleiden.

512. Aufgabe. Die Bedingungsgleichung aus 511, nämlich

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$$

durch Zahlgleichungen zu erfetzen.

Auflöfung. Es fei $x=x_1e_1+\cdots x_me_m$, wo $e_1,\cdots e_m$ das System der Einheiten bilden. Dann ist $dx=e_1dx_1+\cdots e_mdx_m$; und es wird $Xdx=Xe_1\cdot dx_1+\cdots Xe_mdx_m=X_1dx_1+\cdots X_mdx_m$, wenn wir die Zahlgrössen $Xe_1,\cdots Xe_m$ beziehlich mit $X_1,\cdots X_m$ bezeichnen. Die obige Bedingungsgleichung fagt dann (nach 506), da X eine und $\frac{d}{dx}X$ zwei Lücken enthält, aus, dass

$$(*)\quad\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1e_2\cdots e_{2n+1}\right]=0$$

fei, und auch bleibe, wenn man statt $e_1, e_2,\cdots e_{2n+1}$ beliebige $2n+1$ unter den m Einheiten $e_1,\cdots e_m$ fetzt. Ist $m=2n+1$, fo tritt keine andere numerische Bedingungsgleichung als die Gleichung (*) hervor; ist $m<2n+1$, fo tritt gar keine hervor, weil dann je $2n+1$ Grössen, mit denen $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ multiplicirt werden mag, in einer Zahlbeziehung stehen, alfo $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ dann mit ihnen multiplicirt (nach 505) null liefert, alfo (nach 506) felbst null ist. Wir nehmen daher jetzt an, dass $m=>2n+1$ fei; und fuchen unter diefer Voraussetzung in der Gleichung *, X und x durch die Zahlgrössen $X_1,\cdots X_m$, $x_1,\cdots x_m$ zu erfetzen. Nun ist nach dem Obigen

Hosted by Google

$Xe_r = X_r$, alfo $\frac{d}{dx}Xe_re_s = \frac{d}{dx}X_re_s = \frac{d}{dx_s}X_r$ (nach 451), folglich verwandelt fich die obige Formel (*) in

$$0 = \sum \overline{\mp X_1 \cdot \frac{d}{dx_3}X_2 \cdot \frac{d}{dx_5}x_4 \cdot \ldots \frac{d}{dx_{2n+1}}X_{2n}},$$

wo man die Indices auf alle möglichen Arten zu vertauschen und dem jedesmaligen Gliede das Zeichen + oder — vorzufetzen hat, je nachdem die Anzahl der Vertauschungen, durch die es hervorging, eine gerade oder ungerade war. Bezeichnen wir nach Jacobi's Vorgange (Crelle Journal 2, 351) $\frac{d}{dx_3}X_2 - \frac{d}{dx_2}X_3$ mit (2, 3) u. f. w., oder allgemein fetzen wir

$$\frac{d}{dx_s}X_r - \frac{d}{dx_r}X_s = (r, s),$$

fo können wir die vorige Formel auch schreiben

$$0 = \sum \overline{\mp X_1(2, 3)(4, 5)\cdots(2n, 2n+1)},$$

wobei die Vertauschungen je zweier in einer Klammer stehenden Indices ausgeschlossen bleiben. Ebenfo können wir, ohne die Bedeutung der Gleichung zu ändern, festfetzen, dass der erste der beiden in Klammern geschlossenen Indices von einem Faktor zum nächstfolgenden nur wachfe, nie abnehme. Denn da die Ordnung der Zahlfaktoren (2, 3) u. f. w. gleichgültig ist, fo können wir ihnen immer jene Anordnung geben. Wir bezeichnen in diefem Sinne (mit Jacobi a. a. O. p. 355) die Summe $\sum \overline{\mp (2, 3)\cdot(4, 5)\cdots(2n, 2n+1)}$ mit (2, 3, 4, 5, $\cdots$, 2n, 2n + 1), fo verwandelt fich die obige Gleichung in

$$0 = \sum \overline{\mp X_1(2, 3, \cdots 2n+1)}, \text{ d. h.}$$

$$0 = X_1(2, 3, \cdots 2n+1) - X_2(1, 3, \cdots 2n+1) + X_3(1, 2, 4, \cdots 2n+1) - \cdots,$$

was Jacobi (a. a. O. p. 356) schreibt

$$(**)\quad 0 = \sum \overline{X_1, (2, 3, \cdots, 2n+1)}.$$

Solcher Gleichungen giebt es fo viele, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus m Elementen zur (2n + 1)-ten Klasse giebt. Aber diefe Gleichungen find, wenn $m > 2n+1$ ist, nicht unabhängig von einander. In der That können wir zeigen, dass wenn die Gleichung (*), deren Transformirte die

Hosted by Google

Gleichung (**) ist, für alle Kombinationen aus $e_1, \cdots e_m$ zur $(2n+1)$-ten Klasse, in denen eine Einheit e_r vorkommt, deren zugehöriges $Xe_r = X_r$ nicht null ist, als geltend angenommen wird, fie auch für alle übrigen Kombinationen (in denen e_r nicht vorkommt) gelten muss. In der That, es fei $X_1 \gtrless 0$, und gelte die Gleichung * für alle Kombinationen, in denen e_1 vorkommt, d. h. es fei allemal

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 E_r\right] = 0,$$

wenn E_r eine beliebige Kombination ohne Wiederholung aus $e_2, \cdots e_m$ zur 2n-ten Klasse ist, fo ist zu zeigen, es fei auch allemal

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

auch wenn e_s eine beliebige in E_r nicht vorkommende Einheit bezeichnet. In der That ist (nach 508) $\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ allemal null, alfo ist (nach 506) auch $\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_1 e_s E_r\right] = 0$, d. h. es ist

$$\sum \mp Xe_1\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

wo die Summe fich auf die verschiedenen Glieder bezieht, welche aus dem unter dem Summenzeichen stehenden dadurch hervorgehen, dass man e_1 nach und nach mit jeder in $e_s E_r$ vorkommenden Einheit vertauscht (und das Vorzeichen ändert); allein alle diefe Glieder find null, weil dann $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ mit einer Kombination von Einheiten multiplicirt ist, unter denen e_1 vorkommt, und diefe Produkte nach der Vorausfetzung null find, alfo bleibt das unter dem Summenzeichen stehende Glied allein übrig, d. h. es ist

$$Xe_1\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0.$$

Nun ist gleichfalls vorausgefetzt, dass die Zahlgrösse $Xe_1 = X_1$ von Null verschieden fei, alfo erhält man

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_s E_r\right] = 0,$$

Hosted by Google

was zu zeigen war. Wir fassen nun das Resultat in einen Satz zusammen:

513. Wenn der Ausdruck $X_1dx_1 + \cdots X_mdx_m$, in welchem $X_1, \cdots X_m$ Funktionen der Variabeln $x_1, \cdots x_m$ sind, sich auf n Glieder, nämlich auf $U_1du_1 + \cdots U_ndu_n$, soll reduciren lassen können, oder, anders ausgedrückt, wenn die Gleichung $X_1dx_1 + \cdots X_mdx_m = 0$, sich soll durch Vereine von je n Gleichungen integriren lassen können, so muss erstens, wenn $m = 2n + 1$ ist, die eine Bedingungsgleichung

$$\sum X_1(2, 3, \cdots, 2n + 1) = 0,$$

welche die in 512 beschriebene Bedeutung hat, erfüllt werden; wenn aber zweitens $m > 2n + 1$ ist, so treten so viele solcher Gleichungen hervor, als es Kombinationen aus m Elementen zur $(2n + 1)$-ten Klasse giebt, indem man nämlich statt der Indices $1, 2, \cdots, 2n + 1$ in obiger Gleichung jede andere Gruppe von ebenso vielen Indices setzen kann; doch reicht unter diesen Gleichungen schon eine geringere Anzahl aus, indem, wenn z. B. X_1 ungleich null ist, es ausreichend ist, wenn man in der obigen Gleichung statt der Gruppe der Indices $2, 3, \cdots 2n + 1$, jede andere Kombination aus den Indices $2, 3 \cdots m$ zur 2n-ten Klasse setzt. So bleiben nur soviel Bedingungsgleichungen übrig, als es Kombinationen ohne Wiederholung aus $m - 1$ Elementen zur 2n-ten Klasse giebt.

Anm. Für den einfachsten Fall, wo $m = 2n + 1$ ist, hat Jacobi (a. a. O. p. 356) die Bedingungsgleichung aufgestellt. Für den Fall, wo $n = 1$ ist, erhält man die bekannten Bedingungsgleichungen der Integrabilität, welche (nach 511) in der Gleichung $\left[X\frac{d}{dx}X\right] = 0$ zusammengefasst erscheinen. Es kommt nun darauf an, die Zurückführung von Xdx auf n Glieder der Form Udu, sobald nur die Bedingungsgleichung (511) für die Möglichkeit dieser Zurückführung erfüllt ist, auch wirklich zu vollziehen. Zu diesem Ende lösen wir nach Pfaff's Vorgange die folgende Aufgabe:

514. Aufgabe. Die Zahlgleichung

(a) $Xdx = 0,$

in welcher X eine Funktion von x, und $x = x_1e_1 + \cdots x_me_m$ aus einem Systeme von m Einheiten abgeleitet ist, auf die Form zu bringen, dass die hervorgehende Gleichung nur $m - 1$ veränderliche Zahlgrössen enthalte.

Hosted by Google

Auflöſung. Es kommt zu dem Ende nur darauf an, x als Funktion einer aus m — 1 Einheiten ableitbaren Veränderlichen a, und einer veränderlichen Zahlgrösse t in der Art darzustellen, dass, wenn man dieſe Ausdrücke für x in die gegebene Gleichung einführt, dann der Koefficient von dt in der entwickelten Gleichung null wird, und der Koefficient von da entweder t gar nicht mehr enthält, oder nur in einem Zahlfaktor N, ſo dass, wenn man die Gleichung mit N dividirt, die ſo hervorgehende Gleichung t nicht mehr enthält. Bezeichnet man mit δ' das Differenzial nach a, wobei t konstant geſetzt ist, und mit δ den Differenzialquotienten nach t, wobei a konstant geſetzt ist, ſo erhält man $dx = \delta' x + \delta x \cdot dt$; folglich müssen, wenn die verlangte Aufgabe gelöst ſein ſoll, die beiden Gleichungen erfüllt werden

$$(b)\quad X\delta x = 0$$

$$(c)\quad \delta\frac{X\delta' x}{N} = 0,$$

indem die letztere ausdrückt, dass $X\delta' x : N$ nicht mehr von t abhängig ist. Die letzte dieſer Gleichung giebt, wenn man

$$(d)\quad \frac{\delta N}{N} = \lambda$$

ſetzt,

$$(e)\quad \lambda X\delta' x = \delta(X\delta' x) = \delta X \cdot \delta' x + X\delta\delta' x.$$

Differenziirt man auch die Gleichung (b) nach a, ſo erhält man

$$(f)\quad 0 = \delta' X \cdot \delta x + X\delta'\delta x.$$

Subtrahirt man die zweite dieſer Gleichungen von der ersten, ſo erhält man

$$(g)\quad \lambda X\delta' x = \delta X \cdot \delta' x - \delta' X \cdot \delta x$$
$$= \frac{d}{dx}X \cdot \delta' x \cdot \delta x - \frac{d}{dx}X \cdot \delta x \cdot \delta' x$$

$$(h)\quad \lambda X\delta' x = \left[\frac{d}{dx}X \cdot \delta' x \cdot \delta x\right].$$

Hier ist $\frac{d}{dx}X$ ein Ausdruck mit zwei Lücken; und zwar ist hier als erste Lücke, d. h. als diejenige Lücke, in welche der zuerst gestellte Faktor (im ersten Gliede $\delta' x$) eintreten

Hosted by Google

ſoll, diejenige Lücke aufgefasst, welche in X enthalten ist, und als zweite die durch die Differenziation nach x und Diviſion mit dx hinzutretende. Die Gleichung (h) wird nun offenbar erfüllt ſein, wenn für jede Grösse c, die mit x (alſo auch mit $\delta' x$) von gleicher Gattung ist,

$$\text{(i)}\quad \lambda X c = \left[\frac{d}{dx} X \cdot c \cdot \delta x\right]$$

ist. Ich zeige nun, dass, ſobald dieſe Gleichung (i) (für jede Grösse c) erfüllt ist, auch die beiden Gleichungen (b) und (c) erfüllt ſind, und alſo die verlangte Aufgabe gelöst ist, vorausgeſetzt, dass λ von Null verschieden ist. Es ist $\delta' x$ mit x von gleicher Grössengattung, muss alſo, wenn die Gleichung (i) allgemein gilt, in dieſer Gleichung statt c eingeſetzt werden können, wodurch man die Gleichung (h) erhält; alſo gilt auch die Gleichung (g), da ſie mit (h) gleichbedeutend ist. Ferner ist auch δx von gleicher Gattung mit x, kann alſo statt c in Gleichung (i) eingeſetzt werden. Dann wird aber die rechte Seite derſelben (nach 505) null, alſo erhält man $\lambda X \delta x = 0$, alſo da $\lambda \gtrless 0$ (nach Vorausſetzung), ſo ergiebt ſich $X \delta x = 0$, d. h. die Gleichung (b) gilt. Dann aber gilt auch die daraus abgeleitete (f). Durch Addition der Gleichungen (f) und (g) geht aber die Gleichung (e) hervor. Setzt man nun log. $N = \int^{-1} \lambda dt$, ſo wird auch die Gleichung (d) erfüllt, und indem man den daraus fliessenden Werth von λ in (e) einſetzt, auch die Gleichung (c), und es wird dann $\frac{X \delta' x}{N} = 0$ die aus $X dx = 0$ transformirte Gleichung, welche nur noch a, alſo eine aus $m - 1$ Einheiten ableitbare Grösse als Variable enthält, und die Aufgabe ist gelöst. Dies in einem Satze dargeſtellt:

„Wenn die Zahlgleichung

$$\text{(a)}\quad X dx = 0,$$

in welcher X eine Funktion von x, und x aus m Einheiten ableitbar ist, angenommen wird, und man x als Funktion einer aus $m - 1$ ableitbaren Variabeln a und einer veränderlichen Zahl t ſo bestimmt, dass, wenn δ' das Differenzial nach a, wobei t konstant geſetzt ist, und δ den Differenzialquotienten

Hosted by Google

nach t, wobei a konstant gefetzt ist, bezeichnen, und c eine beliebige mit x gleichgattige Grösse, λ aber eine noch unbekannte jedoch von Null verschiedene Zahlgrösse darstellt, die Gleichung

$$\text{(i)}\quad \lambda X c = \left[\frac{d}{dx}X \cdot c \cdot \delta x\right]$$

erfüllt fei, fo wird die Gleichung (a) erfetzt durch die Gleichung

$$\text{(k)}\quad \frac{X\delta' x}{N} = 0,$$

in welcher $\frac{X\delta' x}{N}$ nicht mehr von t abhängt, und

$$\text{(l)}\quad \log. N = \int^{-1}\lambda dt$$

ist."

515. Fortfetzung. Es kommt zunächst darauf an, aus der gefundenen Gleichung 514 i die Grösse δx auf eine Seite allein zu schaffen. Wir thun dies zunächst unter der Vorausfetzung, dass $m = 2n$ fei. Jene Gleichung enthält, wenn man statt c nach und nach die Einheiten $e_1, \cdots e_{2n}$ fetzt, 2n Zahlgleichungen, durch welche fich die Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_{2n}$, welche in $\delta x = e_1\delta x_1 + \cdots e_{2n}\delta x_{2n}$ enthalten find, im Allgemeinen ausdrücken lassen. Es gelingt dies auf eine fehr einfache Weife, fobald vorausgefetzt wird, dass

$$\text{(a)}\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$$

$$\text{(b)}\quad \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right] \gtrless 0$$

feien. In der That hat man dann, um δx_r zu finden, nur in 514 i statt c den Werth $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]$ zu fetzen, wo $[e_r E_r] = 1$ ist und E_r als Faktoren die $2n-1$ von e_r verschiedenen Einheiten enthält. Da nämlich $\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}$ im Ganzen $2n-2$ Lücken enthält und E_r ein Produkt von $2n-1$ Einheiten ist, fo wird (nach 504) $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]$ eine Vielfachenfumme der Einheiten, aus denen x abgeleitet ist, alfo mit x von gleicher Gattung und kann alfo statt c in die Gleichung 514 i eingefetzt werden. Dann verwandelt fich diefe in

Hosted by Google

$$\lambda X\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]=\left[\frac{d}{dx}X\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]\delta x\right].$$

Wandelt man die linke Seite diefer Gleichung (nach 509) und die rechte (nach 510) um, indem man bedenkt, dass $\frac{d}{dx}X$ ein Ausdruck mit zwei Lücken ist, und fowohl X als $\frac{d}{dx}X$ nach Ausfüllung ihrer Lücken Zahlgrössen werden, fo verwandelt fich jene Gleichung in

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]=\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}E_r\delta x\right].$$

Setzen wir hierin statt δx feinen Werth $e_1\delta x_1+\cdots e_{2n}\delta x_{2n}$, fo bleibt, da $[E_re_s]$, wenn r von s verschieden ist, gleiche Faktoren enthält, alfo das Produkt $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}E_re_s\right]$ null wird, und da (nach 58) $[E_re_r]=-[e_rE_r]=-1$ ist,

$$(c)\quad \lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right]=-\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]\delta x_r.$$

Wenn nun die Vergleichungen (a) und (b) erfüllt find, und man

$$(d)\quad -2n\lambda:\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=\mu$$

fetzt, fo erhält man

$$(d^*)\quad \delta x_r=\frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_r\right];$$

alfo wird

$$\delta x=\sum\overline{e_a\delta x_a}=\frac{\mu}{2n}\sum\overline{e_a\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_a\right]},$$

d. h. (nach 509)

$$(e)\quad \delta x=\mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right],$$

oder (nach 2)

$$(f)\quad \delta x\equiv\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right].$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Werth δx aus der Gleichung (e), in welcher μ die durch (d) ausgedrückte Bedeutung hat, in die Gleichung 514 i eingefetzt, diefe für jeden beliebigen Werth c identisch macht. Setzt man zunächst statt

Hosted by Google

c eine der Einheiten, z. B. e_r, fo wird die rechte Seite der Gleichung 514 i

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_r\delta x\right] = \mu\left[\frac{d}{dx}Xe_r\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\right].$$

Da $X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}$ nach Ausfüllung feiner $2n-1$ Lücken eine Zahlgrösse wird, fo können wir, ohne die Bedeutung desfelben zu ändern, ihm noch eine Lücke l hinzufügen (nach 504). Diefe Lücke fei mit den übrigen von gleicher Gattung, fo wird (nach 504) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] = \left[lX\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$ $= -\left[Xl\frac{d}{dx}X^{n-1}\right]$ (nach 508), und dies wieder (nach 509) $= -\frac{1}{2n}\sum Xe_a\left[l\frac{d}{dx}X^{n-1}E_a\right]$, wo E_a die von e_a verschiedenen Einheiten zu Faktoren hat, und $[e_aE_a] = 1$ ist; alfo erhält man, da Xe_a eine Zahlgrösse ist, alfo in dem Produkte beliebig gestellt werden darf,

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_r\delta x\right] = -\frac{\mu}{2n}\sum Xe_a\left[\frac{d}{dx}Xe_r\left[l\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_a\right]\right]$$
$$= -\frac{\mu}{2n}\sum Xe_a\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}e_rE_a\right] \quad [510].$$

Da nun E_a alle von e_a verschiedenen Einheiten als Faktoren enthält, fo enthält es, wenn a von r verschieden ist, auch e_r; dann aber ist $[e_rE_a]$ (nach 60) null, alfo auch (nach 505) der ganze Ausdruck, in welchem e_rE_a vorkommt, alfo reducirt fich die obige Summe auf das Glied, für welches $a = r$ wird; da aber $[e_rE_r] = 1$ ist, fo erhält man dann den obigen Ausdruck

$$= -\frac{\mu}{2n}Xe_r\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right].$$

Setzt man hierin ftatt μ feinen Werth aus (d), fo wird der letzte Ausdruck

$$= \lambda Xe_r.$$

Somit gilt die Gleichung 514 i für jede Einheit e_r, die ftatt c gefetzt werden mag, alfo auch für jede Vielfachenfumme diefer Einheiten, d. h. für jede Grösse c, die mit x

Hosted by Google

von gleicher Gattung ist. Alſo ist bewieſen, dass der Ausdruck (e) für δx unter den gemachten Vorausſetzungen die Gleichung 514 i allgemein löst.

Anm. In der erwähnten Abhandlung hat Jacobi (Crelle 2, 354) die hier gemachten, durch die Vergleichungen (a) und (b) ausgedrückten Vorausſetzungen stillschweigend gleichfalls angenommen, und die übrigen Fälle, wo dieſe Vorausſetzungen nicht eintreten, gar nicht behandelt. Die reſultirenden Formeln (e) oder (f) liefern in Form der gewöhnlichen Analyſis gekleidet, dieſelben Gleichungen, welche Jacobi dort (p. 354 ff.) aufstellt, ohne jedoch den Beweis mitzutheilen. Die Determinante, welche aus den in 514 i enthaltenen 2n Zahlgleichungen direkt abgeleitet wird, enthält doppelt ſo viel Faktoren, als die zur Löſung der Gleichungen dienenden Ausdrücke erfordern; es lässt ſich dieſe Determinante aber als Produkt eines Quadrates und einer neuen Determinante, welche nur die einfache Anzahl der erforderlichen Faktoren enthält, darstellen; jenes Quadrat fällt dann schliesslich aus den Ausdrücken für $\delta x_1, \cdots \delta x_{2n}$ hinweg, und dieſe neue Determinante stimmt mit dem oben mitgetheilten Ausdrucke $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ überein. Alle dieſe Umgestaltungen ſind durch die oben angewandte Methode, welche ſich von ſelbst darbietet, vermieden. Der Ausdruck für δx steht in einer merkwürdigen Beziehung zu der Bedingungsgleichung von No. 511, wofür ſich der Grund weiterhin ergeben wird. Es bleibt noch übrig, die Methode für den Fall zu ergänzen, dass die durch die obigen Vergleichungen (a) und (b) dargestellten Vorausſetzungen nicht erfüllt werden.

516. Fortſetzung. Wenn zwar, wie in der vorigen Nummer,

$$\text{(a)} \quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0,$$

aber $$\text{(b)} \quad \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist, ſo liefert die Gleichung 516 c, welche von den Vorausſetzungen 516 a und b unabhängig ist, für λ den Werth null. Alſo haben wir nicht mehr auf die Gleichung 514 i zurückzugehen, da dieſe nur für den Fall, dass $\lambda \gtrless 0$ ſei, zu einer Löſung der Aufgabe führte. Es zeigt ſich aber, dass dann die Gleichung

$$\text{(c)} \quad \delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right],$$

wofür man auch die Kongruenz

Hosted by Google

$$\delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

ſetzen kann, die Auflöſung der Aufgabe 514 ergiebt, d. h. die Gleichungen 514 b und c identiſch macht. Denn dann wird

$$X\delta x = \mu X\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

$$= \mu\left[X^2\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \qquad [509]$$

(d) $X\delta x = 0$ [508].

Ferner wird aus gleichem Grunde, wie in 515,

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_r\delta x\right] = -\frac{\mu}{2n}Xe_r\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

nach der ersten Vorausſetzung (a). Dieſe Gleichung gilt für jede Einheit $e_r = e_1, \cdots e_{2n}$, alſo auch für eine beliebige Vielfachenſumme dieſer Einheiten, alſo auch für $\delta' x$, da dies mit x von gleicher Gattung, alſo auch aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n}$ numeriſch ableitbar iſt. Es wird alſo

$$\left[\frac{d}{dx}X\delta' x\delta x\right] = 0, \text{ d h.}$$

$$\frac{d}{dx}X\delta' x\delta x - \frac{d}{dx}X\delta x\delta' x = 0.$$

Es iſt aber $\frac{d}{dx}X\delta x = \delta X$ und $\frac{d}{dx}X\delta' x = \delta' X$; alſo hat man

$$\delta X \cdot \delta' x - \delta' X \cdot \delta x = 0.$$

Differenziirt man nun die Gleichung (d) nach a, während t als konſtant geſetzt iſt, ſo erhält man, da δ' das zu dieſer Differenziation gehörige Zeichen war,

$$\delta' X \cdot \delta x + X\delta\delta' x = 0.$$

Addirt man dieſe Gleichung zu der vorigen, ſo hat man

$$\delta X \cdot \delta' x + X\delta\delta' x = 0, \text{ d. h.}$$

(e) $\delta(X\delta' x) = 0$, d. h.

es iſt $X\delta' x$ von t unabhängig, und alſo, da (nach 504) $Xdx = X\delta' x + X\delta x$ war, und $X\delta x = 0$ iſt,

$$Xdx = X\delta' x,$$

wo der letzte Ausdruck von t unabhängig iſt, alſo nur von $2n - 1$ Variabeln abhängt.

Anm. Die Gleichung (b) iſt alſo (unter der Vorausſetzung a) die Bedingungsgleichung dafür, daſs der Ausdruck Xdx ſich unmittel-

Hosted by Google

bar (ohne Hinzutreten eines Faktors) in einen Ausdruck transformiren lasse, der nur noch $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen enthält; wenn dagegen die Gleichung (b) nicht erfüllt ist, so gelang diese Transformation nur vermittelst eines veränderlichen Faktors, dessen reciproker Werth oben mit N bezeichnet war. Wenn ins Besondere $n=1$ ist, d. h. Xdx die Form $X_1dx_1+X_2dx_2$ hat, so ergiebt sich die Gleichung $\left[\frac{d}{dx}X\right]=0$, als Bedingungsgleichung dafür, dass sich $X_1dx_1+X_2dx_2$ in einen Differenzialausdruck Udu mit nur einer veränderlichen Zahlgrösse (u) verwandeln, also sich allseitig integriren lässt. Die Gleichung $\left[\frac{d}{dx}X\right]=0$ sagt aber aus, dass $\frac{d}{dx}X$ zwei vertauschbare Lücken enthält, was mit No. 486 stimmt. Ehe ich nun zeige, wie die Aufgabe zu lösen ist, wenn die Bedingungsgleichung (a) wegfällt, will ich noch durch Integration der Gleichung 515e die angedeutete Transformation wirklich vollziehen, wobei ich mich der Methode Jacobi's (in Crelle 17 p. 138) bediene.

517. Fortsetzung. Die Kongruenz oder Gleichung

$$\text{(a)}\quad \delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \text{ oder } \delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$$

bestimmt nur das Verhältniss der Differenzialquotienten $\delta x_1, \cdots \delta x_{2n}$; wir können also einen derselben willkürlich annehmen, d. h. wir können t beliebig wählen. Setzen wir $t=x_{2n}$, so wird $\delta x_{2n}=1$. Setzen wir dann für den Augenblick $x_1e_1+\cdots x_{2n-1}e_{2n-1}=y$, so wird $x=y+te_{2n}$ und $\delta x=\delta y+e_{2n}$, dann erhält man

$$\delta y = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]-e_{2n}.$$

Hier bestimmt sich μ aus der Voraussetzung $\delta x_{2n}=1$; setzt man hierin statt δx_{2n} seinen Werth aus 515d*, so erhält man zur Bestimmung von μ die Gleichung

$$1=\frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_{2n}\right],$$

wo $E_{2n}=-[e_1e_2\cdots e_{2n-1}]$ ist; somit erhalten wir

$$\delta y = 2n\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]:\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}E_{2n}\right]-e_{2n}.$$

Hier ist die rechte Seite eine Funktion von x, also von y und t; und es kann daher diese Gleichung nach der Methode 494 integrirt werden. Es ergab sich y (nach 494c) in der Form

Hosted by Google

$$y = a + t\varphi,$$

wo φ noch wieder eine Funktion von y und t, d. h. von x ist, und wo a der Werth ist, den y, und alſo auch x, für $t = 0$ annimmt. Die Formel 494d lehrte zugleich a als Funktion von y und t, d. h. hier als Funktion von x finden. Dann wird $\delta' x$, da δ' die Differenziation nach a, wobei t konstant war, bedeutet, gleich $\delta' y = da + t\delta'\varphi$. Alſo wird $X\delta' x : N$, was, wie gezeigt, von t unabhängig ist, gleich $X(da + t\delta'\varphi) : N$. Wenn wir daher statt X und N, um ſie als Funktionen von x zu bezeichnen, $X(x)$, $N(x)$ schreiben, ſo erhalten wir

$$\frac{X\delta' x}{N} = \frac{X(x)(da + t\delta'\varphi)}{N(x)}.$$

Da aber der Ausdruck links von t unabhängig ist, ſo muss es auch der Ausdruck rechts ſein, alſo muss er denſelben Werth behalten, den er für $t = 0$ hat. Da in dieſem Falle $y = a$ wird, und alſo auch x $(= y + te_{2n})$ gleich a wird, ſo erhält man

$$\frac{X\delta' x}{N} = \frac{X(a)da}{N(a)}.$$

Nun war, da $X\delta x = 0$ ist, $Xdx = X\delta' x = 0$, alſo erhält man

$$X(a)da = 0,$$

als die Transformirte von $Xdx = 0$; und zwar ist in jener a aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n-1}$ ableitbar, alſo nur von $2n - 1$ veränderlichen Zahlgrössen abhängig, was verlangt war.

Anm. Wir hätten dem Satze in 494, den wir hier benutzten, für den hier vorliegenden Zweck auch die Form geben können: Wenn x aus mehreren (m) Einheiten ableitbar ist, und $dx \equiv f(x)$ gegeben ist, ſo wird dieſe Kongruenz integrirt durch eine Funktion (Fx) von x, welche einer aus $m - 1$ Einheiten ableitbaren Konstanten a gleich geſetzt ist; und ins Beſondere kann man dieſer integrirenden Gleichung $Fx = a$ (welche $m - 1$ Zahlgleichungen enthält) die Form geben, dass a derjenige Werth wird, welchen x für den Fall annimmt, dass eine der Ableitzahlen von x, z. B. x_m, null wird. In dieſer Form werde ich den Satz in der Folge benutzen, indem ja der Beweis des Satzes in dieſer veränderten Form, ganz in dem oben Geſagten enthalten ist. Um nun die vorliegende Aufgabe auch für den bisher ausgeschlossenen Fall löſen zu können, will ich noch einen Hülfsſatz voranſtellen, welcher auch an ſich von Interesse ist.

Hosted by Google

518. Wenn $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$ ist, fo ist auch $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right]=0$.

Beweis 1. Die Lücken des ersteren diefer Ausdrücke werden durch $2n+1$, die des letzteren durch $2n+2$ Faktoren ausgefüllt. Ich zeige nun zuerst, dass der zweite Ausdruck nach Ausfüllung feiner Lücken durch beliebige $2n+2$ Faktoren $a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}$ fich als Vielfachenfumme von Ausdrücken der ersten Art darstellen lässt. Ich gehe, um beide Arten von Ausdrücken zu vermitteln, von dem Ausdrucke

$$Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}\right]$$

aus. Ich will zu dem Ende mit F_r das Produkt der von a_r verschiedenen Grössen $a_1, \cdots a_{2n+2}$ bezeichnen, und zwar dies Produkt fo genommen, dass $[a_r F_r] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ fei, und ebenfo mit $F_{r,s}$ das Produkt der von a_r und a_s verschiedenen unter jenen Grössen und zwar fo, dass $[a_r a_s F_{r,s}] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ fei. Dann wird der obige Ausdruck

$$= Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right].$$

Hierzu können wir, da $[a_1 F_\mathfrak{b}]$, wenn $\mathfrak{b} \gtrless 1$ ist, nothwendig den Faktor a_1 zweimal enthält, alfo in diefem Falle (nach 505) der obige Ausdruck null wird, fobald wir $a_1 F_\mathfrak{b}$ statt $a_1 F_1$ und gleichzeitig $Xa_\mathfrak{b}$ statt Xa_1 schreiben würden, noch beliebig viele Ausdrücke diefer Art hinzufügen; und wir erhalten den obigen Ausdruck

$$= \sum Xa_\mathfrak{b}\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_\mathfrak{b}\right],$$

wo fich die Summe auf alle Werthe $\mathfrak{b} = 1, \cdots 2n+2$ beziehen foll. Diefer Ausdruck ist aber (nach 509)

$$= \frac{1}{2n+1}\sum Xa_\mathfrak{b}\left[\frac{d}{dx}Xa_1 a_\mathfrak{a}\right]\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}\right],$$

wenn $F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ die oben angegebene Bedeutung hat, d. h. $[a_\mathfrak{b} a_\mathfrak{a} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$, alfo $[a_\mathfrak{a} F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}] = F_\mathfrak{b}$ ist, und alfo $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist und daher nur $2n+1$ verschiedene Werthe annehmen kann. Fassen wir jetzt (nach 509) den ersten und dritten der unter dem Summenzeichen stehenden Faktoren zufammen, fo erhalten wir den gefundenen Ausdruck (nach 509)

Hosted by Google

$$= -\sum \left[\frac{d}{dx}Xa_1a_\alpha\right]\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right],$$

wo das Minus-Zeichen zu ſetzen ist, weil aus $[a_\beta a_\alpha F_{\beta,\alpha}] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ folgt, dass $[a_\alpha a_\beta F_{\beta,\alpha}] = -[a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ ist, und alſo nach dem Princip der obigen Bezeichnung $F_\alpha = -[a_\beta F_{\beta,\alpha}]$ ſein muss. Die gewonnene Formel ist, alſo

(a) $$Xa_1\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right] = -\sum \left[\frac{d}{dx}Xa_1a_\alpha\right]\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right],$$

wo nach dem Obigen F_α ein Produkt ist, dessen Faktoren aus einer beliebig gewählten Faktorenreihe $a_1, a_2, \cdots a_{2n+2}$ genommen ſind, und zwar ſo, dass ausser a_α alle Faktoren dieſer Reihe darin vorkommen und $[a_\alpha F_\alpha] = [a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}]$ ist.

2. Wenn nun $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$ ist, ſo ist auch die rechte Seite der Formel (a) null, alſo auch die linke. Alſo müsste entweder Xa_1 oder $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 F_1\right]$, d. h. $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_{2n+2}\right]$ null ſein. Sollte das erstere der Fall ſein, ſo könnte man statt a_1 irgend eine andere der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_{2n+2}$ ſetzen; und wenn auch nur für eine derſelben a_r das Produkt $Xa_r \gtrless 0$ wird, ſo ergiebt ſich schon der zweite Faktor $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 \cdots a_{2n+2}\right]$ gleich null. Sollten aber $Xa_1, Xa_2, \cdots Xa_{2n+2}$ ſämmtlich null ſein, ſo würde auch $\frac{d}{dx}Xa_r$ für jeden Index r null, alſo auch $\left[\frac{d}{dx}Xa_ra_s\right]$, alſo auch $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} a_1 \cdots a_{2n+2}\right]$ gleich null. Dieſer Ausdruck ist alſo für jede Faktorenreihe $a_1, \cdots a_{2n+2}$ gleich null, alſo (nach 506) $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right]$ ſelbst gleich null.

519. Fortſetzung der Aufgaben 514—517. Es ſei, wie in 514, die Zahlgleichung

(a) $Xdx = 0$

betrachtet, in welcher, wie dort, x aus einem Systeme von m Einheiten ableitbar ist. Immer wird ſich ein Werth n von der Art angeben lassen, dass

Hosted by Google

(b) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$

(c) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\gtrless 0$

ſei. Denn die Vergleichung (c) wird immer erfüllt, wenn $n=1$ ist, wo ſie ſich auf $X\gtrless 0$ reducirt; und die Gleichung (b) wird immer erfüllt wenn $2n+1>m$ ist; denn dann wird zwischen jeden $2n+1$ Grössen, welche die Lücken des Ausdruckes $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]$ auszufüllen vermögen, eine Zahlbeziehung herrschen, weil ſie aus weniger als $2n+1$, nämlich aus m Einheiten numerisch ableitbar wären, folglich giebt jener Ausdruck mit jeden $2n+1$ Grössen, die ſeine Lücken füllen, multiplicirt (nach 505) null; alſo ist er ſelbst null (nach 506). Dies tritt alſo stets ein, wenn $2n+1>m$, d. h. $n>\frac{m-1}{2}$ ist, folglich muss es zwischen 1 und $\frac{m-1}{2}$ einen Werth n geben, für welchen die obigen Vergleichungen b und c erfüllt ſind. Dieſer Werth ſei für n angenommen. Nun kommt es (nach 514) darauf an, die Gleichung

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]-\lambda Xe_s=0$$

für jedes s von 1 bis m zu erfüllen; indem, ſobald dieſe erfüllt ist, und λ nicht null ist, die Gleichung (a) durch die Gleichung $\frac{X\delta' x}{N}=0$, erſetzt wird, in welcher die linke Seite nicht mehr von t abhängt und N durch die Formel 514 (l) bestimmt ist. Bezeichnen wir der Kürze wegen mit G_s den Ausdruck

$$G_s=\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]-\lambda Xe_s,$$

ſo können wir die obigen Gleichungen schreiben

$$0=G_1=G_2=\cdots=G_m.$$

Nun zeige ich, dass, wenn $m>2n$ ist, zwischen jeden $2n+1$ der Grössen $G_1\cdots G_m$ eine Zahlbeziehung herrscht. Angenommen, es herrsche zwischen den 2n Grössen $G_1,\cdots G_{2n}$

Hosted by Google

noch keine Zahlbeziehung, ſo zeige ich, daſs jede der übrigen Grössen, z. B. G_m ſich als Vielfachenſumme von $G_1, \cdots G_{2n}$ darſtellen lasse. Bezeichnen wir mit E das Produkt $[e_1 e_2 \cdots e_{2n} e_m]$ und mit F_α das Produkt aller von e_α verſchiedener Faktoren des Produktes E, und zwar in dem Sinne, daſs $[e_\alpha F_\alpha] = E$ ſei, und bezeichnen wir endlich mit α_α den Ausdruck $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right]$, ſo wird, wenn man die folgenden Summen auf die Werthe $1, 2 \cdots 2n$, und m, welche α nach und nach annehmen ſoll, bezieht,

$$\sum \alpha_\alpha G_\alpha$$
$$= -\sum \left[\frac{d}{dx}X \delta x e_\alpha\right]\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right] - \lambda \sum X e_\alpha \left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n F_\alpha\right],$$

was nach dem Begriffe der durch die scharfen Klammern bezeichneten Produkte

$$= -(2n+1)\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1} E\right] - \lambda(2n+1)\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n E\right]$$

ist. Nun ist (nach b) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$, und alſo (nach 518) auch $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n+1}\right] = 0$, alſo wird die ganze rechte Seite gleich null, alſo auch

$$\sum \alpha_\alpha G_\alpha = 0,$$

d. h. zwiſchen den Grössen $G_1, \cdots G_{2n}$ und G_m und überhaupt zwiſchen jeden $2n+1$ der Grössen $G_1, \cdots G_m$ herrſcht eine Zahlbeziehung. Es werden alſo unter ihnen 2n angenommen werden können, etwa $G_1, \cdots G_{2n}$, aus denen die übrigen numeriſch ableitbar ſind. Wenn alſo die Gleichungen $G_1, G_2, \cdots G_{2n} = 0$ erfüllt ſind, ſo werden auch die übrigen bis $G_m = 0$ erfüllt. Alſo können wir auch von den Grössen $\delta x_1, \cdots \delta x_m$, deren Verhältniſse durch die Gleichungen $G_1, \cdots G_m = 0$ beſtimmt ſind, die Grössen $\delta x_{2n+1}, \cdots \delta x_m$ willkürlich annehmen, z. B. alle gleich 0, d. h. wir können $x_{2n+1}, \cdots x_m$ in Bezug auf die durch δ ausgedrückte Differenziation als konſtant anſehen. Dann haben wir alſo, immer unter der Vorausſetzung daſs $\lambda \gtrless 0$ ſei, die Gleichungen $G_1 = 0, \cdots G_{2n} = 0$ mit nur 2n Variabeln (indem wir $x_{2n+1}, \cdots x_m$ noch als konſtant ſetzen)

Hosted by Google

und mit der Bedingung $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$. Dann erhalten wir alfo (nach 515)

$$\text{(d)}\quad \delta x \equiv \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \cdots e_{2n}\right] \text{ oder}$$

$$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \cdots e_{2n}\right]$$

als eine Grösse, die die Gleichungen $G_1, \cdots G_{2n} = 0$, und alfo auch (wie fo eben gezeigt) die Gleichungen $G_1, \cdots G_m = 0$ erfüllt, und alfo auch den Ausdruck $X\delta' x : N$ von t unabhängig, und $X\delta x$ null werden lässt. Integrirt man diefe Kongruenz nach der Methode von No. 517 (vergl. Anm.) durch eine Gleichung von der Form $Fx = b$, wo b den Werth bezeichnet, welchen $x_1 e_1 + \cdots + x_{2n-1} e_{2n-1}$ für $t = x_{2n} = 0$ annimmt, und fetzt $a = b + x_{2n+1} e_{2n+1} + \cdots + x_m e_m$, fo wird, da $x_{2n+1}, \cdots x_m$ von t unabhängig find, a der Werth den x für $t = 0$ annimmt; und da dann vermöge der Gleichungen $G_1 = \cdots = G_m = 0$, die Grösse $X\delta' x : N$ von t unabhängig wird, fo erhält man aus demfelben Grunde, wie in 517, $X(a)da = 0$ als die Gleichung, welche die Gleichung $X \cdot dx = 0$ oder $X(x)dx = 0$ erfetzt, und welche nur noch von $m - 1$ veränderlichen Zahlgrössen, nämlich von den Zahlgrössen, durch welche a aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n-1}$, $e_{2n+1}, \cdots e_m$ ableitbar ist, abhängt. Es war auch hier noch vorausgefetzt, dass $\lambda \gtrless 0$ war. Diefe Vorausfetzung können wir erfetzen durch die Vorausfetzung, dass $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] \gtrless 0$ fei. Nämlich, man kann aus den Gleichungen $G_1 = G_2 = \cdots G_{2n} = 0$, ganz wie in 515, die Gleichung (die dort mit c bezeichnet war nämlich)

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} E_r\right] = -\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]\delta x_r$$

ableiten; fetzt man ins Befondere $r = 2n$, fo wird $\delta x_r = \delta x_{2n} = 1$, und man erhält

$$\lambda\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} E_{2n}\right] = -\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right].$$

Ist alfo $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)\right]^n$ von null verschieden, fo muss auch λ von

Hosted by Google

null verschieden ſein. Es ist alſo nur noch der Fall zu berückſichtigen, wo $\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$ ist. Ist aber dieſe Gleichung erfüllt, ſo ergiebt ſich leicht, dass die Gleichung (d) gleichfalls der Aufgabe genügt. Denn es ergiebt ſich dann, wie in 516 d, dass $X\delta x=0$ ſei, ebenſo ergiebt ſich:

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]=\mu\left[\frac{d}{dx}Xe_s\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}e_1\cdots e_{2n}\right]\right],$$

was ſich ganz, wie der entſprechende Ausdruck in 515, umwandelt in

$$=-\frac{\mu}{2n}\sum\overline{Xe_a\left[\left(\frac{d}{dx}X\right)^n e_sE_a\right]},$$

wo $[e_aE_a]=[e_1\cdots e_{2n}]$ und s jede der Zahlen $1\cdots m$ ſein kann. Die rechte Seite ist nach der gemachten Vorausſetzung null. Alſo

$$\left[\frac{d}{dx}Xe_s\delta x\right]=0,$$

wo ſtatt e_s jede der Einheiten $e_1,\cdots e_m$, alſo auch jede Vielfachenſumme derſelben, alſo auch $\delta' x$ geſetzt werden kann, ſomit erhält man

$$\left[\frac{d}{dx}X\delta' x\delta x\right]=0,$$

und hieraus ergiebt ſich, wie in 516, $\delta(X\delta' x)=0$ und $Xdx=X\delta' x$. Alſo hat ſich der Satz ergeben:

„Wenn in der Zahlgleichung

(a) $Xdx=0$,

in welcher X eine Funktion von x, und x aus den Einheiten $e_1,\cdots e_m$ durch die Zahlen $x_1,\cdots x_m$ ableitbar ist, die Grösse X die Eigenſchaft hat, dass für irgend einen Werth n, der kleiner als $\frac{m}{2}$ ist,

(b) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right]=0$

und (c) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\gtrless 0$,

ist, ſo lässt ſich jene Gleichung (a) erſetzen durch eine Gleichung

Hosted by Google

(e) $Ada = 0$,

in welcher a aus $m-1$ Einheiten ableitbar ist, d. h. nur $m-1$ veränderliche Zahlen einschliesst, und A dieselbe Funktion von a, wie X von x ist. Und zwar findet man die Grösse a durch Integration der Gleichung

(d) $$\delta x = \mu\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1} e_1 \cdots e_{2n}\right],$$

in welcher δ den Differenzialquotienten nach einer der Variabeln $x_1, \cdots x_{2n}$, z. B. nach x_{2n}, bedeutet, und also $\delta x_{2n} = 1$ ist, wodurch sich μ bestimmt, und in welcher $x_{2n+1}, x_{2n+1}, \cdots x_m$ als konstante Grössen behandelt werden. Wenn nun in diesem Sinne die Gleichung (d) durch eine Gleichung von der Form

(f) $Fx = b$

integrirt wird, wo b den Werth bezeichnet, den $x_1e_1 + \cdots x_{2n-1}e_{2n-1}$ für $x_{2n} = 0$ annimmt, so ist

(g) $$a = Fx + x_{2n+1}e_{2n+1} + \cdots x_me_m,$$

also a aus den Einheiten $e_1, \cdots e_{2n-1}, e_{2n+1}, \cdots e_m$ ableitbar.

520. Zusatz 1. Wenn in der vorigen Nummer nur die Gleichungen (a) und (b) erfüllt sind, aber nicht die Vergleichung (c), so lässt sich, mag nun $m = 2n$ oder $> 2n$ sein, gleichfalls die Gleichung (a) auf $m-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen und zwar auf eine Gleichung der Form $Ada = 0$, wo A dieselbe Funktion von a, wie X von x, und a aus $m-1$ Einheiten ableitbar ist.

Beweis. Denn wenn auch $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right] = 0$ sein sollte, so muss, da doch schliesslich $X \gtrless 0$ ist, sich ein Zahlwerth $n' > n$ finden lassen von der Art, dass die Vergleichungen (b) und (c) gelten, sobald man n' statt n setzt, da nun $m >$ oder $= 2n$ war, so ist m stets $> 2n'$, also kann man dann nach dem vorigen Satze die Gleichung $Xdx = 0$ gleichfalls auf $m-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen u. s. w.

521. Zusatz 2. Ins Besondere kann man, wenn $m = 2n$ ist, stets die Gleichung $Xdx = 0$ auf $m-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen.

Beweis. Denn dann gilt die Gleichung (b) stets (nach 519); und wenn dann auch die Vergleichung (c) gilt, so findet

Hosted by Google

die Zurückführung (nach 517) statt; wenn jene Vergleichung aber nicht gilt, ſo geschieht ſie nach 520.

522. Wenn die Gleichungen (a) und (b) in demſelben Sinne wie in 519 gelten, ſo kann man die Gleichung

$$Xdx = 0$$

allemal auf $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, und zwar auf die Form

$$Ada = 0,$$

wo A dieſelbe Funktion von a, wie X von x ist, und a aus $2n - 1$ Einheiten ableitbar ist, d. h. nur noch $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen einschliesst.

Beweis. Es ſoll hier nicht bloss der Satz erwieſen, ſondern auch gezeigt werden, wie die neue Variable a als Funktion von x gefunden werden kann. Nach 520 kann man $Xdx = 0$ durch eine Gleichung von der Form $A_1 da_1 = 0$ erſetzen, wo a_1, was aus $m - 1$ Einheiten ableitbar ist, eine bekannte Funktion von x, und A_1 dieſelbe Funktion von a_1 ist, wie X von x. Da nun die Gleichung (b) für jeden Werth von x gilt, alſo auch wenn man a_1 statt x ſetzt, ſo erhält man

$$\left[A_1\left(\frac{d}{da_1}A_1\right)^n\right] = 0.$$

Wenn alſo noch $m - 1$ (die Anzahl der Einheiten aus denen a_1 ableitbar ist) grösser als $2n$ ist, ſo kann man abermals die Methode in 519 oder 520 anwenden, und erhält dann eine Gleichung der Form $A_2 da_2 = 0$, wo a_2, was aus $m - 2$ Einheiten ableitbar ist, eine bekannte Funktion von a_1, alſo auch von x ist, und A_2 dieſelbe Funktion von a_2, wie A_1 von a_1, alſo auch wie X von x ist. Auf dieſe Weiſe kann man fortfahren, ſo lange noch die Anzahl der übrig bleibenden veränderlichen Zahlgrössen grösser als $2n$ ist; ja (nach 521) auch noch, wenn dieſe Anzahl $= 2n$ ist. Wendet man dann dies Verfahren noch einmal an, ſo reducirt ſich die Anzahl der veränderlichen Zahlgrössen auf $2n - 1$. Wenn dann die ſo reſultirende Gleichung, die Gleichung $Ada = 0$ ist, ſo ist alſo a aus $2n - 1$ Einheiten ableitbar, und eine bekannte Funktion von x, und A ist dieſelbe Funktion von a, wie X von x.

Hosted by Google

Anm. Diefer Satz enthält die allgemeinste Löfung der in 514 begonnenen Aufgabe der Zurückführung auf eine möglichst geringste Anzahl veränderlicher Zahlgrössen. Dass, wenn $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$ ungleich null (519c) ist, fich auch Xdx nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen lässt, werde ich unten gelegentlich beweifen. Noch bemerke ich, dass man, ftatt $t = x_{2n}$ zu fetzen, es auch gleich irgend einer Funktion der veränderlichen Zahlgrössen hätte fetzen können. Dann hätte man nur eine der letzteren, z. B. x_{2n}, durch t und die übrigen Variabeln auszudrücken und diefen Ausdruck in die gegebene Gleichung einzuführen, und dann ganz die vorher angegebene Methode zu befolgen. Ins Befondere kann man, wenn die Integration eine Funktion ergeben würde, die für $x_{2n} = 0$ unstetig wäre, $t = x_{2n} - c$ fetzen, wo c eine Konstante bezeichnet; indem dann für $t = 0$, $x_{2n} = c$ wird und c fo gewählt werden kann, dass jene Funktion in $t = 0$, d. h. in $x_{2n} = c$, ftetig fei.

523. Aufgabe. Den numerischen Ausdruck Xdx, in welchem X eine Funktion der extenfiven Grösse x ist, unter der Vorausfetzung, dass

$$(a)\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right] = 0$$

ist, auf die Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots U_n du_n,$$

wo $U_1, \cdots U_n$, $u_1, \cdots u_n$ Zahlgrössen find, zurückzuführen.

Auflöfung. Man kann (nach 522) die Gleichung $Xdx = 0$ auf $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, welche bekannte Funktionen von x find. Eine beliebige diefer veränderlichen Zahlgrössen fei mit u_1 bezeichnet, fo ist u_1 gleichfalls eine bekannte Funktion von x. Nun fei u_1 konstant gefetzt, fo bleiben nur noch $2n-2$ veränderliche Zahlgrössen übrig. Folglich können wir (nach 521) die erhaltene Gleichung (welche nach den obigen Sätzen ftets die Form Ada hat) auf $2n-3$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen, welche bekannte Funktionen der obigen $2n-1$ Veränderlichen, und alfo auch bekannte Funktionen von x find; eine derfelben fei mit u_2 bezeichnet, und fei u_2 konstant gefetzt, fo hat man nur noch $2n-4$ veränderliche Zahlgrössen, welche fich auf $2n-5$ folche zurückführen lassen, u. f. w. Hat man diefe Methode r mal angewandt, fo nämlich, dass man nach und nach die Grössen $u_1, u_2, \cdots u_r$, welche fämmtlich bekannte

Hosted by Google

Funktionen von x ſind, konſtant geſetzt hatte, ſo bleiben nur noch $2(n-r)-1$ veränderliche Zahlgrössen übrig. Setzt man alſo $r = n-1$, ſo bleibt nur noch eine veränderliche Zahlgrösse übrig und die reſultirende Gleichung hat die Form $U_n du_n = 0$, wo U_n nur von der variabeln Zahlgrösse u_n abhängt. Setzt man alſo auch u_n gleich einer Konſtanten, ſo werden jetzt alle Differenzialgleichungen, alſo namentlich auch die erſte $Xdx = 0$ erfüllt, wenn die Funktionen $u_1, u_2, \cdots u_n$ Konſtanten gleich geſetzt werden, alſo lässt ſich nach der Methode 502 Xdx in der Form

$$Xdx = U_1 du_1 + \cdots U_n du_n$$

darſtellen, und die Aufgabe ist gelöst.

524. Der numeriſche Ausdruck Xdx, in welchem X eine Funktion der extenſiven Grösse x ist, ist dann und nur dann auf eine Summe von n Gliedern der Form Udu, wo U und u Zahlgrössen vorſtellen, zurückführbar, wenn

$$\text{(a)} \quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$$

ist.

Beweis. Wenn die Gleichung (a) erfüllt ist, ſo ist die genannte Zurückführung von Xdx auf n Gliedern der Form Udu (nach 523) ausführbar, und wenn umgekehrt dieſe Zurückführung möglich ist, ſo wird (nach 511) die Gleichung (a) erfüllt.

525. Zuſatz. Wenn x aus $2n$ Einheiten ableitbar ist, ſo lässt ſich Xdx allemal auf n Glieder der Form Udu, wo U und u Zahlen ſind, zurückführen.

Beweis. Denn wenn x aus $2n$ Einheiten ableitbar ist, ſo ist die Gleichung $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^n\right] = 0$ (nach 519) stets erfüllt, und alſo Xdx (nach 524) auf n Glieder der Form Udu zurückführbar.

Anm. Es folgt aus dieſen Sätzen ſogleich, dass wenn $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]$ von null verſchieden ist, ſich auch die Gleichung $Xdx = 0$ nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen lasse. Denn liesse ſie ſich auch nur auf $2n-2$ ſolche zurückführen, und ſei $Ada = 0$ die ſo erhaltene Gleichung, ſo liesse ſich (nach 525) Ada auf

Hosted by Google

$n-1$ Glieder der Form Udu zurückführen. Aber da die Gleichungen $Xdx=0$ und $Ada=0$ ſich gegenſeitig erſetzen, ſo können ſie ſich nur durch einen Zahlfaktor unterscheiden. Es ſei $Xdx=NAda$, ſo wird nun auch Xdx auf $n-1$ Glieder der Form Udu zurückgeführt ſein; alſo (nach 511) $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]=0$ ſein, was mit der Vorausſetzung streitet. Alſo lässt ſich unter der gemachten Vorausſetzung die Gleichung $Xdx=0$ nicht auf weniger als $2n-1$ veränderliche Zahlgrössen zurückführen. Es bildet dieſe Bemerkung eine schon oben angedeutete Ergänzung zu dem Satze 522.

526. Aufgabe. **Die Zahlgleichung $Xdx=0$, in welcher X Funktion der extenſiven Grösse x ist, vollständig zu integriren.**

Auflöſung. Es lässt ſich (nach 519) stets ein Werth n von der Art angeben, dass

$$\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=0,\quad \left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n-1}\right]\gtrless 0$$

ſei. Dann lässt ſich (nach 523, 524) Xdx stets auf n (aber nicht auf weniger als n) Glieder der Form Udu (wo U und u Zahlen ſind) zurückführen. Es ſei

$$Xdx=U_1du_1+\cdots U_ndu_n=0,$$

ſo ſuche man zu der Gleichung $U_1du_1+\cdots U_ndu_n=0$ (nach 503) die ſämmtlichen integrirenden Vereine von je n Gleichungen, ſo integriren dieſe Vereine alſo die mit jener identische Gleichung $Xdx=0$.

527. Zuſatz. **Die Gleichung $\left[X\left(\frac{d}{dx}X\right)^{n}\right]=0$ ist die nothwendige aber auch ausreichende Bedingungsgleichung dafür, dass ſich die Gleichung $Xdx=0$ durch Vereine von je n Gleichungen integriren lasse.**

Anm. Nach 500 ist mit der vollständigen Integration der Zahlgleichung $Xdx=0$ zugleich die der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung vollendet; während die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung (nach 501) auf die Integration der extenſiven Gleichung $Xdx=0$ zurückführte, welche wir hier ausgeschlossen haben.

Hosted by Google